

РАСЧЕТ КОЛЕБАНИЙ УПРУГИХ СИСТЕМ С ИНЕРЦИОННЫМИ ОДНОСТОРОННИМИ СВЯЗЯМИ

Канд. техн. наук, доц. И.Е. ЛЮМИНАРСКИЙ

Предложен метод расчета колебаний упругой системы с инерционными односторонними связями. Метод основан на сведении уравнений движения к системе интегральных уравнений относительно сил и зазоров в односторонних связях. При решении этих уравнений реакции в односторонних связях представляются в виде ряда с финитными функциями. Приводится расчет колебаний балки Кирхгофа с односторонними связями, выполненный в виде стержней с закругленными концами.

Method of analysis of elastic system oscillations with inertial one-sided couplings is offered. The method is based on reduction of the equations of motion to a system of integral equations concerning forces and clearances in one-sided links. At the solution of these equations responses in one-sided links are represented as series of finite functions. Vibration analysis of the Kirchhoff beam with one-sided links made in the form of rods with rounded ends is also made.

Рассматриваются колебания упругой системы и односторонних связей, описываемые уравнениями

$$\mathbf{L}\mathbf{u} = \mathbf{p}(\mathbf{x}, t), \quad (1)$$

$$\widehat{\mathbf{L}}_i \widehat{\mathbf{u}}_i = \widehat{\mathbf{p}}_i(\mathbf{x}, t), \quad i = 1, \dots, L, \quad (2)$$

где $\mathbf{L}_i \mathbf{u}_i = \mathbf{A} \frac{\partial^2 \mathbf{u}_i}{\partial t^2} + \mathbf{B} \frac{\partial \mathbf{u}_i}{\partial t} + \mathbf{C} \mathbf{u}_i$; $\widehat{\mathbf{L}}_i \widehat{\mathbf{u}}_i = \widehat{\mathbf{A}}_i \frac{\partial^2 \widehat{\mathbf{u}}_i}{\partial t^2} + \widehat{\mathbf{B}}_i \frac{\partial \widehat{\mathbf{u}}_i}{\partial t} + \widehat{\mathbf{C}}_i \widehat{\mathbf{u}}_i$; \mathbf{A} , \mathbf{C} , \mathbf{B} — линейные положительно определенные матричные операторы упругой системы (инерционный, упругий и диссипативный); $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \{w(\mathbf{x}, t), v_1(\mathbf{x}, t), v_2(\mathbf{x}, t)\}$ — вектор перемещений упругой системы; $\widehat{\mathbf{A}}_i, \widehat{\mathbf{C}}_i, \widehat{\mathbf{B}}_i$ — линейные положительно определенные матричные операторы i -ой связи (инерционный, упругий и диссипативный); $\widehat{\mathbf{u}}_i(\mathbf{x}, t) = \{\widehat{w}_i(\mathbf{x}, t), \widehat{v}_{1i}(\mathbf{x}, t), \widehat{v}_{2i}(\mathbf{x}, t)\}$ — вектор перемещений i -ой связи; $w(\mathbf{x}, t)$ — нормальные к поверхности перемещения упругой системы; $v_1(\mathbf{x}, t), v_2(\mathbf{x}, t)$ — перемещения упругой системы в плоскости, перпендикулярной w ; $\widehat{w}_i(\mathbf{x}, t)$ — нормальные к поверхности перемещения i -ой связи (положительное направление $\widehat{w}_i(\mathbf{x}, t)$ совпадает с направлением, в котором связь ограничивает перемещение упругой системы); $\widehat{v}_{1i}(\mathbf{x}, t), \widehat{v}_{2i}(\mathbf{x}, t)$ — перемещения i -ой связи в плоскости перпендикулярной \widehat{w}_i ; $\mathbf{p}(\mathbf{x}, t) = \{p_w(\mathbf{x}, t), p_{v1}(\mathbf{x}, t), p_{v2}(\mathbf{x}, t)\}$, $\widehat{\mathbf{p}}_i(\mathbf{x}, t) = \{\widehat{p}_{wi}(\mathbf{x}, t), \widehat{p}_{v1i}(\mathbf{x}, t), \widehat{p}_{v2i}(\mathbf{x}, t)\}$ — векторы внешних нагрузок, действующих на упругую систему и i -ую связь; L — число односторонних связей.

Математическая модель колебаний упругой системы (1) с инерционными односторонними связями (2) может быть описана системой уравнений

$$\mathbf{L}\mathbf{u} = \mathbf{p}(\mathbf{x}, t) + \sum_{i=1}^L d_i \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i) \mathbf{F}_i(t); \quad (3)$$

$$\widehat{\mathbf{L}}_i \widehat{\mathbf{u}}_i = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i) \mathbf{F}_i(t); \quad i = 1, \dots, L; \quad (4)$$

$$R_i(t) \geq 0, \quad i = 1, \dots, L; \quad (5)$$

$$\Delta_i(t) = d_i w(\mathbf{x}_i, t) + \widehat{w}_i(x_i, t) + \lambda_i(t) + \Delta_i^0 \geq 0, \quad i = 1, \dots, L; \quad (6)$$

$$R_i(t) \Delta_i(t) = 0, \quad i = 1, \dots, L. \quad (7)$$

В этих уравнениях введены следующие обозначения: $\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i)$ — функция Дирака; Δ_i^0 — зазор между i -ой связью и упругой системой в недеформированном состоянии; $\mathbf{F}_i(t) = \{R_i(t), 0, 0\}$; $\Delta_i(t), R_i(t)$ — функции зазора и реакции в i -ой связи; \mathbf{x}_i — вектор, определяющий положение точки контакта упругой системы и i -ой односторонней связи; $d_i = -1$, если связь ограничивает перемещение упругой системы в положительном направлении действия внешней нагрузки $p_w(\mathbf{x}, t)$, в противном случае $d_i = 1$; $\lambda_i(t)$ — местное неинерционное перемещение в точке контакта упругой системы и i -ой связи.

Математическая модель (3)—(7) предполагает, что реакции в односторонних связях направлены по нормали к поверхности упругой системы; в точках касания упругая система и односторонние связи имеют общую нормаль.

Перемещения упругой системы и односторонних связей можно представить в виде [1]

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{u}_0(\mathbf{x}, t) + \mathbf{u}_p(\mathbf{x}, t) + \sum_{j=1}^L d_j \int_0^t R_j(\tau) \Phi_j(\mathbf{x}, t, \tau) d\tau, \quad (8)$$

$$\widehat{\mathbf{u}}_i(\mathbf{x}, t) = \widehat{\mathbf{u}}_{0i}(\mathbf{x}, t) + \int_0^t R_i(\tau) \widehat{\Phi}_i(\mathbf{x}, t - \tau) d\tau, \quad i = 1, \dots, L. \quad (9)$$

Функции $\mathbf{u}_0(\mathbf{x}, t) = \{w_0(\mathbf{x}, t), v_{10}(\mathbf{x}, t), v_{20}(\mathbf{x}, t)\}$ и $\widehat{\mathbf{u}}_{0i}(\mathbf{x}, t) = \{\widehat{w}_{0i}, \widehat{v}_{10i}, \widehat{v}_{20i}\}$ являются решениями однородных уравнений

$$\mathbf{A} \frac{\partial^2 \mathbf{u}_0}{\partial t^2} + \mathbf{B} \frac{\partial \mathbf{u}_0}{\partial t} + \mathbf{C} \mathbf{u}_0 = 0, \quad (10)$$

$$\widehat{\mathbf{A}}_i \frac{\partial^2 \widehat{\mathbf{u}}_{0i}}{\partial t^2} + \widehat{\mathbf{B}}_i \frac{\partial \widehat{\mathbf{u}}_{0i}}{\partial t} + \widehat{\mathbf{C}}_i \widehat{\mathbf{u}}_{0i} = 0, \quad i = 1, \dots, L \quad (11)$$

с граничными и начальными условиями исходной задачи.

Функция $\mathbf{u}_p(\mathbf{x}, t) = \{w_p(\mathbf{x}, t), v_{1p}(\mathbf{x}, t), v_{2p}(\mathbf{x}, t)\}$ является решением уравнения

$$\mathbf{A} \frac{\partial^2 \mathbf{u}_p}{\partial t^2} + \mathbf{B} \frac{\partial \mathbf{u}_p}{\partial t} + \mathbf{C} \mathbf{u}_p = \mathbf{p}(\mathbf{x}, t) \quad (12)$$

с граничными условиями исходной задачи и нулевыми начальными условиями.

$\Phi_j(\mathbf{x}, t, \tau) = \{\Phi_{w_j}, \Phi_{v_{1j}}, \Phi_{v_{2j}}\}$ — фундаментальное решение задачи Коши (функция Грина) от нормальной нагрузки, которое при $t > \tau \geq 0$ удовлетворяет однородному уравнению

$$\mathbf{A} \frac{\partial^2 \Phi_j}{\partial t^2} + \mathbf{B} \frac{\partial \Phi_j}{\partial t} + \mathbf{C} \Phi_j = 0 \quad (13)$$

с граничными условиями исходной задачи и полуоднородными начальными условиями вида

$$\Phi_j = 0, \quad \frac{\partial \Phi_j}{\partial t} = \delta_j \quad \text{при } t = \tau,$$

где $\delta_j = \{\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_j), 0, 0\}$.

$\widehat{\Phi}_i(\mathbf{x}, t - \tau) = \{\widehat{\Phi}_{wi}, \widehat{\Phi}_{vi}, \widehat{\Phi}_{v2i}\}$ — функция Грина для i -ой связи от нормальной нагрузки.

Выражения (8) и (9) — это интегральные уравнения, в которых неизвестными величинами являются функции реакций $R_i(t)$.

В предлагаемой работе реакции $R_i(t)$ представляются в виде ряда

$$R_j(t) = \sum_{\alpha=0}^m r_j^\alpha f_\alpha(t), \quad (14)$$

где $f_\alpha(t)$ — кусочно-линейные финитные функции [2], r_j^α — коэффициенты, подлежащие определению. Физический смысл r_j^α — это значение реакции в односторонней связи с номером j в момент времени $t_\alpha = \frac{T\alpha}{m}$, где T — интервал времени, на котором находится решение.

Подставив (14) в (8), (9) и учитывая (5)—(7), получим следующую разрешающую систему уравнений для момента времени t_α :

$$\begin{aligned} \Delta^\alpha - [V^{\alpha\alpha} + S^{\alpha\alpha}] \mathbf{r}^\alpha - \boldsymbol{\lambda}^\alpha - \Delta_p^\alpha &= 0, \\ r_i^\alpha &\geq 0, i = 1, \dots, L, \\ \Delta_i^\alpha &\geq 0, i = 1, \dots, L, \\ r_i^\alpha \Delta_i^\alpha &= 0, i = 1, \dots, L, \end{aligned} \quad (15)$$

где $\Delta_p^\alpha = \Delta_0 + \sum_{\beta=0}^{\alpha-1} [V^{\alpha\beta} + S^{\alpha\beta}] \mathbf{r}^\beta + D(\mathbf{w}_0^\alpha + \mathbf{w}_p^\alpha) + \widehat{\mathbf{w}}_0^\alpha$; $V^{\alpha\beta}$ — матрицы размерности $L \times L$, элементы которых определяются по формуле $V_{ij}^{\alpha\beta} = d_i d_j \int_0^{t_\alpha} f_\beta(\tau) \Phi_{wj}(t_\alpha - \tau, \mathbf{x}_i) d\tau$; \mathbf{r}^α — вектор реакций в связях в момент времени t_α ; Δ_α — вектор зазоров в связях в момент времени t_α ; D — диагональная матрица, элементами которой являются параметры d_i ; \mathbf{w}_0^α — решение однородного уравнения (10) в точках контакта упругой системы со связями в момент времени t_α ; \mathbf{w}_p^α — решение неоднородного уравнения (12) в точках контакта упругой системы со связями в момент времени t_α ; $\boldsymbol{\lambda}^\alpha$ — вектор местных неинерционных перемещений в точках контакта упругого тела и односторонних связей в момент времени t_α ; $\widehat{\mathbf{w}}_0^\alpha$ — вектор решений однородных уравнений (11) в точках контакта односторонних связей и упругого тела в момент времени t_α ; $S^{\alpha\beta}$ — диагональные матрицы, элементы которых определяются по формуле $S_{ii}^{\alpha\beta} = \int_0^{t_\alpha} f_\beta(\tau) \widehat{\Phi}_{wi}(t_\alpha - \tau, \mathbf{x}_i) d\tau$.

Система (15) разрешима относительно векторов реакций \mathbf{r}^α и зазоров Δ^α , если известны векторы реакций \mathbf{r}^β ($\beta = 0, 1, \dots, \alpha - 1$). Поэтому векторы \mathbf{r}^α и Δ^α определяются последовательно для $\alpha = 1, 2, \dots, m$. Векторы реакций и зазоров \mathbf{r}^0 и Δ^0 определяются из статического расчета в начальный момент времени. Метод решения системы (15) излагается в [3].

Рассмотрим случай, когда односторонние связи являются стержнями с закругленными концами (рис. 1). Колебания таких односторонних связей описываются волновым уравнением

$$\widehat{m}_i \frac{\partial^2 \widehat{w}_i}{\partial t^2} + 2\widehat{n}_i \widehat{m}_i \frac{\partial \widehat{w}_i}{\partial t} - \widehat{E}_i \widehat{S}_i \frac{\partial^2 \widehat{w}_i}{\partial x^2} = F_i(x, t), \quad (16)$$

где $\widehat{m}_i, \widehat{n}_i, \widehat{S}_i, \widehat{E}_i$ — погонная масса, относительный коэффициент затухания, площадь поперечного сечения и модуль упругости i -ой односторонней связи, $F_i(x, t)$ — внешняя сила.

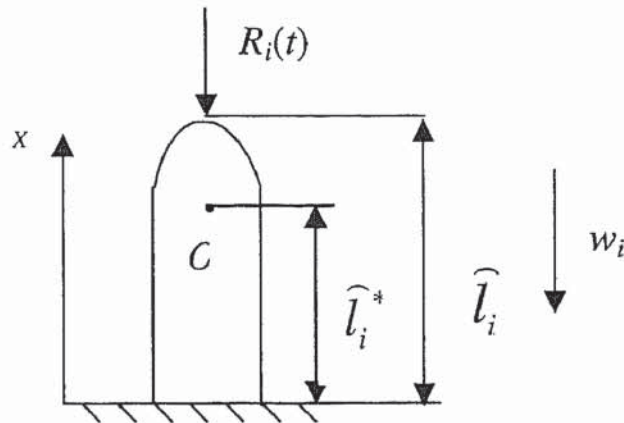


Рис. 1. Инерционная односторонняя связь в виде стержня

Решение однородного уравнения (16) ($F_i(x, t) = 0$) имеет вид (для случая $\omega_{ki} > \widehat{n}_i$)

$$\widehat{w}_{0i}(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \widehat{W}_{ki}(x) (A_{ki} e^{-\widehat{n}_i t} \cos(b_{ki} t) + B_{ki} e^{-\widehat{n}_i t} \sin(b_{ki} t)), \quad (17)$$

где $\widehat{W}_{ki}(x) = \frac{1}{\sqrt{0,5 \widehat{l}_i \widehat{m}_i}} \sin(\pi \frac{2k-1}{2 \widehat{l}_i} x)$ — собственные, нормированные по кинетической энергии

формы колебаний i -го стержня без трения; $b_{ki} = \sqrt{(\omega_{ki})^2 - (\widehat{n}_i)^2}$; $\omega_{ki} = \sqrt{\frac{\widehat{E}_i \widehat{S}_i}{\widehat{m}_i} \frac{2k-1}{2 \widehat{l}_i}} \pi$ —

собственные частоты колебаний i -го стержня; \widehat{l}_i — длина i -го стержня; A_{ki}, B_{ki} — константы, зависящие от начальных условий движения связей.

Решение неоднородного уравнения (16) $\widehat{w}_{Ri}(t)$ от реакции приложенной на свободном конце стержня ($F_i(x, t) = \delta(x - \widehat{l}_i) R_i(t)$) определяется выражением

$$\widehat{w}_{Ri}(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \widehat{W}_{ki}(x) \widehat{W}_{ki}(\widehat{l}_i) \int_0^t \widehat{G}_{ki}(t - \tau) R_i(\tau) d\tau, \quad (18)$$

где $\widehat{G}_{ki}(t) = b_{ki}^{-1} e^{-\widehat{n}_i(t-\tau)} \sin(b_{ki}(t-\tau))$.

При сжатии стержня перемещение его свободного конца обусловлено как местным сжатием, так и сжатием стержня по закону Гука. Поэтому необходимо знать, деформацию каких сечений следует принимать за местное сжатие.

На оси стержня (рис. 1) возьмем точку O , отстоящую от места контакта на расстоянии $\widehat{l}_i - \widehat{l}_i^*$. Пусть сечения с координатой $x < \widehat{l}_i^*$ деформируются по закону Гука, а сечения с $x > \widehat{l}_i^*$ перемещаются по теории Герца. Согласно теории Сирса [4]

$$\widehat{l}_i - \widehat{l}_i^* = 2,50 \sqrt{\frac{\widehat{S}_i}{\pi}}. \quad (19)$$

Таким образом, полное перемещение i -ой односторонней связи в точке контакта определяется по формуле

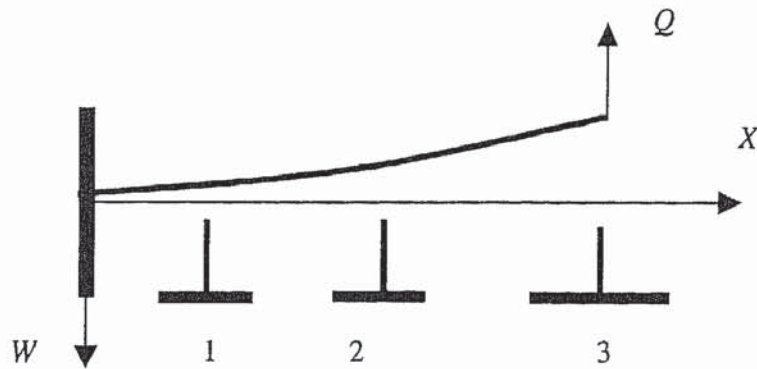


Рис. 2. Расчетная схема тестовой задачи

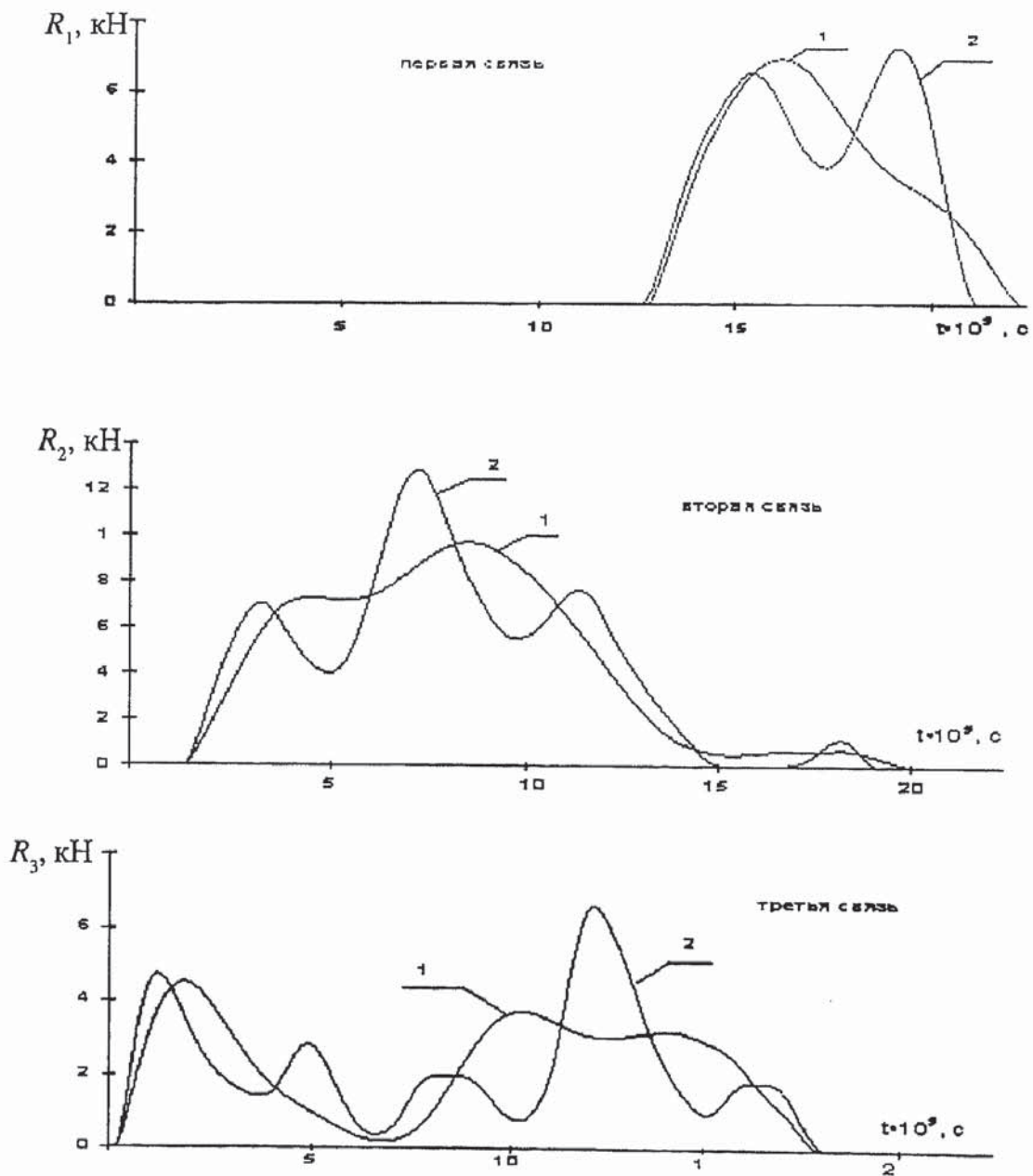


Рис. 3. Реакции в односторонних связях при первом ударе балки о связи: 1 — расчет с неинерционными связями; 2 — расчет с инерционными связями

$$\delta_i = \lambda_i(t) + \widehat{w}_{0i}(\widehat{l}_i^*, t) + \widehat{w}_{Ri}(\widehat{l}_i^*, t), \quad (20)$$

где $\lambda_i(t) = k_i R_i(t)^{\frac{2}{3}}$, $k_i = \left(\frac{3(1-\mu^2)}{2E_i \sqrt{r_i}} \right)^{\frac{2}{3}}$, r_i — радиус сферической поверхности свободного конца стержня, μ — коэффициент Пуассона.

Коэффициенты диагональных матриц $S^{\alpha\beta}$ определяются по формуле

$$S_{ii}^{\alpha\beta} = \sum_{k=1}^{\infty} \widehat{W}_{ki}(\widehat{l}_i^*) \widehat{W}_{ki}(\widehat{l}_i^*) \int_0^{t_\alpha} \widehat{G}_{ki}(t_\alpha - \tau) f_\beta(\tau) d\tau. \quad (21)$$

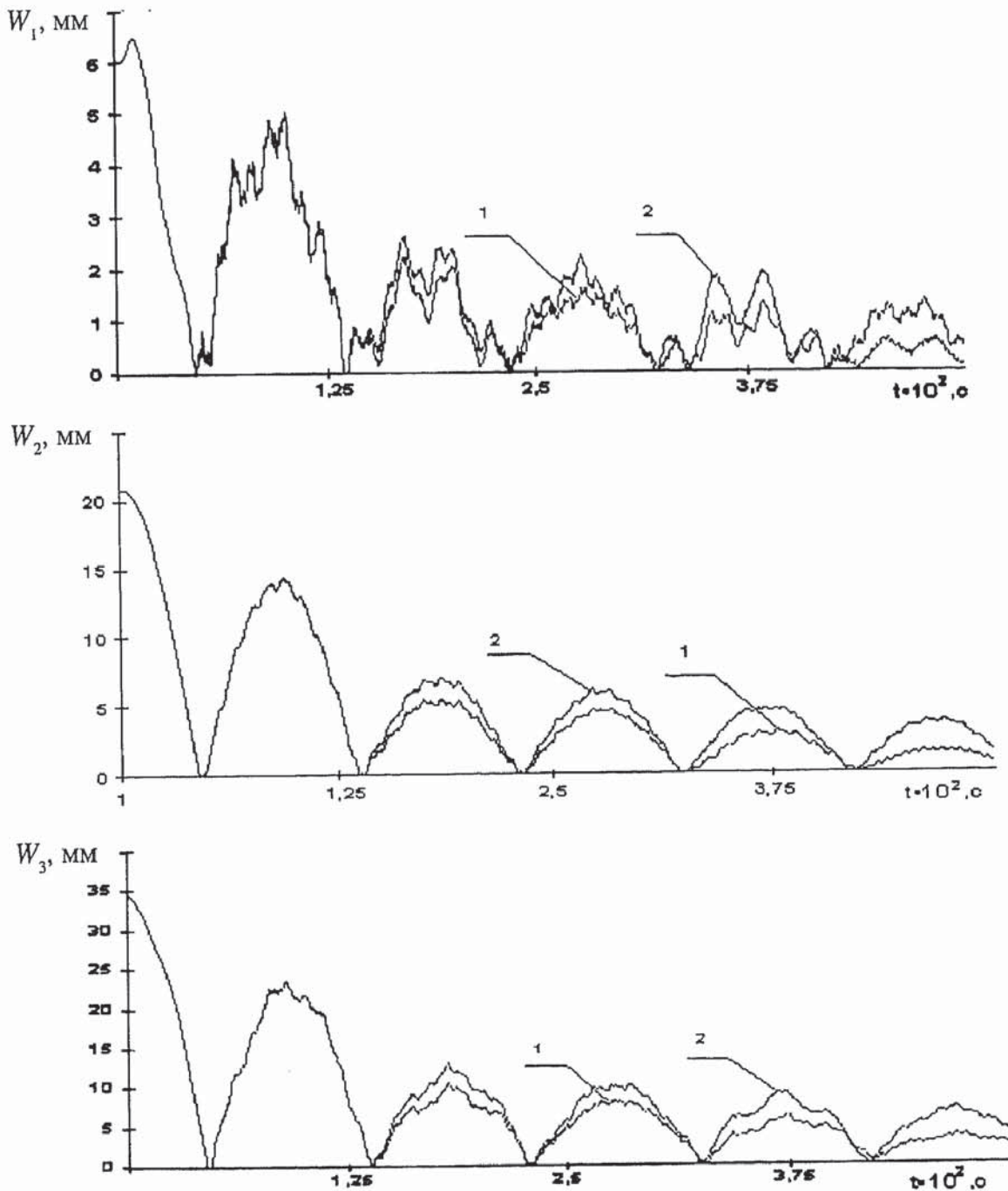


Рис. 4. Перемещения точек балки над односторонними связями W_1, W_2, W_3 : 1 — расчет с неинерционными связями; 2 — расчет с инерционными связями

На рис. 3, 4 представлены результаты расчета свободных колебаний балки с тремя односторонними связями (рис. 2). Односторонние связи выполнены в виде круглого стального стержня с закругленным концом (рис 1). Балка имеет консольное закрепление. Параметры системы: изгибная жесткость балки $EI = 41,7 \text{ Н} \cdot \text{м}^2$; длина балки $l = 0,27 \text{ м}$; погонная масса балки $M_p = 0,785 \frac{\text{кг}}{\text{м}}$; радиус поверхности связи $r = 5 \text{ мм}$; диаметр односторонних связей $d = 8 \text{ мм}$; длина односторонних связей $\bar{l} = 0,1 \text{ м}$; координаты связей $x_1 = 0,1 \text{ м}$, $x_2 = 0,2 \text{ м}$, $x_3 = 0,27 \text{ м}$; зазоры между недеформированной балкой и связями $\Delta_1^0 = 0,1 \text{ мкм}$, $\Delta_2^0 = 10 \text{ мкм}$, $\Delta_3^0 = 10 \text{ мм}$. Начальная деформация балки создавалась силой $Q = 212 \text{ Н}$, приложенной к свободному концу балки. Уравнение колебаний балки с учетом внутреннего трения рассматривается в [3]. Внутреннее трение в односторонних связях не учитывается ($\hat{n}_i = 0$).

Если длина односторонних связей $\bar{l} < 0,04 \text{ м}$, то расчеты с учетом и без учета инерции связей, отличаются незначительно.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Полянин А. Д. Справочник по линейным уравнениям математической физики. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2001. — 576 с.
2. Марчук Г. И. Методы вычислительной математики: Учеб. Пособие. — 3-е изд., перераб. и под. — М.: Наука, 1989. — 608 с.
3. Люминарский И. Е. Динамика упругих систем с односторонними связями большой жесткости // Естественные и технические науки, 2003. — № 2. — С. 11—21.
4. Зегжда С. А. Соударение упругих тел. — СПб: Изд-во Санкт-Петербургского ун-та. — 1997. — 316 с.

531.8

РАСЧЕТ ВЕЛИЧИНЫ КРИТИЧЕСКОГО КРУТЯЩЕГО МОМЕНТА ИЗОГНУТОЙ В ПОЛУОКРУЖНОСТЬ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ПРУЖИНЫ

Асп. Р.Н. БАДИКОВ, д-р техн. наук, проф. Ф.Д. СОРОКИН

С использованием решения, полученного с помощью уравнений механики стержней, находится приближенное выражение для величины критического крутящего момента цилиндрической пружины, изогнутой в полуокружность.

The theory of a thin elastic rod was used for screw cylindrical spring which bent in a half of circle to find an approximate equation for a value of the critical torsion moment.

Для целей просеивания и измельчения сухого сыпучего материала применяются так называемые «спиральные грохоты». Это установки, рабочим органом которых являются цилиндрические пружины, вращающиеся вокруг собственной продольно оси и просеивающие рабочий сыпучий материал сквозь зазоры между витками, а также дробящие крупные фракции рабочего сыпучего материала (захватываемые вследствие изменения межвиткового расстояния, обусловленного изгибом пружины). Цилиндрические пружины в подобных установках, как правило, изогнуты в дугу окружности. К одному концу пружины приложен крутящий момент от двигателя, в то время как другой конец пружины