Расчет и конструирование машин

УДК 539.4

Анализ траекторий недифференцируемых случайных процессов

А.С. Гусев, С.О. Найденов

МГТУ им. Н.Э. Баумана, 105005, Москва, Российская Федерация, 2-я Бауманская ул., д. 5, стр. 1.

Analysis of the trajectories of non-differentiable random processes

A.S. Gusev, S.O. Naydenov

Bauman Moscow State Technical University, building 1, 2-nd Baumanskaya str., 5, 105005, Moscow, Russian Federation.

e-mail: sergeyn15@gmail.com

В настоящее время все большее применение в технике получают расчеты, основанные на анализе случайных процессов, протекающих в различных механических системах. Это особенно актуально при анализе поведения таких систем во времени. Рассмотрены задачи анализа траекторий дифференцируемых и недифференцируемых случайных процессов. Проанализированы траектории дифференцируемых и недифференцируемых случайных процессов. В задачу такого анализа входит определение ожидаемого числа нулей, экстремумов, точек перегиба траектории, распределение вероятностей максимумов и абсолютных максимумов случайных процессов. Спектральные плотности недифференцируемых случайных процессов представлены в виде произведения двух комплексно-сопряженных функций (квазиспектров), из которых исключены белые шумы. Это позволяет для процессов с простой структурой решить все поставленные задачи. Для процессов со сложной структурой, возникающих в системах с двумя и более степенями свободы, спектры стилизуются в виде дельта-функций на собственных частотах этих процессов. Получены простые формулы для определения всех параметров траекторий. В качестве примера рассмотрена балка, нагруженная кинематическими воздействиями в виде белых шумов.

Ключевые слова: траектории, экстремум, максимум, случайный процесс, белый шум, спектр.

The calculations based on the analysis of random processes in mechanical systems are currently being increasingly used. This is especially true when the behavior of such systems is analyzed over time. The article deals with the analysis of the trajectories of differentiable and non-differentiable random processes. The objective of this analysis is to define the expected number of zeros, extrema, inflection points of the trajectory, and the probability distribution of the maxima and absolute maxima of random processes. The spectral densities of non-differentiable random processes are represented as a product of two complex conjugate functions (quasi-spectra), with white noises being excluded. This makes it possible to solve all problems stated for simple processes. The spectra of complex processes running in systems with two or more degrees of freedom are represented in the form of delta-functions of their natural frequencies. Simple formulas are obtained for determining the parameters of the trajectories. A beam loaded by white noise forces is considered as an example.

Keywords: path, extremum, maximum, random process, white noise, spectrum.

При решении ряда задач статистической динамики механических систем и расчетном прогнозировании их надежности часто необходимо рассматривать формально недифференцируемые случайные процессы, структурный анализ которых очень сложен [1, 2]. При этом требуется определить частоты процесса по нулям, экстремумам, точкам перегиба траектории, распределения, для максимумов, абсолютных максимумов и т. п. [3]. Так, для случайного стационарного процесса $x(t)$ часто требуется вычислить выражения

$$\omega_0 = \frac{s_{\dot{x}}}{s_x}; \;\; \omega_э = \frac{s_{\ddot{x}}}{s_{\dot{x}}}; \;\; \omega_п = \frac{s_{\dddot{x}}}{s_{\ddot{x}}};$$

$$f_м(x) \approx \frac{x}{k}\exp\left(-\frac{x^2}{2s_x^2}\right)\pi;$$

$$P\left\{x(\tau) < x_*,\ \tau \in (0,t)\right\} = \exp\left\{-\frac{t\omega_0}{2\pi}\exp\left(-\frac{x_*^2}{2s_x^2}\right)\right\},$$

где ω_0, $\omega_э$, $\omega_п$ — частоты по нулям, экстремумам и точкам перегиба траектории соответственно; s_x^2, $s_{\dot{x}}^2$, $s_{\ddot{x}}^2$ — дисперсии процесса $x(t)$ и его первых двух производных соответственно; k — параметр сложности структуры процесса $x(t)$, $k = \omega_э/\omega_0$; x_* — предельно допустимое значение случайного процесса $x(t)$; P — вероятность; t — время функционирования системы.

Использование приведенных выше и подобных формул предполагает дифференцируемость случайных процессов, однако у ряда систем процессы оказываются недифференцируемыми.

Для простейшей системы, описываемой уравнением

$$\dot{x} + \alpha x = f(t)$$

(где $f(t)$ — белый шум с интенсивностью k_0; α — параметр), корреляционная функция и спектральная плотность процесса на выходе $x(t)$ имеют следующий вид:

$$K_x(\tau) = \frac{k_0}{2\alpha}\mathrm{e}^{-\alpha|\tau|};$$

$$S_x(\omega) = \frac{k_0}{2\pi}\frac{1}{\alpha^2 + \omega^2}.$$

Выходной процесс $x(t)$ непрерывен, но недифференцируемый. Спектральная плотность первой производной этого процесса

$$S_{\dot{x}}(\omega) = \omega^2 S_x(\omega), \tag{1}$$

дисперсия

$$s_{\dot{x}}^2 = \int_{-\infty}^{\infty} S_{\dot{x}}(\omega)d\omega \to \infty.$$

Для этой функции не существует и производных более высокого порядка.

Представим спектральную плотность процесса $\dot{x}(t)$ в виде произведения двух комплексно сопряженных функций (квазиспектров) [3]:

$$S_{\dot{x}}(\omega) = \frac{k_0}{2\pi}\mathrm{F}_{\dot{x}}(\omega)\,\mathrm{F}_{\dot{x}}^*(\omega).$$

Здесь

$$\mathrm{F}_{\dot{x}}(\omega) = \frac{i\omega}{\alpha + i\omega}; \quad \mathrm{F}_{\dot{x}}^*(\omega) = \frac{-i\omega}{\alpha - i\omega}.$$

Верхним индексом «$*$» обозначен переход к комплексно сопряженным функциям.

Из квазиспектров исключим белые шумы и заменим их на сглаженные спектры, определяемые по следующим формулам:

$$\mathrm{F}_{\tilde{x}}(\omega) = \mathrm{F}_{\dot{x}}(\omega) - \lim_{\omega\to\infty}\mathrm{F}_{\dot{x}}(\omega) = \frac{i\omega}{\alpha + i\omega} - 1 = -\frac{\alpha}{\alpha + i\omega};$$

$$\mathrm{F}_{\tilde{x}}^*(\omega) = \mathrm{F}_{\dot{x}}^*(\omega) - \lim_{\omega\to\infty}\mathrm{F}_{\dot{x}}^*(\omega) = \frac{-i\omega}{\alpha - i\omega} - 1 = -\frac{\alpha}{\alpha - i\omega}.$$

Спектральная плотность сглаженного процесса имеет вид

$$\tilde{S}_{\dot{x}}(\omega) = \frac{k_0}{2\pi}\mathrm{F}_{\tilde{x}}(\omega)\mathrm{F}_{\tilde{x}}(\omega) = \frac{k_0}{2\pi}\frac{\alpha^2}{\alpha^2 + \omega^2}.$$

Дисперсия процесса $\dot{x}(t)$

$$s_{\dot{x}}^2 = \alpha^2 s_x^2.$$

Повторив описанную выше процедуру, получим

$$s_{\ddot{x}}^2 = \alpha^2 s_{\dot{x}}^2; \quad s_{\dddot{x}}^2 = \alpha^2 s_{\ddot{x}}; \quad \omega_0 = \omega_э = \omega_п = \alpha; \quad k = 1.$$

Таким образом, процесс, формируемый в рассматриваемой системе с белым шумом на входе, можно считать процессом с простой структурой и дифференцируемым неограниченное число раз [2, 4].

Рассмотрим динамическую систему, функционирование которой описывается уравнением

$$\ddot{x} + 2n\dot{x} + \omega_0^2 x = f(t), \tag{2}$$

где $f(t)$ — белый шум с интенсивностью k_0; n — коэффициент демпфирования; ω_0 — частота свободных колебаний.

Процесс $x(t)$, формируемый в системе (2), дифференцируемый 1 раз имеет дисперсию

$$s_x^2 = \frac{k_0}{4n\omega_0^2}$$

и частоту ω_0.

Для первой производной этого процесса корреляционная функция

$$K_{\dot{x}}(\tau) = s_{\dot{x}}^2 \,\mathrm{e}^{-n|\tau|}\left(\cos\omega_n\tau - \frac{n}{\omega_n}\sin\omega_n|\tau|\right),$$

спектральная плотность

$$S_{\dot{x}}(\omega) = \frac{k_0}{2\pi}\frac{\omega^2}{(\omega^2-\omega_0^2)^2+4n^2\omega^2}$$

при $s_{\dot{x}}^2 = \omega_0^2 s_x^2$, $\omega_n^2 = \omega_0^2 - n^2$.

Процесс $\dot{x}(t)$ непрерывен, но недифференцируем. Спектральную плотность производной этого процесса можно представить в виде

$$S_{\ddot{x}}(\omega) = \omega^2 S_{\dot{x}}(\omega) = \frac{k_0}{2\pi}\,\mathrm{F}_1(\omega)\,\mathrm{F}_2(\omega), \qquad (3)$$

где

$$\mathrm{F}_{1,2}(\omega) = \frac{\omega^2}{\omega^2-\omega_0^2 \pm 2in\omega} \text{ при } \lim_{\omega\to\infty}\mathrm{F}_{1,2}(\omega) = 1.$$

Квазиспектры в (3) заменим на выражение

$$\mathrm{F}_{1,2}(\omega) = \mathrm{F}_{1,2}(\omega) - \lim_{\omega\to\infty}\mathrm{F}_{1,2}(\omega) = \frac{\omega_0^2 \mp 2ni\omega}{\omega^2-\omega_0^2 \pm 2ni\omega}.$$

Отсюда получим сглаженную спектральную плотность второй производной

$$\tilde{S}_{\ddot{x}}(\omega) = \frac{k_0}{2\pi}\frac{\omega_0^4+4n^2\omega^2}{(\omega^2-\omega_0^2)^2+4n^2\omega^2}.$$

Дисперсия процесса с такой спектральной плотностью существует и рассчитывается по формуле

$$\tilde{s}_{\ddot{x}}^2 = \int_{-\infty}^{\infty}\tilde{S}_{\ddot{x}}(\omega)d\omega = \omega_0^2(\omega_0^2+2n^2)s_x^2.$$

Частота процесса $x(t)$ по экстремумам, равная частоте процесса $\dot{x}(t)$ по нулям, определяется по формуле

$$\omega_э = \sqrt{\omega_0^2+4n^2}.$$

Параметр сложности структуры процесса $x(t)$ при малом n

$$k = \frac{\omega_э}{\omega_0} = \frac{1}{\omega_0}\sqrt{\omega_0^2+4n^2}$$

близок к единице.

Сформированный процесс $\ddot{x}(t)$ оказывается также непрерывным, но недифференцируемым. Спектральную плотность его производной $\dddot{x}(t)$ можно представить в виде

$$S_{\dddot{x}}(\omega) = \omega^2\tilde{S}_{\ddot{x}}(\omega) = \frac{k_0}{2\pi}\,\mathrm{F}_1(\omega)\,\mathrm{F}_2(\omega),$$

где

$$\mathrm{F}_{1,2}(\omega) = \frac{2n\omega^2 \pm i\omega\omega_0^2}{\omega^2-\omega_0^2 \mp 2ni\omega}, \quad \lim_{\omega\to\infty}\mathrm{F}_{1,2}(\omega) = 2n.$$

Заменим квазиспектры выражениями

$$\mathrm{F}_{1,2}(\omega) = \mathrm{F}_{1,2}(\omega) - \lim_{\omega\to\infty}\mathrm{F}_{1,2}(\omega) = \frac{2n\omega_0^2 \pm i\omega(\omega_0^2+4n^2)}{\omega^2-\omega_0^2 \pm 2ni\omega}.$$

Отсюда для сглаженного процесса получим спектральную плотность

$$\tilde{S}_{\dddot{x}}(\omega) = \frac{k_0}{2\pi}\frac{4n^2\omega_0^4+\omega^2(\omega_0^2+4n^2)^2}{(\omega^2-\omega_0^2)^2+4n^2\omega^2}.$$

Дисперсия процесса $\dddot{x}(t)$

$$\tilde{s}_{\dddot{x}}^2 = \int_{-\infty}^{\infty} S_{\dddot{x}}(\omega)d\omega = \omega_0^2 S_x^2(\omega_0^4+12\omega_0^2n^2+16n^4).$$

Частота процесса $x(t)$ по точкам перегиба траектории, равная частоте процесса $\ddot{x}(t)$ по нулям,

$$\omega_п = \frac{s_{\dddot{x}}}{s_{\ddot{x}}} = \sqrt{\frac{\omega_0^4+12\omega_0^2n^2+16n^4}{\omega_0^2+4n^2}} > \omega_э > \omega_0,$$

т. е. процесс, сформированный в рассматриваемой системе при белом шуме на входе, также можно считать процессом с простой структурой и с эффективной частотой, примерно равной частоте собственных колебаний системы ω_0. Существенного усложнения структуры формируемого в рассматриваемой системе процесса не произойдет, если вместо белого шума воздействие на систему будет описываться неравномерными по частоте многомодальными спектральными плотностями $S(\omega)$. Также процессы в системах с хорошими фильтрующими свойствами на частоте ω_0 при ориентировочных расчетах можно заменять на белые шумы с эквивалентными интенсивностями $k_0 = 2\pi S(\omega_0)$ [3, 5, 6].

Процессы со сложной структурой (при параметрах сложности $k \gg 1$) формируются в системах с двумя и более степенями свободы [4, 5]. В таких системах спектральные плотности формируемых случайных процессов имеют характерные максимумы на частотах собственных колебаний ω_1, ω_2 (рис. 1).

Для нахождения обозримых качественных

Рис. 1. Спектральная плотность с двумя характерными максимумами

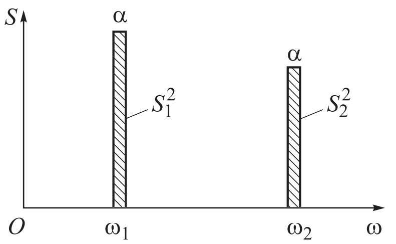


Рис. 2. Стилизованные спектральные плотности в виде двух дельта-функций

результатов анализа структуры таких процессов вначале рассмотрим стилизованные спектры в виде двух импульсных дельта-функций $S_1(\omega)=s_1^2\delta(\omega-\omega_1)$ и $S_2(\omega)=s_2^2\delta(\omega-\omega_1)$ с дисперсиями s_1^2 и s_2^2 (рис. 2). Такие спектры получаются в результате предельного перехода от спектров, имеющих два характерных максимума. Для этого случая после несложных вычислений имеем:

$$\omega_0^2=\frac{\omega_1^2 s_1^2+\omega_2^2 s_2^2}{s_1^2+s_2^2};$$

$$\omega_э^2=\frac{\omega_1^4 s_1^2+\omega_2^4 s_2^2}{\omega_1^2 s_1^2+\omega_2^2 s_2^2};$$

$$\omega_п^2=\frac{\omega_1^6 s_1^2+\omega_2^6 s_2^2}{\omega_1^4 s_1^2+\omega_2^4 s_2^2};$$

$$k^2=\frac{(1+\alpha)(\alpha+\beta^2)}{(\alpha+\beta)^2},$$

где $\alpha=s_1^2/s_2^2$; $\beta=\omega_2^2/\omega_1^2$.

При $\alpha=\beta$ параметр сложности структуры достигает максимального значения

$$k_{\max}=\frac{1+\alpha}{2\sqrt{\alpha}}.$$

Зависимости $k_{\max}=f_1(\alpha)$ и $k^2=f_2(\alpha)$ при различных значениях β представлены на рис. 3.

Таким образом, в многомерных системах могут возникать случайные процессы с весьма большой сложностью структуры.

Для примера рассмотрим балку на двух шарнирных опорах, подвергаемую кинетическим воздействиям с ускорением $f(t)$ в виде белого шума с интенсивностью k_0. Перемещение в середине пролета определяется выражением

$$x(t)=\sum_{k=1}^{n}x_k(t),$$

где для каждой k-й формы колебаний функция $x_k(t)$ находится из решения уравнения

$$\ddot{x}_k+2n_k\dot{x}_k+\omega_{0k}^2x_k=f_k(t)=\eta_k f(t).$$

Здесь η_k — коэффициент вовлечения k-й формы колебаний в общий колебательный процесс; n — число форм колебаний, учитываемых в расчете.

Согласно (1)

$$\eta_1=1{,}27;\quad \eta_3=0{,}42;\quad \eta_5=0{,}25;\ \ldots;$$

$$\eta_2=\eta_4=\ldots=0.$$

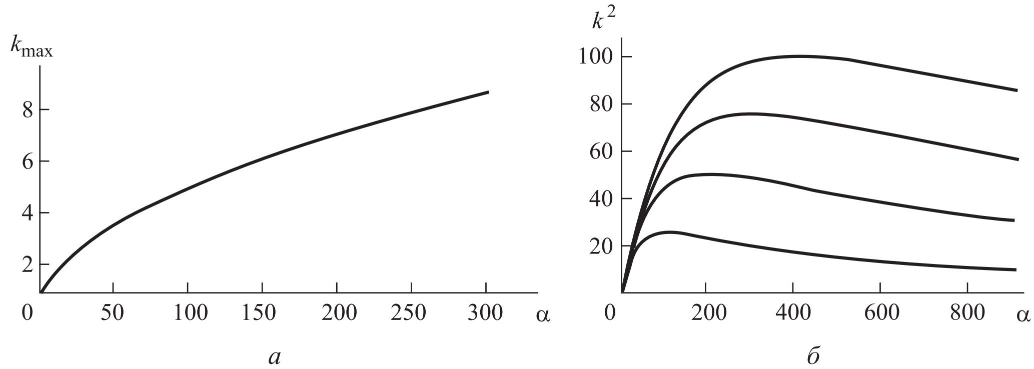
Отсюда следует, что процесс $x(t)$ имеет многомодальную спектральную плотность и сложную структуру, состоящую из нечетных форм колебаний. Четные формы в колебательный процесс не вовлекаются.

В соответствии с описанной выше процедурой анализа недифференцируемых функций дисперсия процесса $x(t)$ и дисперсии его первых двух производных определяются по следующим формулам:

$$s_x^2=\sum_{k=1}^{n}s_{x_k}^2;\ \ s_{\dot{x}}^2=\sum_{k=1}^{n}s_{\dot{x}_k}^2;\ \ s_{\ddot{x}}^2=\sum_{k=1}^{n}s_{\ddot{x}_k}^2,$$

где

$$s_{x_k}^2=\frac{\eta_k k_0}{4n_k\omega_0^2};\ \ s_{\dot{x}_k}^2=\omega_0^2 s_{x_k}^2;\ \ s_{\ddot{x}_k}^2=\omega_0^2(\omega_0^2+4n^2)s_{x_k}^2.$$



а *б*

Рис. 3. Зависимость:

а — $k_{\max}=f_1(\alpha)$; *б* — $k^2=f_2(\alpha)$

Таким образом, получены все необходимые данные для расчета рассматриваемой динамической системы на надежность. Методы приведения смоделированных выше процессов со сложной структурой к процессам с простой структурой, необходимые для расчетного прогнозирования ресурса конструкций по критериям усталости и трещиностойкости, рассмотрены в работах [5, 7, 8].

Возникающие на практике трудности, обусловленные необходимостью рассматривать формально недифференцируемые случайные процессы, могут быть сняты примененной здесь процедурой сглаживания траекторий, рассмотрены в работе [9].

Выводы

1. Разработана процедура, позволяющая получать сглаженные траектории процессов со сложной структурой.

2. Проверена возможность практического использования предложенной методики для получения численных значений характеристик исследуемого процесса со сложной структурой.

3. На основе численного исследования параметра сложности случайного процесса в механической системе установлена зависимость от соотношения собственных частот системы и дисперсий возбуждающих воздействий.

Литература

[1] Болотин В.В., ред. *Вибрации в технике. Справочник. Т. 1: Колебания линейных систем*. Москва, Машиностроение, 1999. 504 с.
[2] Купер Дж., Макгиллем К. *Вероятностные методы анализа сигналов и систем*. Москва, Мир, 1989. 301 с.
[3] Болотин В.В. *Случайные колебания упругих систем*. Москва, Наука, 1979. 335 с.
[4] Li W., Qi-Man Shao. Stochastic Processes: Theory and Methods. *Handbook of statistics*, 2001, vol. 19, pp. 533–598.
[5] Гусев А.С. *Сопротивление усталости и живучесть конструкций при случайных нагрузках*. Москва, Машиностроение, 1989. 245 с.
[6] Ayache A., Linde W. Approximation of Gaussian random fields: General results and optimal wavelet representation of the Lévy fractional motion. *Journal of Theoretical Probability*, 2008, vol. 21, issue 1, pp. 69–96.
[7] Гусев А.С. *Вероятностные методы в механике машин и конструкций*. Москва, Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2009. 223 с.
[8] Dandekar D.P., Hall C.A., Chhabildas L.C., Reinhart W.D. Shock response of a glass-fiber-reinforced polymer composite. *Composite Structures*, 2003, vol. 61, issue 1–2, pp. 51–59.
[9] Гусев А.С., Карунин А.Л., Крамской Н.А., Стародубцева С.А. *Надежность механических систем и конструкций при случайных воздействиях*. Москва, Изд-во МГТУ МАМИ, 2001. 282 с.

References

[1] *Vibratsii v tekhnike. Spravochnik. T. 1. Kolebaniia lineinykh sistem* [Vibration technology. Handbook. Vol. 1. Oscillations of linear systems]. Ed. Bolotin V.V. Moscow, Mashinostroenie publ., 1999. 504 p.
[2] Kuper Dzh., Makgillem K. *Veroiatnostnye metody analiza signalov i system* [Probabilistic methods for analyzing signals and systems]. Moscow, Mir publ., 1989. 301 p.
[3] Bolotin V.V. *Sluchainye kolebaniia uprugikh system* [Random vibrations of elastic systems]. Moscow, Nauka publ., 1979. 335 p.
[4] Li W., Qi-Man Shao. *Stochastic Processes: Theory and Methods. Handbook of Statistics*, 2001, vol. 19, pp. 533–598.
[5] Gusev A.S. *Soprotivlenie ustalosti i zhivuchest' konstruktsii pri sluchainykh nagruzkakh* [Fatigue resistance and survivability of structures under random loads]. Moscow, Mashinostroenie publ., 1989. 245 p.
[6] Ayache A., Linde W. Approximation of Gaussian random fields: General results and optimal wavelet representation of the Lévy fractional motion. *Journal of Theoretical Probability*, 2008, vol. 21, issue 1, pp. 69–96.

[7] Gusev A.S. *Veroiatnostnye metody v mekhanike mashin i konstruktsii* [Probabilistic methods in the mechanics of machines and structures]. Moscow, Bauman Press, 2009. 223 p.
[8] Dandekar D.P., Hall C.A., Chhabildas L.C., Reinhart W.D. Shock response of a glass-fiber-reinforced polymer composite. *Composite Structures*, 2003, vol. 61, issue 1–2, pp. 51–59.
[9] Gusev A.S., Karunin A.L., Kramskoi N.A., Starodubtseva S.A. *Nadezhnost' mekhanicheskikh sistem i konstruktsii pri sluchainykh vozdeistviiakh* [Reliability of mechanical systems and structures under random actions]. Moscow, MGTU MAMI publ., 2001. 282 p.

Статья поступила в редакцию 20.05.2014

Информация об авторах

ГУСЕВ Александр Сергеевич (Москва) — профессор кафедры «Прикладная механика». МГТУ им. Н.Э. Баумана (105005, Москва, Российская Федерация, 2-я Бауманская ул., д. 5, стр. 1).

НАЙДЕНОВ Сергей Олегович (Москва) — кандидат технических наук, доцент кафедры «Прикладная механика». МГТУ им. Н.Э. Баумана (105005, Москва, Российская Федерация, 2-я Бауманская ул., д. 5, стр. 1, e-mail: sergeyn15@gmail.com).

Information about the authors

GUSEV Aleksandr Sergeevich (Moscow) — Professor of «Applied Mechanics» Department. Bauman Moscow State Technical University (BMSTU, building 1, 2-nd Baumanskaya str., 5, 105005, Moscow, Russian Federation).

NAYDENOV Sergey Olegovich (Moscow) — Cand. Sc. (Eng.), Associate Professor of «Applied Mechanics» Department. Bauman Moscow State Technical University (BMSTU, building 1, 2-nd Baumanskaya str., 5, 105005, Moscow, Russian Federation, e-mail: sergeyn15@gmail.com).