

УДК 621.833.6

Вычисление радиального смещения осей винта и ролика и положения точки контакта резьбы винта и ролика в планетарном ролико-винтовом механизме

О.А. Ряховский, Ф.Д. Сорокин, П.А. Соколов

Получены аналитические зависимости, позволяющие вычислить положение точек начального контакта резьбы винта и ролика, а также увеличение межосевого расстояния роликов и винта, вызванного различием углов подъема резьбы винта и роликов в планетарном ролико-винтовом механизме. Учет изменения межосевого расстояния позволит конструировать работоспособные механизмы.

Ключевые слова: планетарный ролико-винтовой механизм, резьбовые ролики, передача винт-гайка качения, осевая жесткость, износ резьбы.

The analytic dependencies permitting to calculate a position of initial contact points of the screw and roller thread as well as an increase in the screw and roller axle base caused by difference of lead angles of the screw and roller in a planetary screw roller train. Taking an axle base into account will permit to design mechanisms capable of working.

Keywords: planetary roller-screw train, thread rollers, screw-nut gear rolling, axial rigidity, thread wear.

Для преобразования вращательного движения в поступательное и наоборот в настоящее время используют планетарные ролико-винтовые механизмы (ПРВМ), пришедшие на смену паре винт—гайка скольжения, а также шарико-винтовым механизмам.

Как правило ПРВМ (рис. 1) состоит из однозаходных резьбовых роликов 3, многозаходных винта 1 и гайки 2, двух сепараторов 5, в отверстиях которых установлены цилиндрические цапфы роликов 3. Сепара-

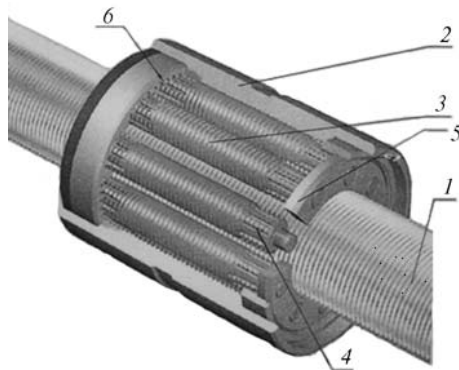


Рис. 1. Планетарный ролико-винтовой механизм



РЯХОВСКИЙ

Олег Анатольевич

доктор технических наук, профессор, зав. кафедрой «Основы конструирования деталей и узлов машин» (МГТУ им. Н.Э. Баумана)



СОРОКИН

Федор Дмитриевич

доктор технических наук, профессор кафедры «Прикладная механика» (МГТУ им. Н.Э. Баумана)



СОКОЛОВ

Павел Александрович

докторант кафедры «Основы конструирования деталей и узлов машин» (МГТУ им. Н.Э. Баумана)

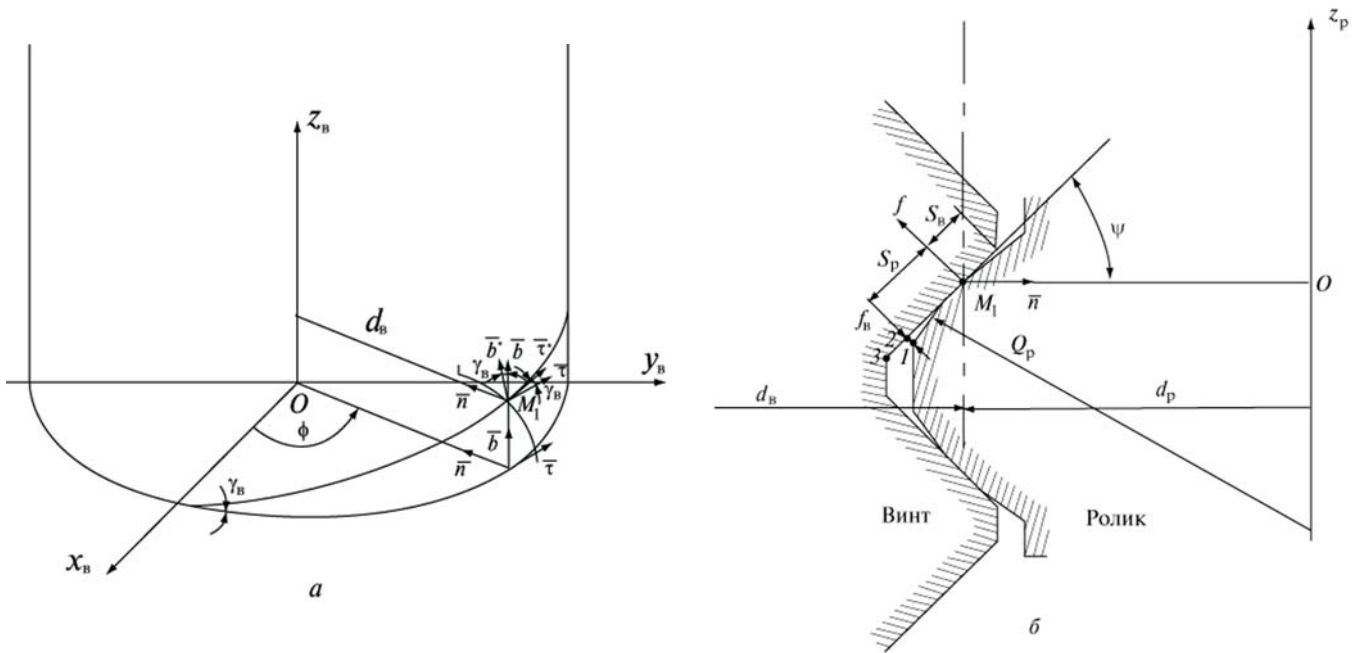


Рис. 2. Формирование геликоидальной поверхности

торы определяют положение роликов в окружном направлении и могут свободно вращаться

относительно винта и гайки. На торцах гайки выполнены зубчатые венцы с внутренним зубом

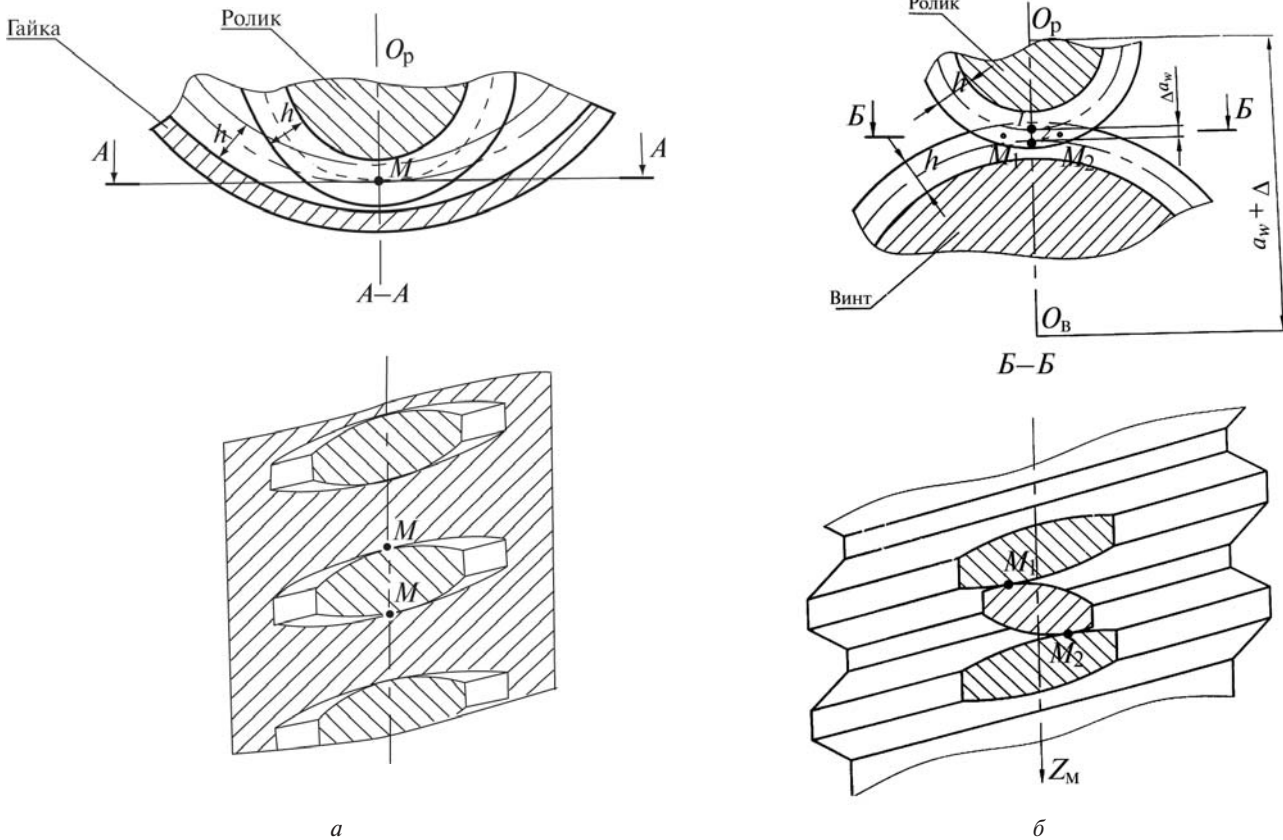


Рис. 3. Характер сопряжения витков резьбы: а — ролика и гайки; б — ролика и винта

б, с которыми зацепляются зубчатые венцы 4, нарезанные на концах резьбовых роликов 3.

Профиль резьбы винта, роликов и гайки отличается от профиля обычных крепежных и ходовых резьб. Резьба винта и гайки в сечении, нормальном к направлению витка резьбы, треугольная с углом профиля при вершине $2\Psi = 90^\circ$. Резьба ролика в таком же сечении очерчена дугами окружностей радиуса ρ с центром, расположенным на оси ролика (рис. 2, б). Это позволяет избежать кромочного контакта витков резьбы винта и гайки с резьбой роликов при наличии ошибок изготовления и деформаций резьбовых деталей механизма под нагрузкой.

При равных углах подъема резьбы гайки и роликов витки резьбы роликов полностью входят во впадины между соседними витками резьбы гайки и касаются резьбы винта в точках M (рис. 3, а). Расстояние между осями гайки и ролика, в этом случае, составляет:

$$a = 0,5(d_r - d_p),$$

где d_r и d_p — средние диаметры резьбы гайки и ролика.

Однако углы подъема резьбы винта и ролика в ПРВМ должны быть различны. Если углы подъема резьбы на среднем диаметре винта γ_v и ролика γ_p будут равны (рис. 4), то при вращении винта ролик будет вращаться, но не будет перемещаться вдоль оси винта.

При различных углах подъема резьбы на среднем диаметре винта и ролика за один оборот винта ролик переместится вдоль оси винта на величину (см. рис. 4).

$$z_p = \pi d_p (\operatorname{tg} \gamma_v - \operatorname{tg} \gamma_p).$$

Углы подъема резьбы γ_v, γ_p зависят от диаметров винта и ролика и заходности резьбы.

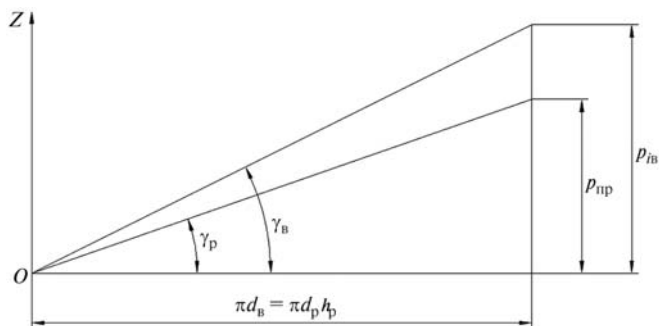


Рис. 4. Углы подъема витков резьбы винта и ролика, перемещение ролика вдоль оси Z

Вследствие различия углов подъема резьбы винта и роликов (рис. 3, б) точками начального контакта витка резьбы ролика с витком резьбы винта будут точки M_1 и M_2 . При этом расстояние между осями винта и ролика увеличится на некоторую величину Δ .

В данной работе получено аналитическое выражение для вычисления величины Δ и смещений точек контакта резьбы винта и ролика M_1 и M_2 в плоскости, нормальной к оси вращения винта и роликов.

Контактирующие поверхности резьбы ролика и винта ПРВМ являются геликоидальными (винтовыми).

По отмеченным выше геометрическим причинам точка контактирования винтовых поверхностей находится вне плоскости, проходящей через оси этих поверхностей. По этим же причинам профиль резьбы ролика не может полностью поместиться во впадине резьбы винта. Вследствие этого расстояние между осями винта и ролика при контакте не равно сумме средних радиусов резьбы винта и ролика, а увеличивается на величину Δ . В работе получено приближенное выражение достаточно высокой точности для вычисления указанной величины расхождения осей.

Задание геликоидальной поверхности

Геликоидальную поверхность можно рассматривать как поверхность, образованную переносом некоторого контура a вдоль оси Z с одновременным вращением вокруг этой оси Z . Геликоидальную поверхность, как и любую другую, можно описать радиус-вектором точки поверхности, зависящим от двух параметров (гауссовых координат)

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(z, s). \quad (1)$$

В качестве гауссовых координат удобно выбрать осевую координату z некоторой точки контура поверхности и дуговую координату s , указывающую положение точки на контуре (см. рис. 2, б). Обычно в качестве координаты s выбирают дугу контура, но возможен и другой выбор, например, расстояние до оси вращения, т. е. радиус или приращение радиуса.

Следует отметить, что положение точек s на образующих контурах винта s_v и ролика s_p отсчитывается от точки M_1 начального контакта

резьб винта и ролика в направлении к наружной части витка резьбы (см. рис. 2, б).

Геликоидальная симметрия поверхности описывается следующим векторно-матричным соотношением:

$$\mathbf{r}(z, s) = (z + z_0)\mathbf{k} + \mathbf{L}(\omega z)\mathbf{a}(s). \quad (2)$$

Здесь \mathbf{k} — орт оси z ; \mathbf{L} — матрица поворота твердого тела вокруг оси z на угол $\varphi = \omega z$ (рис. 2, а); \mathbf{a} — радиус-вектор образующего контура при $z = 0$ (линия контура); z_0 — начальное смещение образующего контура вдоль оси z ; ω — крутка,

$$\omega = 2\pi/(Pi),$$

где P — шаг резьбы; i — заходность резьбы.

Поскольку заходность резьбы винта и ролика различные ($i_b \neq i_p$), то запишем выражения крутки в следующем виде:

для резьбы винта

$$\omega_b = 2\pi/(Pi_b);$$

для резьбы ролика

$$\omega_p = 2\pi/(Pi_p).$$

Для перехода к проекциям достаточно подставить в соотношение (2) выражение матрицы поворота [1]:

для винта

$$\mathbf{L}_b(\omega_b z) = \begin{bmatrix} \cos(\omega_b z) & -\sin(\omega_b z) & 0 \\ \sin(\omega_b z) & \cos(\omega_b z) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad (3a)$$

для ролика

$$\mathbf{L}_p(\omega_p z) = \begin{bmatrix} \cos(\omega_p z) & -\sin(\omega_p z) & 0 \\ \sin(\omega_p z) & \cos(\omega_p z) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad (3б)$$

для радиус-вектора образующего контура

$$\mathbf{a}(s) = \begin{bmatrix} a_x(s) \\ a_y(s) \\ a_z(s) \end{bmatrix}. \quad (4)$$

Проекции радиус-вектора поверхности на декартовы оси соответственно равны

для винта

$$\begin{aligned} r_x(z, s_b) &= a_x(s_b)\cos(\omega_b z) - a_y(s_b)\sin(\omega_b z), \\ r_y(z, s_b) &= a_x(s_b)\sin(\omega_b z) + a_y(s_b)\cos(\omega_b z), \\ r_z(z, s_b) &= (z + z_{0b}) + a_z(s_b); \end{aligned} \quad (5a)$$

для ролика

$$\begin{aligned} r_x(z, s_p) &= a_x(s_p)\cos(\omega_p z) - a_y(s_p)\sin(\omega_p z), \\ r_y(z, s_p) &= a_x(s_p)\sin(\omega_p z) + a_y(s_p)\cos(\omega_p z), \\ r_z(z, s_p) &= (z + z_{0p}) + a_z(s_p). \end{aligned} \quad (5б)$$

При рассмотрении определенной резьбы проекции вектора \mathbf{a} (4) необходимо конкретизировать. Для резьбы винта, образующая которой представляет прямую линию, наклоненную под углом ψ к радиусу, контур задается следующими уравнениями:

$$\begin{cases} a_x(s_b) = d_b / 2 + s_b \cos \psi, \\ a_y(s_b) = -s_b \sin \psi \sin \gamma_b, \\ a_z(s_b) = s_b \sin \psi \cos \gamma_b, \end{cases} \quad (6)$$

где $d_b / 2$ — средний радиус резьбы винта; γ_b — угол подъема резьбы на среднем диаметре резьбы винта, который находится обычным образом.

Образующая поверхности резьбы ролика задается аналогично, но с учетом влияния радиуса закругления ролика ρ_p (рис. 5, б):

$$s_p^2 + (-\rho_p - f_p)^2 = \rho_p^2.$$

Отсюда

$$f_p \approx -\frac{s_p^2}{2\rho_p};$$

$$\begin{cases} a_x(s_p) = d_p / 2 + s_p \cos \psi - s_p^2 \sin \psi / (2\rho_p), \\ a_y(s_p) = (s_p \sin \psi + s_p^2 \cos \psi / (2\rho_p)) \sin \gamma_p, \\ a_z(s_p) = -(s_p \sin \psi + s_p^2 \cos \psi / (2\rho_p)) \cos \gamma_p. \end{cases} \quad (7)$$

В рассматриваемом случае $\psi = 45^\circ$, а положение точек s_b и s_p отсчитывается от точки M_1 , лежащей на среднем радиусе резьбы винта и ролика, в направлении к внешней части резьбы от среднего диаметра (см. рис. 2, б).

Описание координат геликоидальной поверхности в форме (2) является основой для последующего вычисления радиального смещения осей винта и ролика.

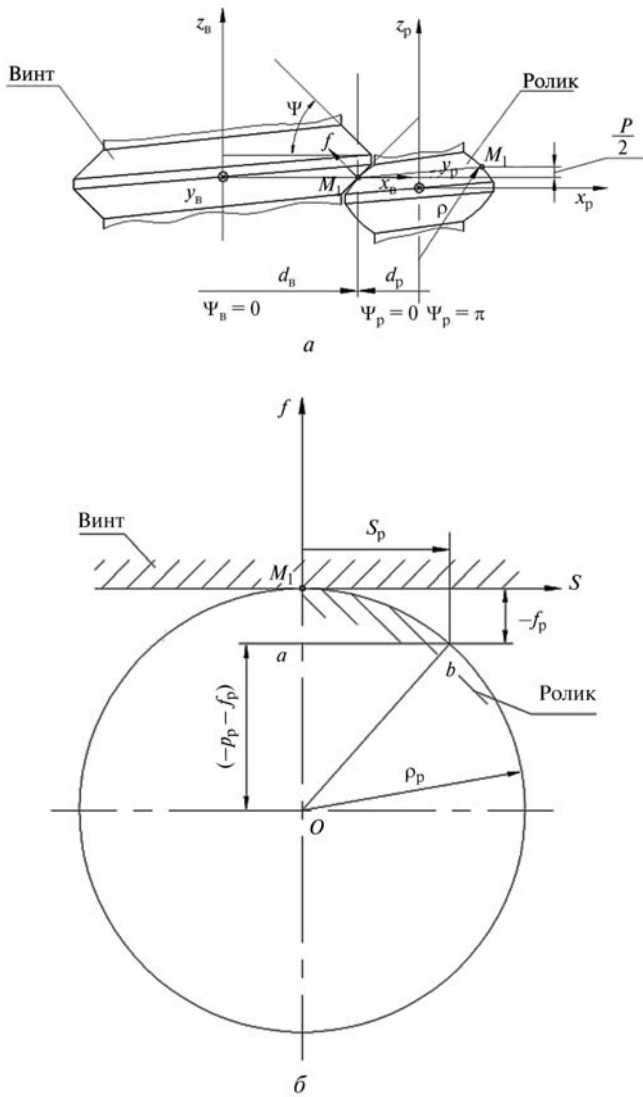


Рис. 5. Геометрия сопряжения витка резьбы винта с роликом (а); схема для учета влияния закругления резьбы ролика (б)

Численный способ расчета радиального смещения осей винта и ролика

Винтовые поверхности удобно рассматривать в глобальной системе координат, одна из осей которой совпадает с продольной осью z . Для рассмотрения контакта поверхностей витков резьбы необходимо вводить дополнительную систему координат, начало которой расположено достаточно близко к предполагаемой точке контакта витков резьбы винта и ролика (рис. 6).

Соответственно необходимы правила для перехода от промежуточной системы координат к глобальной системе координат винта и ролика.

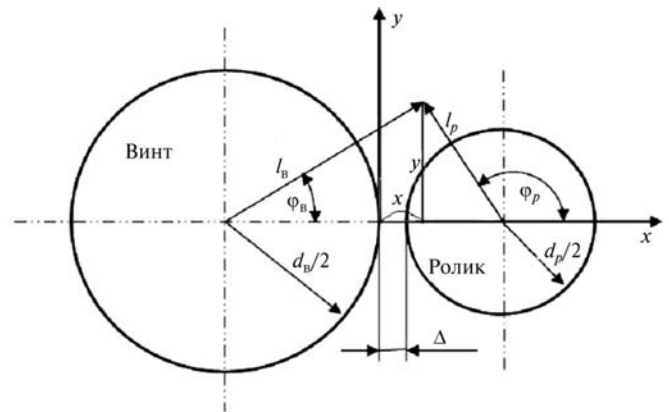


Рис. 6. Расположение глобальных и вспомогательных координатных осей

Для винта полярный угол φ_v и размер радиуса l_v до оси вращения соответственно равны (см. рис. 6):

$$\varphi_v = \arctg \frac{y}{x + d_b / 2}; \quad (8)$$

$$l_v = \sqrt{(x + d_b / 2)^2 + y^2}.$$

По величине полярного угла и радиуса вычисляют локальные координаты поверхности резьбы винта:

$$z_v = \frac{\varphi_v}{\omega_v}; \quad (9)$$

$$s_v = \frac{l_v - d_b / 2}{\cos \psi_v}.$$

Аналогично рассчитывают локальные координаты поверхности резьбы ролика

$$l_p = \sqrt{(x - (d_p / 2 + \Delta))^2 + y^2};$$

$$\varphi_p = \pi - \arcsin \frac{y}{l_p}; \quad (10)$$

$$z_p = \frac{\varphi_p}{\omega_p};$$

$$s_p = \frac{l_p - d_p / 2}{\cos \psi_p}.$$

Таким образом обе поверхности витков резьбы винта и ролика задают с помощью одинаковых глобальных координат x, y . Для изучения условий контактирования поверхностей вычисляют расстояние между поверхностями $f(x, y)$ винта и ролика, измеряемое вдоль оси z (функция зазоров):

$$f(x, y) = r_{z_b}(z_b(x, y), s_b(x, y)) - r_{z_p}(z_p(x, y), s_p(x, y)), \quad (11)$$

где промежуточные величины находят по формулам (5а), (5б), (9), (10).

Рассмотрим винт и ролик со следующими параметрами: $P_{i_b} = 1,6 \text{ мм} \cdot 5 = 8 \text{ мм}$; $d_b/2 = 24 \text{ мм}$; $\rho_b = \infty$ (образующая — прямая линия); $\psi_b = 45^\circ$; $z_{0_b} = 0 \text{ мм}$; $P_{i_p} = 1,6 \text{ мм}$; $d_p/2 = 8 \text{ мм}$; $\rho_p = 11,3 \text{ мм}$ (образующая — часть дуги окружности резьбы ролика); $\psi_p = 45^\circ$; $\Delta = 0,0216 \text{ мм} = 21,6 \text{ мкм}$ — увеличение расстояния между осями винта и ролика (определено численно); $z_{0_p} = -0,8 \text{ мм}$ (смещение поверхности резьбы ролика относительно резьбы винта на 1/2 шага).

Вид функции $f(x, y)$ зазоров между поверхностями резьбы винта и ролика для указанных параметров представлен на рис. 7.

Контурный график (линии уровня) той же поверхности показывает, что в окрестности минимума поверхность очень близка к параболоиду (рис. 8).

Минимум рассматриваемой поверхности находился стандартными средствами компьютерного пакета Mathematica [2]. При этом смещение осей Δ задавалось заранее. Очевидно, что значение минимума $f(x, y)$ определяется величиной Δ . Зависимость минимума $f(x, y)$ от Δ представлена в табл. 1.

Таблица 1

Δ , мкм	$\min[f(x, y)]$, мкм
20	-1,63215
21	-0,632659
21,6	-0,0329635
22	0,366834
23	1,36633

Значение $\Delta = 21,6 \text{ мкм}$, при котором расстояние между поверхностями становится практически равным нулю, получено подбором. Координаты точки контакта:

$$x_{\min} = 0,038 \text{ мм}; y_{\min} = -0,509 \text{ мм},$$

т.е. точка контакта смещена на 0,509 мм относительно плоскости расположения осей z_b и z_p и на 0,038 мм в плоскости расположения осей z_b и z_p .

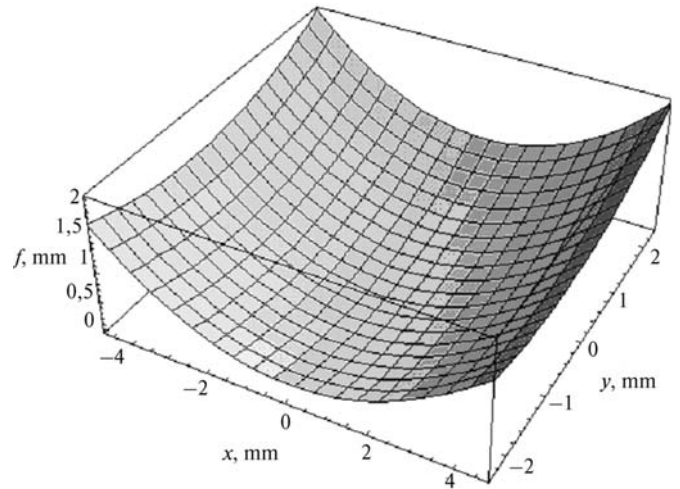


Рис. 7. Расстояние между контактирующими поверхностями винта $f_b(x, y)$ и $f_p(x, y)$ ролика, измеренное вдоль оси z

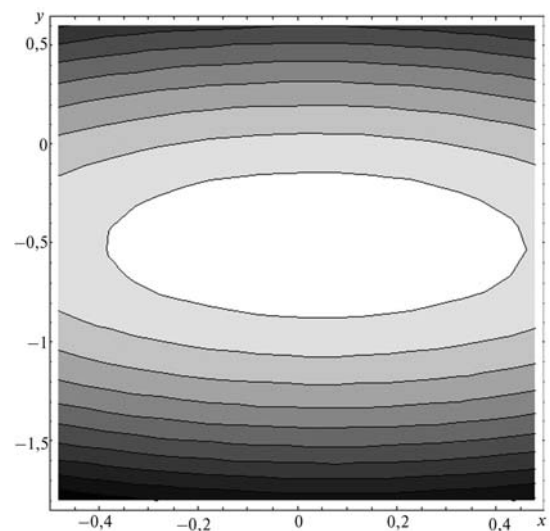


Рис. 8. Контурный график (линии уровня) поверхностей $f(x, y)$

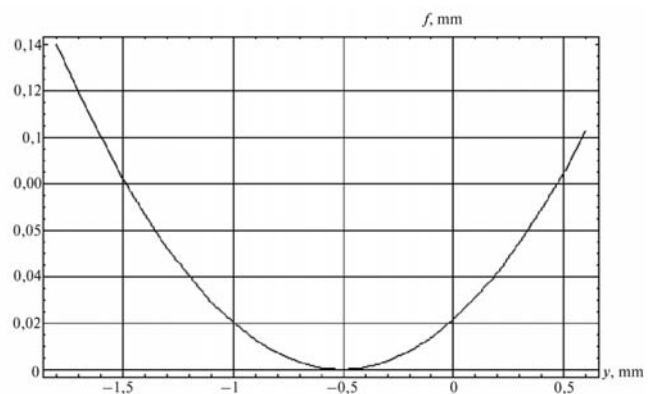


Рис. 9. Сечение поверхности $f(x, y)$ плоскостью $x = 0$

Приближенный аналитический расчет радиального смещения осей

Вид поверхности $f(x, y)$ (близость к параболоиду, рис. 8, 9) позволяет построить приближенное аналитическое выражение функции $f(x, y)$. Разложение $f(x, y)$ в ряд Тейлора в окрестности точки $x = 0, y = 0$ имеет вид

$$\begin{aligned}
 f(x, y) \approx & C_p \Delta + \left(C_b - C_p \left(1 + \frac{\sqrt{2}\Delta}{\rho_p} \right) \right) x + \\
 & + \left(T_b + T_p \left(1 - \frac{2\Delta}{d_p} \right) \right) y + \\
 & + \frac{\sqrt{2}C_p}{\rho_p} \frac{x^2}{2} + \left(\left(1 - \frac{4\Delta}{d_p} \right) \frac{2T_p}{d_p} - \frac{2T_b}{d_b} \right) xy + \\
 & + \left(\frac{2C_b}{d_b} + \frac{2C_p}{d_p} \left(1 - \frac{2\Delta}{d_p} + \frac{\sqrt{2}\Delta}{\rho_p} \right) \right) \frac{y^2}{2},
 \end{aligned} \tag{12}$$

где $C_b = \cos \gamma_b$; $T_b = \operatorname{tg} \gamma_b$; $C_p = \cos \gamma_p$; $T_p = \operatorname{tg} \gamma_p$.

Разложение (12) выполнялось стандартными средствами компьютерного пакета Mathematica [2]. При разложении в степенной ряд сохранены вторые степени координат и первая степень смещения Δ осей (в связи с малостью этой величины).

Координаты точки касания (x, y) и величина Δ определяются системой трех уравнений, которые имеют смысл условий экстремума и условий касания:

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \\ f = 0 \end{cases} \tag{13}$$

Решение системы (13) выполнялось в векторно-матричной форме. Для этого коэффициенты при первых степенях координат в разложении (12) объединены в векторы, а коэффициенты при вторых степенях — в матрицы:

$$\begin{aligned}
 f(x, y) \approx & (q_0 + q_1 \Delta) + \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}^T (\mathbf{v}_0 + \mathbf{v}_1 \Delta) + \\
 & + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}^T ([A_0] + [A_1] \Delta) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},
 \end{aligned} \tag{14}$$

где

$$\begin{aligned}
 [A_0] &= \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}C_p}{\rho_p} & \frac{2T_p}{d_p} - \frac{2T_b}{d_b} \\ \frac{2T_p}{d_p} - \frac{2T_b}{d_b} & \frac{2C_b}{d_b} + \frac{2C_p}{d_p} \end{pmatrix}; \\
 [A_1] &= \begin{pmatrix} 0 & -\frac{8T_p}{d_p^2} \\ -\frac{8T_p}{d_p^2} & \frac{2C_p}{d_p} \left(\frac{\sqrt{2}}{\rho_p} - \frac{2}{d_p} \right) \end{pmatrix}; \\
 \mathbf{v}_0 &= \begin{pmatrix} C_b - C_p \\ T_b + T_p \end{pmatrix}; \quad \mathbf{v}_1 = -\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}C_p}{\rho_p} \\ \frac{2T_p}{d_p} \end{pmatrix}; \\
 q_0 &= 0; \quad q_1 = C_p.
 \end{aligned} \tag{15}$$

Из условий экстремума $\frac{\partial f}{\partial x} = 0, \frac{\partial f}{\partial y} = 0$ следует линейная система уравнений относительно x и y :

$$([A_0] + [A_1] \Delta) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + (\mathbf{v}_0 + \mathbf{v}_1 \Delta) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{16}$$

Матрица системы (16) состоит из основной части $[A_0]$ и дополнительной части $[A_1]$ с малым множителем Δ . Обращение такой матрицы можно представить степенным рядом по степеням Δ :

$$\begin{aligned}
 ([A_0] + [A_1] \Delta)^{-1} &= \\
 &= [B_0] + [B_1] \Delta + [B_2] \Delta^2 + \dots,
 \end{aligned} \tag{17}$$

где

$$\begin{aligned}
 [B_0] &= [A_0]^{-1}; \\
 [B_1] &= -[A_0]^{-1} [A_1] [A_0]^{-1}.
 \end{aligned}$$

Из формул (16) и (17) следует выражение для координат точки контакта

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \approx -[B_0] \mathbf{v}_0 - \Delta ([B_0] \mathbf{v}_1 + [B_1] \mathbf{v}_0). \tag{18}$$

Здесь и далее в выражениях оставлены слагаемые, содержащие Δ в степени не выше первой.

Подстановка выражения (18) в (14) с учетом (16) и с учетом симметрии матриц приводит к следующему выражению для минимального значения функции $f(x, y)$:

$$f_{\min} = w_0 + w_1 \Delta, \quad (19)$$

где

$$w_0 = q_0 - \frac{1}{2} \mathbf{v}_0^T [B_0] \mathbf{v}_0; \quad (20)$$

$$w_1 = q_1 - \mathbf{v}_0^T [B_0] \mathbf{v}_1 - \frac{1}{2} \mathbf{v}_0^T [B_1] \mathbf{v}_0.$$

Условие касания поверхностей

$$f_{\min} = 0 \quad (21)$$

приводит к выражению, определяющему Δ :

$$\Delta = -\frac{w_0}{w_1}. \quad (22)$$

Пример

Для указанных выше параметров винта и ролика приведем численные значения всех промежуточных величин (размеры заданы в миллиметрах):

$$C_B = 0,998596, C_P = 0,999494,$$

$$T_B = 0,0530516, T_P = 0,031831,$$

$$[A_0] = \begin{pmatrix} 0,125088 & 0,00176839 \\ 0,00176839 & 0,166545 \end{pmatrix},$$

$$[A_1] = \begin{pmatrix} 0 & -0,000994718 \\ -0,000994718 & 0,0000189457 \end{pmatrix},$$

$$[B_0] = \begin{pmatrix} 7,99555 & -0,0848975 \\ -0,0848975 & 6,00529 \end{pmatrix},$$

$$[B_1] = \begin{pmatrix} -0,00135057 & 0,0477788 \\ 0,0477788 & -0,00169753 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{v}_0 = \begin{pmatrix} -0,000898054 \\ 0,0848826 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} -0,125088 \\ -0,00397887 \end{pmatrix}, \quad (23)$$

$$q_0 = 0, q_1 = 0,999494,$$

$$w_0 = -0,0216439, w_1 = 0,999732,$$

$$\Delta = 0,0216497.$$

Упрощенное выражение для Δ

Рассмотренный пример показывает, что в полученную приближенную методику вычисления Δ можно вносить дополнительные упрощения.

Во-первых, величина w_1 отличается от единицы только в четвертом знаке, причем это связано с тем, что косинусы углов подъема винтовых линий в той же степени близки к единице. Из этого следует, что знаменатель в выражении (22) можно заменить единицей:

$$\Delta \approx \frac{1}{2} \mathbf{v}_0^T [B_0] \mathbf{v}_0. \quad (24)$$

Во-вторых, первый элемент вектора \mathbf{v}_0 является разностью косинусов C_B и C_P , т. е. весьма мал. Тогда в произведении (24) остается только один элемент

$$\Delta \approx \frac{1}{2} B_{022} (v_{02})^2. \quad (25)$$

С учетом того, что матрицу $[A_0]$ можно считать практически диагональной, элемент

$$B_{022} \approx \frac{1}{\left(\frac{2C_B}{d_B} + \frac{2C_P}{d_P}\right)}. \quad (26)$$

В результате получаем приближенное выражение

$$\Delta \approx \frac{(T_B + T_P)^2}{4 \left(\frac{C_B}{d_B} + \frac{C_P}{d_P}\right)}, \quad (27)$$

или в более привычном виде

$$\Delta \approx \frac{(\operatorname{tg} \gamma_B + \operatorname{tg} \gamma_P)^2}{4 \left(\frac{\cos \gamma_B}{d_B} + \frac{\cos \gamma_P}{d_P}\right)}. \quad (28)$$

Подстановки числовых значений в (28) дают $\Delta \approx 0,021631$ мм. Сравнение с результатами численного метода (табл. 1) показывает совпадение в трех знаках, что говорит об очень высокой точности выражения (28).

Следует отметить, что область применения выражения (28) ограничена теми предположениями, при которых оно было получено, в частности, углы подъема винтовых линий должны быть малы, а их косинусы близки к единице. Указанное условие для ролико-винтовых передач практически всегда выполняется, поэтому следует ожидать, что выражение (28) будет достаточным для большинства приложений при вычислении смещения осей.

Координаты точек первоначального контакта резьбы винта и ролика $x_{\min} = 0,038$ мм; $y_{\min} = -0,509$ мм (см. рис. 6).

Литература

1. Курс теоретической механики / Дронг В.И., Дубинин В.В., Ильин М.М. и др.; Под ред. К.С. Колесникова. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2000.
2. Воробьев Е.М. Введение в систему «Математика». М.: Финансы и статистика, 1998.

Статья поступила в редакцию 24.03.2011 г.