

УДК 621.8

Модель для расчета эквивалентных толщин зубчатого венца гибкого колеса с круговой формой зуба и распределения в нем эквивалентных напряжений

Т.А. Фомина

Приведено описание алгоритма вычисления обобщенной эквивалентной толщины гибкого зубчатого венца волнового шагового двигателя с круговой или циклоидальной формой зубьев. Выражение для эквивалентной толщины гладкой рейки выведено из условия равенства соответствующих потенциальных энергий отдельного регулярного зубцового элемента гибкого венца и элемента гладкой рейки такой же длины. Дан анализ зависимостей эквивалентной толщины и эквивалентных напряжений от толщины венца по впадине и геометрии регулярного зубцового элемента.

Ключевые слова: эквивалентная толщина, зубчатый венец, зуб круговой формы, метод конечных элементов.

The principles of charge parameters effect on diesel and HCCI engine characteristics are considered. The calculation research into the combustion process and the working cycle characteristics of a HCCI engine running on natural gas and dimethyl ether mixture is carried out.

Keywords: diesel engine, HCCI engine, diesel fuel, natural gas, dimethyl ether, combustion.

При определении сил одностороннего взаимодействия жесткого и гибкого колес волновых шаговых двигателей расчет поля деформаций гибкого зубчатого венца с учетом реальной геометрии его зубьев является весьма сложной задачей (рис. 1). В последнее время распространение получают гибкие колеса волновых зубчатых передач с циклоидальной и круговой формой зубьев [2]. Практических результатов расчетов подобных гибких венцов до настоящего времени не существовало. Таким образом, целями данного исследования являются:

- получение соотношений, позволяющих определять эквивалентную толщину гибкого зубчатого венца с круговой или циклоидальной формой зубьев;

- оценка уровня снижения величин максимальных эквивалентных напряжений в зубьях с круговой формой по сравнению с соответствующими величинами напряжений в зубьях с рабочей эвольвентной формой, когда эвольвента по существу вырождается в прямую, что характерно для эвольвентного мелко модульного волнового зацепления.



ФОМИНА

Татьяна Александровна
аспирант,
преподаватель кафедры
«Прикладная математика
и информатика»
филиал МГИУ
в г. Сергиевом Посаде МО

В соответствии с сформулированными целями поставлена задача построения расчетной модели и программы расчета гибкого зубчатого венца с круговой или циклоидальной формой зубьев, позволяющих получать достоверную с достаточной степенью точности информацию, необходимую для дальнейших расчетов сил взаимодействия колес волнового зацепления, а, следовательно, и всех других прочностных и жесткостных характеристик волнового механизма.

Замена гибкого зубчатого венца гладким круговым кольцом с прямоугольным поперечным сечением с эквивалентной толщиной h_3 позволяет существенно упростить его расчетную схему на стадии определения сил взаимодействия между зубьями волнового зацепления и в расчетах соответствующих им деформированных форм зубчатого венца.

В процессе деформирования в поперечных сечениях гибкого зубчатого венца возникают изгибающий момент M , нормальная N и поперечная Q силы. Так как жесткость зубчатого венца зависит от вида нагрузки, то для каждой нагрузки (M , N , Q) имеют место свои значения эквивалентных толщин:

- $h_3^и$ — эквивалентная толщина зубчатого венца при изгибе (рис. 2, а);
- $h_3^р$ — эквивалентная толщина при растяжении (рис. 2, б);
- $h_3^с$ — эквивалентная толщина при сдвиге (рис. 2, в).

Для каждого вида нагрузки величины эквивалентных толщин h_3 определяются из условия

равенства соответствующих потенциальных энергий $U_{расч}$ отдельного регулярного зубцового элемента венца (см. рис. 1) и такой же длины (h_3) элемента гладкой рейки с эквивалентной толщиной $U_{теор}$.

Расчет эквивалентных толщин

Энергия деформации гладкой рейки определяется следующими соотношениями [1]:

при изгибе

$$U_{теор}^и = \frac{M^2 l}{2EI};$$

при растяжении

$$U_{теор}^р = \frac{N^2 l}{2EF^p};$$

при сдвиге

$$U_{теор}^с = \frac{Q^2 l}{2GF^c};$$

где M , N , Q — приложенные к регулярному зубцовому элементу рейки изгибающий момент, растягивающая и поперечная силы; l — длина рейки; EI — изгибная жесткость рейки с эквивалентной толщиной сечения; $I = \frac{th_3^и}{12}$ — осевой момент инерции сечения; EF^p — жесткость рейки на растяжение; $F^p = th_3^р$ — площадь поперечного сечения; GF^c — жесткость рейки на сдвиг; $F^c = th_3^с$ — площадь поперечного сечения при сдвиге; t — ширина зубцового элемента.

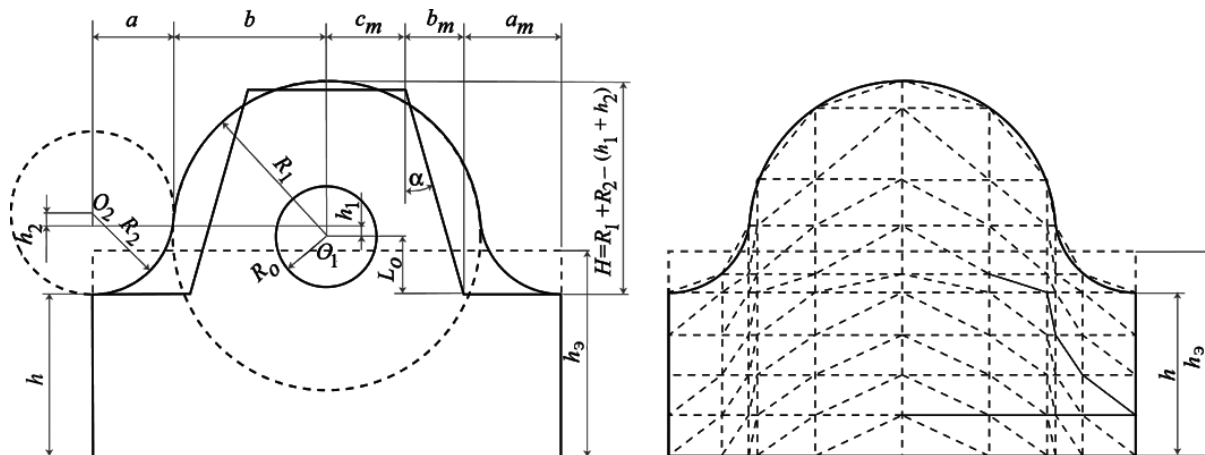


Рис. 1. Регулярный зубцовый элемент

Выполнив расчет отдельного регулярного элемента зубчатого венца от разных нагрузок (рис. 2) каким-либо численным методом, и, таким образом, вычислив энергию деформации, можно определить эквивалентные толщины h_3^u, h_3^p, h_3^c :

при изгибе

$$U_{\text{теор}}^u = \frac{M^2 l}{2EI} = \frac{12M^2 l}{2Eth_3^{\text{из}}} = \frac{6M^2 l}{Eth_3^{\text{из}}} = U_{\text{расч}}^u,$$

$$h_3^u = \sqrt[3]{\frac{6M^2 l}{EtU_{\text{расч}}^u}};$$

при растяжении

$$U_{\text{теор}}^p = \frac{N^2 l}{2EF^p} = \frac{N^2 l}{2Eth_3^p} = U_{\text{расч}}^p, \quad h_3^p = \frac{N^2 l}{2EtU_{\text{расч}}^p};$$

при сдвиге

$$U_{\text{теор}}^c = \frac{Q^2 l}{2GF^c} = \frac{Q^2 l}{2Gth_3^c} = U_{\text{расч}}^c, \quad h_3^c = \frac{Q^2 l}{2GtU_{\text{расч}}^c}.$$

При приложении единичных момента $\bar{M} = 1$ и сил $\bar{N} = 1$ и $\bar{Q} = 1$ к элементу единичной ширины $t = 1$ получим:

$$h_3^u = \sqrt[3]{\frac{6l}{EU_{\text{расч}}^u}}; \quad h_3^p = \frac{l}{2EU_{\text{расч}}^p}; \quad h_3^c = \frac{l}{2GU_{\text{расч}}^c}$$

В расчетах методом конечных элементов рассматривался зуб круговой формы, построенный по алгоритму [2]. Геометрические характеристики и укрупненная сетка разбиения зуба на плоские треугольные конечные элементы представлены на рис. 1.

Величина $U_{\text{расч}}$ для каждого вида нагрузки в методе конечных элементов вычисляется по формуле [3]:

$$U_{\text{расч}} = \frac{1}{2} \{\delta\}^T [K] \{\delta\}.$$

Учитывая, что $[K] \{\delta\} = [P]$, выражение для вычисления энергии деформации запишется в виде:

$$U_{\text{расч}} = \frac{1}{2} \{\delta\}^T [P],$$

где $[K]$ — матрица жесткости; $\{\delta\}$ — столбец узловых перемещений регулярного зубцового

элемента гибкого венца; $[P]$ — столбец силовых факторов.

При вычислении $U_{\text{расч}}$ для различных силовых факторов задавались разные условия закрепления регулярного элемента гибкого венца, соответствующие его изгибу, растяжению и сдвигу.

В случае **изгиба** к торцевым границам такого элемента прикладывался единичный изгибающий момент $\bar{M} = 1$, представленный в виде системы узловых сил (рис. 2, а). Узловые силы в этом случае вычислялись с учетом их распределения по линейному закону по следующим соотношениям:

$$\sum_{i=1}^{\lfloor Z_y/2 \rfloor} 2P_i \left(\frac{h}{2} - \Delta h(i-1) \right) = \bar{M} = 1,$$

где Z_y — число узлов сетки на торце регулярного элемента; Δh — высота конечного элемента основания; i — номер пары сил; $\lfloor Z_y / 2 \rfloor$ — число пар сил. Тогда

$$P_1 = \frac{h}{4 \sum_{i=1}^{\lfloor Z_y/2 \rfloor} \left(\frac{h}{2} - \Delta h(i-1) \right)^2}; \quad P_i = \frac{P_1 \left(\frac{h}{2} - \Delta h(i-1) \right)}{\frac{h}{2}}.$$

В качестве граничных условий при изгибе регулярного элемента задавался запрет поворота оси симметрии зуба (шарнирное закрепление).

В случае **растяжения** ($\bar{N} = 1$) рассматривались три схемы регулярного элемента, отличающиеся способами ограничения его упругих перемещений, что достигается разными способами расположения шарнирных связей. В первой схеме шарниры располагались только на нижней границе зубцового элемента. Во второй — шарниры ограничивали вертикальные перемещения всех узлов конечных элементов и разрешали лишь горизонтальные перемещения узлов. В третьей схеме ограничивались лишь перемещения левой границы зуба (жесткая заделка), т.е. во всех схемах левая граница зуба была жестко заделана.

Единичная растягивающая нагрузка, приложенная к правому торцу регулярного элемента представлялась совокупностью равномерно распределенных по узлам сил величиной

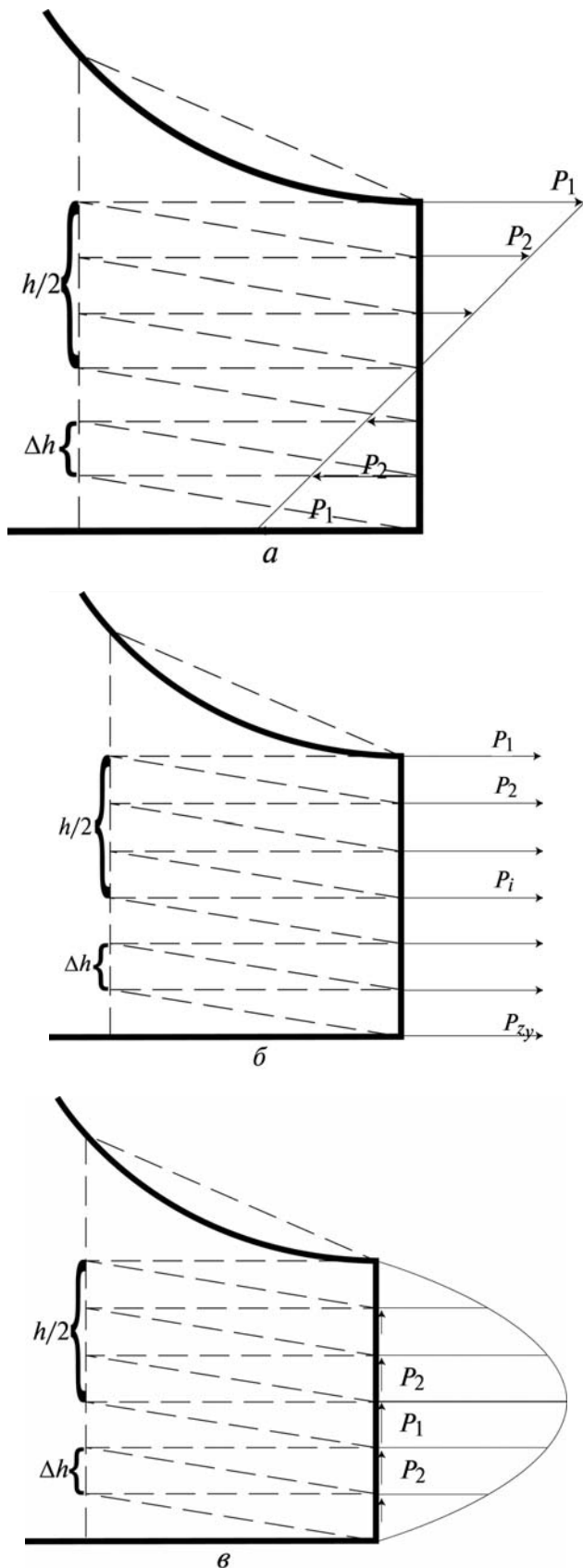


Рис. 2. Нагрузки, прикладываемые к регулярному зубцовому элементу, в случае: а — изгиба; б — растяжения; в — сдвига

$P_i = \frac{1}{Z_y}$ (рис. 2, б). В этом случае выполняется равенство

$$\sum_{i=1}^{Z_y} P_i = \bar{N} = 1.$$

При нагружении регулярного элемента усилием сдвига ($\bar{Q} = 1$) ограничивались перемещения зуба в горизонтальном направлении. Для этого в каждом узле такого элемента задавалось шарнирное закрепление. Левая граница зуба жестко заделана.

К узлам на правой границе зуба прикладывались силы P_i . Их распределение принималось в соответствии с формулой Д. И. Журавского (рис. 2, в), а значения вычислялись из условия

$$\sum_{i=1}^{Z_y} P_i = \bar{Q} = 1.$$

Откуда

$$P_1 = \frac{1}{1 + 8 \sum_{i=1}^{\lfloor Z_y/2 \rfloor} \left(\frac{\Delta h(i-1)}{h} \right)^2}; P_i = 4P_1 \left(\frac{\Delta h(i-1)}{h} \right)^2.$$

Ниже приведен пример расчета эквивалентных толщин для зуба круговой формы со следующими геометрическими параметрами: $R_1 = 5$ мм; $R_2 = 4$ мм; $h_1 = 0$ мм; $h_2 = 0$ мм; $a = 4$ мм; $b = 5$ мм; $l = 2(a+b) = 18$ мм. Толщина венца по впадине $h = 3$ мм. Физические характеристики материала: $E = 2 \cdot 10^{11}$ Па; $\mu = 0,3$.

Деформированные формы регулярного зубцового элемента для различных приложенных нагрузок приведены на рис. 3. Для более наглядного отображения перемещения выведены в увеличенном масштабе. На графиках сплошной линией указана граница зуба в исходном ненагруженном состоянии. Точками обозначены положения узлов конечных элементов после деформирования.

Результаты расчетов по приведенным выше формулам значений энергий деформации и эквивалентных толщин, даны в таблице.

Аналитические расчеты [1] показали, что при свободном деформировании кольца двумя диаметрально расположенными радиальными

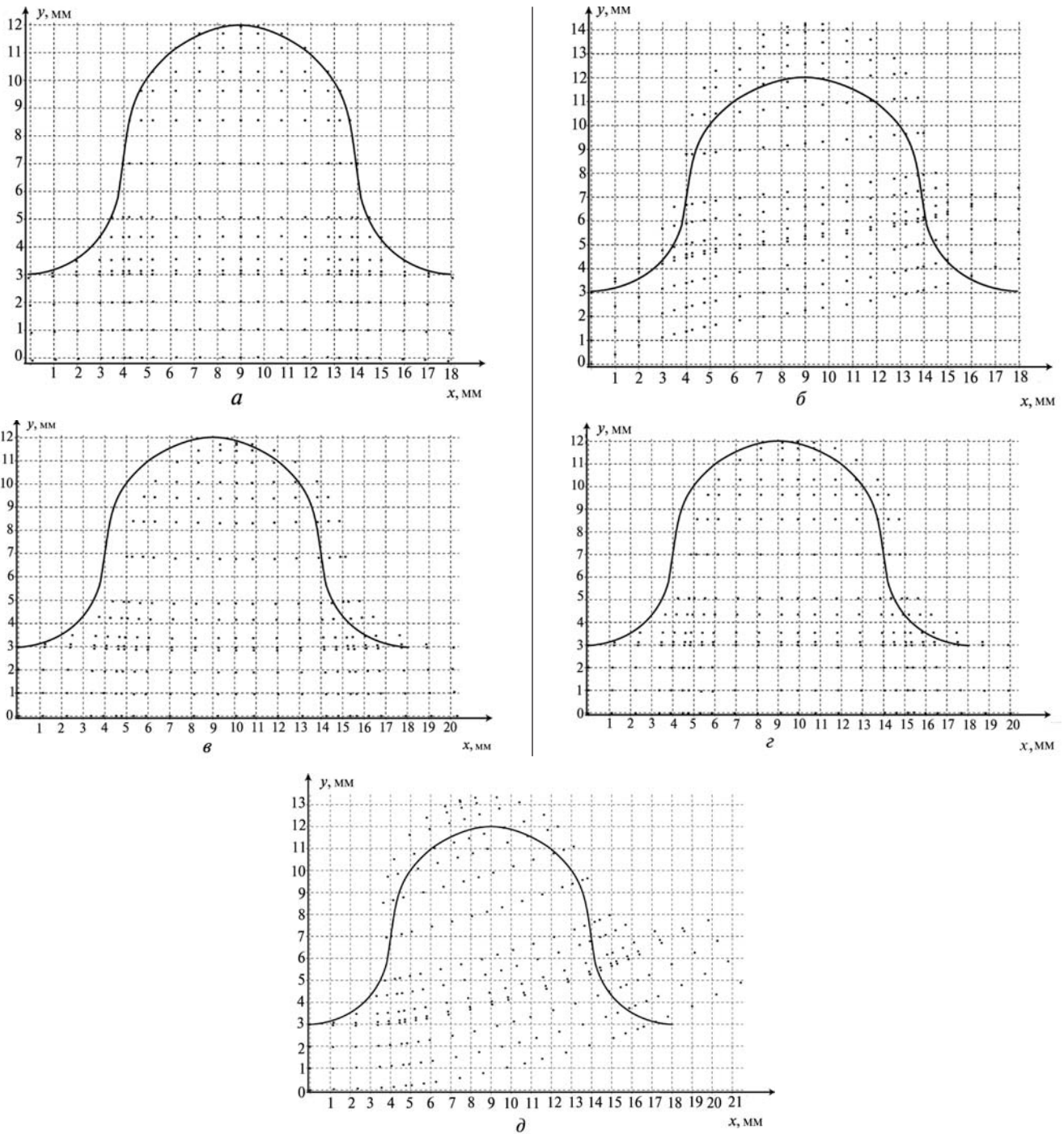


Рис. 3. Форма регулярного зубцового элемента при приложении различных нагрузок:

а — изгиб; *б* — сдвиг; *в* — растяжение (сх. 1); *г* — растяжение (сх. 2); *д* — растяжение (сх. 3);

— — верхняя граница недеформированного регулярного зубцового элемента; ... — положение узлов конечных элементов в результате действия сил

силами основная часть работы этих сил затрачивается на накопление потенциальной энергии изгиба. Доля энергии, приходящаяся на единичный сдвиг ($\bar{Q}=1$) примерно в 4,6 раза больше, чем доля энергии, приходящаяся на единичное растяжение ($\bar{N}=1$). Поэтому для вы-

числения обобщенной эквивалентной толщины венца вначале использовалась формула, учитывающая весовые коэффициенты от указанных нагрузок:

$$h_s = 0,955h_s^u + 0,008h_s^p + 0,037h_s^c.$$

Таблица

Изгиб	
Энергия деформации	$U_{\text{расч}}^u \approx 7,07 \cdot 10^{-6}$ Дж
Эквивалентная толщина	$h_3^u \approx 4,24$ мм $\left(\frac{h_3^u}{h} \approx 1,41\right)$
Сдвиг	
Энергия деформации	$U_{\text{расч}}^c \approx 2,27 \cdot 10^{-11}$ Дж
Эквивалентная толщина	$h_3^c \approx 5,14$ мм $\left(\frac{h_3^c}{h} \approx 1,71\right)$
Растяжение. Схема 1	
Энергия деформации	$U_{\text{расч}}^p \approx 1,09 \cdot 10^{-11}$ Дж
Эквивалентная толщина	$h_3^p \approx 4,12$ мм $\left(\frac{h_3^p}{h} \approx 1,37\right)$
Растяжение. Схема 2	
Энергия деформации	$U_{\text{расч}}^p \approx 9,73 \cdot 10^{-12}$ Дж
Эквивалентная толщина	$h_3^p \approx 4,62$ мм $\left(\frac{h_3^p}{h} \approx 1,54\right)$
Растяжение. Схема 3	
Энергия деформации	$U_{\text{расч}}^p \approx 1,31 \cdot 10^{-11}$ Дж
Эквивалентная толщина	$h_3^p \approx 3,44$ мм $\left(\frac{h_3^p}{h} \approx 1,15\right)$

В этом случае в рассматриваемом примере получилось $h_3 \approx 4,27$ мм. При этом относительная эквивалентная толщина $h_3 / h = 1,42$.

Из формулы следует, что доли от $\bar{Q} = 1$ и $\bar{N} = 1$ существенно меньше, чем доля от единичного изгиба ($\bar{M} = 1$). Кроме того, вид применяемой схемы нагружения при растяжении слабо влияет на величину эквивалентной толщины. Из сказанного следует, что в практических расчетах эквивалентных толщин сдвиг и растяжение венца можно не учитывать.

Расчет эквивалентных напряжений

Для корректных расчетов гибких венцов с круговой или циклоидальной формой зуба на усталостную прочность необходим расчет максимальных эквивалентных напряжений в зоне концентратора напряжений, т.е. у ножки зуба. Этот расчет позволит установить величину коэффициента концентрации напряжений и характеристики цикла изменения напряжений в указанной зоне.

Эквивалентное напряжение для каждого конечного элемента вычисляется по формуле [1]:

$$\sigma_{\text{эkv}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + \sigma_x^2 + \sigma_y^2 + 6\tau_{xy}^2}.$$

С помощью описанных соотношений произведены расчеты НДС регулярного зубцового элемента.

Дополнительный анализ максимальных эквивалентных напряжений в зубе трапециевидной формы (рис. 4) с площадью, равной площади зуба с круговой формой показывает, что круговая форма зубьев существенно снижает максимальную величину эквивалентных напряжений. Например, в сравнении с трапециевидной формой, это снижение достигает 30%.

На рис. 4 представлен график зависимости от толщины венца по впадине регулярного зубцового элемента максимальных эквивалентных напряжений, возникающих в гладкой рейке с обобщенной эквивалентной толщиной.

В качестве дополнительного расчета выполнялся анализ зависимости эквивалентной толщины для зубцового элемента, имеющего отверстие в верхней части. Центр отверстия совпадал с точкой O_1 (см. рис. 1). Отношение площади отверстия к площади верхней части зуба высотой H ($S_{\text{отн}}$) принималось равным 0,146 и 0,328 (эти значения соответствуют $R_o = 2$ и 3 мм). Установлено, что с увеличением радиуса отверстия эквивалентная толщина и максимальные эквивалентные напряжения уменьшаются (см. рис. 4). При этом собственная податливость головки зуба возрастает, что приводит к более равномерному распределению нагрузки между зубьями колес.

Выводы

1. Расчеты показали, что при вычислении эквивалентных толщин в регулярном зубцовом элементе гибкого венца можно использовать только его расчет на изгиб, поскольку при плоском деформировании кольца основная часть потенциальной энергии — это энергия от его изгиба. Погрешность в определении h_3 при этом не будет превышать 1%.

2. Круговая форма зубьев существенно снижает максимальную величину эквивалент-

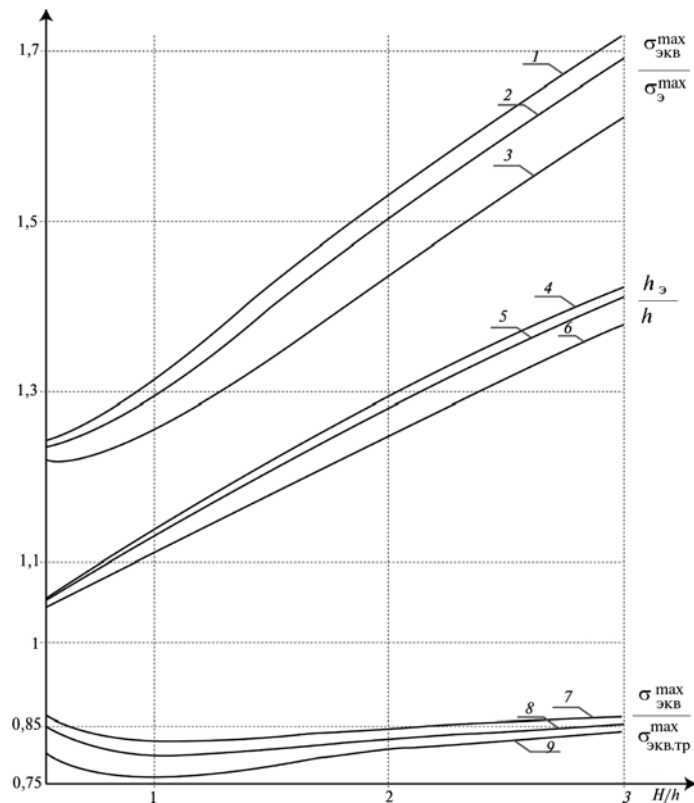


Рис. 4. Зависимость эквивалентной толщины и эквивалентных напряжений от размеров регулярного зубцового элемента и площади отверстия:

1 — $S_{\text{отн}} = 0$; 2 — $S_{\text{отн}} = 0,146$; 3 — $S_{\text{отн}} = 0,328$; 4 — $S_{\text{отн}} = 0$; 5 — $S_{\text{отн}} = 0,146$; 6 — $S_{\text{отн}} = 0,328$; 7 — $a_m = 2$ мм, $b_m = 4$ мм, $c_m = 3$ мм, $\alpha = 25^\circ$; 8 — $a_m = 2$ мм, $b_m = 3$ мм, $c_m = 4$ мм, $\alpha = 21^\circ$; 9 — $a_m = 3$ мм, $b_m = 3$ мм, $c_m = 3$ мм, $\alpha = 17^\circ$;
 $\sigma_{\text{э}}^{\text{max}}$ — максимальные эквивалентные напряжения, возникающие в регулярном зубцовом элементе при его единичном изгибе; σ_3^{max} — максимальные напряжения, возникающие в приграничном элементе гладкой рейки эквивалентной толщины h_3 при ее единичном изгибе; $\sigma_{\text{э,тр}}^{\text{max}}$ — максимальные эквивалентные напряжения, возникающие в регулярном зубцовом элементе трапецевидной формы при его единичном изгибе

ных напряжений. Например, в сравнении с трапецевидной формой, в которую вырождается эвольвентная форма мелко модульного зацепления, это снижение достигает 30%.

3. Расчет полого зуба показывает, что с увеличением радиуса отверстия снижается величина максимальных эквивалентных напряжений и уменьшается эквивалентная толщина венца. При этом собственная податливость головки зуба возрастает, что приводит к более равномерному распределению нагрузки между зубьями колес.

Литература

1. Феодосьев В.И. Сопроотивление материалов. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 1999. 592 с.
2. Клеников С.С., Майков А.И. Разработка математической модели волнового редуктора с круговой формой зубьев и упругими звеньями в виде кольцевых пружинных пакетов // Тезисы докладов и выступлений студентов, аспирантов и преподавателей на VII межвузовской научно-практической конференции. М.: МГИУ, 2006. С. 327—335.
3. Бате К., Вилсон Е. Численные методы анализа и метод конечных элементов / Под ред. А.Ф. Смирнова; Пер. с англ. А.С. Алексеева и др. М.: Стройиздат, 1982. 448 с.

Статья поступила в редакцию 15.04.2011 г.