

Расчет и конструирование машин

УДК 539.3

DOI: 10.18698/0536-1044-2015-11-3-12

Оценки модулей упругости композита с пластинчатыми включениями*

В.С. Зарубин, Г.Н. Кувыркин, И.Ю. Савельева

МГТУ им. Н.Э. Баумана, 105005, Москва, Российская Федерация, 2-я Бауманская ул., д. 5, стр. 1

Evaluation of Moduli of Elasticity for Composite with Lamellar Inclusions

V.S. Zarubin, G.N. Kuvyrkin, I.Yu. Savelyeva

BMSTU, 105005, Moscow, Russian Federation, 2nd Baumanskaya St., Bldg. 5, Block 1

e-mail: : inga.savelyeva@gmail.com



Построена математическая модель, описывающая взаимодействие элементов структуры композита с изотропной упругой средой, модули упругости которой подлежат определению как искомые характеристики композита. Методом самосогласования получена система матричных соотношений, устанавливающая нелинейную связь искомых модулей композита с объемной концентрацией включений, их упругими свойствами и упругими характеристиками матрицы. С использованием вариационного подхода для рассматриваемого композита установлены двусторонние границы возможных значений объемного модуля упругости и модуля сдвига. Представленные расчетные зависимости позволяют прогнозировать упругие характеристики композита, армированного изотропными пластинчатыми включениями (в том числе в виде наноструктурных элементов).

Ключевые слова: композит, изотропные пластинчатые включения, модуль упругости, метод самосогласования.



This article presents a mathematical model that describes the interaction between the elements of the composite structure and the isotropic elastic medium. The moduli of elasticity of the medium are subject to determination as the required characteristics of the composite. Using the self-coordination method, a system of matrix ratios is obtained. It determines a non-linear connection between the required moduli of the composite and the volume concentration of inclusions, their elastic properties and elastic characteristics of the matrix. The variational approach is used to determine bilateral limits of possible values for the volume modulus of elasticity and shear modulus. The presented calculations can be used to predict elastic characteristics of a composite material reinforced by isotropic lamellar inclusions, including those in the form of nanostructured elements.

Keywords: composite, isotropic lamellar inclusions, modulus of elasticity, self-coordination method.

* Работа выполнена по грантам НШ-1432.2014.8 и МК-6573.2015.8 программ Президента РФ государственной поддержки ведущих научных школ и молодых кандидатов наук, а также в рамках проекта 1712 в сфере научной деятельности в части государственного задания № 2014/104 Минобрнауки РФ и государственного задания по проекту № 1.2640.2014.

Композиты, армированные включениями различной формы, широко используют в качестве конструкционных материалов в машиностроении. Области применения таких материалов в значительной степени зависят от комплекса их механических и теплофизических характеристик, среди которых важную роль играют упругие свойства композита. Количественному анализу упругих свойств гетерогенных тел, к которым следует отнести композиты, посвящено значительное число работ, проанализированных, например, в [1–4]. Однако свойства композитов с включениями пластинчатой формы по сравнению со свойствами волокнистых композитов исследованы менее подробно.

Включение можно считать пластинчатым, если его размер в одном из ортогональных направлений существенно меньше размеров в двух других направлениях. Природа возникновения пластинчатых включений различна. Например, близкую к такой форме имеют некоторые включения новых фаз, образующихся при термической обработке поликристаллических материалов [5–7], которые в силу неоднородности их структуры тоже можно считать композиционными материалами. Для улучшения технологических характеристик полимерного связующего как составной части композита используют мелкодисперсные наполнители различной формы, в частности формы пластинчатой чешуйки [8, 9]. Это дает возможность получить экзотермический эффект в процессе отверждения связующего, уменьшить его усадку и улучшить механические, теплофизические, электромагнитные и другие эксплуатационные характеристики изготавливаемого композита.

В последнее время в качестве включений для перспективных композитов рассматривают различные наноструктурные элементы [10], в том числе фрагменты графена [11–13]. Пластинки графена обладают уникальными механическими и теплофизическими свойствами. Известны оценки продольного модуля упругости (модуля Юнга) графена в плоскости его пластинки: ~ 1 ТПа [14, 15].

Пластинчатое включение при близких размерах в двух направлениях в первом приближении можно представить в виде сильно сплюснутого сфероиды (эллипсоида вращения) [16, 17]. Для достоверного прогноза ожидаемых упругих характеристик композитов, армированных пластинчатыми включениями, необхо-

димо разработать математическую модель, учитывающую влияние механического взаимодействия включений с окружающей их упругой средой. Такая модель может быть построена с использованием решения задачи о напряженно-деформированном состоянии включения эллипсоидальной формы, помещенного в однородную изотропную линейно-упругую среду [18].

Математическая модель. Пусть композит состоит из линейно-упругой изотропной матрицы с объемным модулем K° и модулем сдвига G° и линейно-упругих изотропных сфероидальных включений N типоразмеров. Геометрической характеристикой каждого типоразмера с номером $\zeta = 1, \bar{N}$ является отношение $b_\zeta = b_\zeta / r_\zeta$ малой полуоси b_ζ сфероиды к его радиусу r_ζ . Заданные упругие характеристики включений типоразмера с номером ζ определяют объемный модуль K_ζ° и модуль сдвига G_ζ° . При объемной концентрации C_ζ включений типоразмера с номером ζ объемная концентрация всех включений

$$C_V = \sum_{\zeta=1}^{\bar{N}} C_\zeta. \quad (1)$$

Представительный элемент структуры композита содержит множество сфероидальных включений, оси вращения которых равновероятно распределены по всем возможным направлениям. Это означает, что композит не обладает текстурой, и его допустимо считать изотропным [1]. Искомые упругие характеристики композита представим объемным модулем K и модулем сдвига G .

Связь тензоров \hat{C} и \hat{S} коэффициентов соответственно упругости и податливости композита с искомыми значениями модулей K и G устанавливают равенства [19]

$$\hat{C} = 3K \hat{V} + 2G \hat{D}, \quad \hat{S} = \frac{1}{3K} \hat{V} + \frac{1}{2G} \hat{D}. \quad (2)$$

Здесь \hat{V} и \hat{D} — тензоры четвертого ранга, являющиеся соответственно объемной и девиаторной составляющими единичного тензора четвертого ранга $\hat{I} = \hat{V} + \hat{D}$ и имеющие компоненты соответственно $V_{ijmn} = \delta_{ij} \delta_{mn} / 3$, $D_{ijmn} = (\delta_{im} \delta_{jn} + \delta_{in} \delta_{jm}) / 2 - V_{ijmn}$, $i, j, m, n = 1, 2, 3$, где $\delta_{ij} = 1$ при $i = j$ и $\delta_{ij} = 0$ при $i \neq j$ [1]. Из этих формул и равенства $\delta_{ii} = 3$ (с учетом правила суммирования слагаемых по повторяющимся в сомножителях латинским индексам, использу-

емого и в дальнейшем) следует, что $V_{ijmn}V_{mnlk} = V_{ijkl}$ ($k, l = 1, 2, 3$), $D_{ijmn}D_{mnlk} = D_{ijkl}$ и $V_{ijmn}D_{mnlk} = 0$, т. е.

$$\hat{V} \cdot \hat{V} = \hat{V}, \quad \hat{D} \cdot \hat{D} = \hat{D}, \quad \hat{V} \cdot \hat{D} = \hat{O}_4, \quad (3)$$

где \hat{O}_4 — тензор четвертого ранга с нулевыми компонентами, а каждая из точек между сомножителями в произведении тензоров означает *свертывание по индексу, одинаковому в обоих сомножителях* [20]. Тензоры \hat{V} и \hat{D} являются изотропными, т. е. их компоненты не зависят от ориентации выбранной системы координат. Связь тензоров \hat{C}_ζ^\bullet и \hat{C}° с заданными значениями модулей соответственно K_ζ^\bullet , G_ζ^\bullet для включений и K° , G° для матрицы композита определяют формулы, аналогичные первому равенству (2).

Особенность эллипсоидального включения, помещенного в однородную изотропную линейно-упругую среду, заключается в том, что возникающее в нем возмущение напряженно-деформированного состояния однородно по объему включения [18], т. е. не зависит от координат. Если на большом расстоянии от включения (по сравнению с его размерами) заданы компоненты ε_{ij} ($i, j = 1, 2, 3$) тензора $\hat{\varepsilon}$ деформации окружающей среды, то в сфероидальном включении типоразмера с номером ζ возникнет возмущение деформированного состояния, определяемое тензором [21]:

$$\hat{\varepsilon}_\zeta^\bullet = \hat{u}_\zeta^\bullet \cdot \hat{\varepsilon} = (\hat{C}_\zeta^\bullet - \hat{C} + \hat{C} \cdot \hat{W}_\zeta^\bullet)^{-1} \cdot (\hat{C} - \hat{C}_\zeta^\bullet) \cdot \hat{\varepsilon}, \quad (4)$$

где \hat{W}_ζ^\bullet — тензор четвертого ранга, компоненты которого зависят от выбора системы координат, параметра \bar{b}_ζ и коэффициента Пуассона $\nu = (3K/2 - G)/(3K + G)$ окружающей среды с искомыми значениями модулей упругости K и G .

Возмущение деформированного состояния в частицах матрицы композита определяет соотношение, аналогичное формуле (4):

$$\hat{\varepsilon}^\circ = \hat{u}^\circ \cdot \hat{\varepsilon} = (\hat{C}^\circ - \hat{C} + \hat{C} \cdot \hat{W}^\circ)^{-1} \cdot (\hat{C} - \hat{C}^\circ) \cdot \hat{\varepsilon}. \quad (5)$$

Если принять частицы матрицы шаровыми с переменным радиусом от некоторого конечного до бесконечно малого, что позволяет заполнить все пустоты между сфероидальными включениями, то тензор \hat{W}° в соотношении (5) будет изотропным, и его можно представить в виде [1]

$$\hat{W}^\circ = 3 \frac{1-\nu}{1+\nu} \hat{V} + \frac{15}{2} \frac{1-\nu}{4-5\nu} \hat{D}. \quad (6)$$

Тензор \hat{W}_ζ^\bullet является обратным так называемому тензору Эшелби [22]. Если ось вращения сфероида совместить с координатной осью $O\xi_3$ прямоугольной декартовой системы координат с началом в центре включения, то тензору Эшелби можно поставить в соответствие квадратную матрицу шестого порядка, которая имеет семь независимых элементов [18] (у элементов матрицы и у параметра \bar{b}_ζ опущен нижний индекс ζ):

$$N_{11}^\bullet = N_{22}^\bullet = QD_{11} + RD_1,$$

$$N_{12}^\bullet = N_{21}^\bullet = QD_{11}/3 - RD_1,$$

$$N_{33}^\bullet = QD_{33} + RD_3, \quad N_{13}^\bullet = N_{23}^\bullet = QD_{31} - RD_1,$$

$$N_{31}^\bullet = N_{32}^\bullet = QD_{13} - RD_3, \quad N_{66}^\bullet = QD_{11}/3 + RD_1,$$

$$N_{44}^\bullet = N_{55}^\bullet = Q(1 + \bar{b}^2)D_{13}/2 + R(1 - D_1)/2,$$

где $Q = (3/2)/(1 - \nu)$; $R = (1/2 - \nu)/(1 - \nu)$;

$$D_1 = \frac{\bar{b}}{2} \int_0^\infty \frac{du}{(1+u)^2(\bar{b}^2+u)^{1/2}} =$$

$$= \frac{\bar{b}/2}{(1-\bar{b}^2)^{3/2}} \left[\arccos \bar{b} - \bar{b}(1-\bar{b}^2)^{3/2} \right];$$

$$D_3 = 1 - 2D_1; \quad 3D_{13} = (D_3 - D_1)/(1 - \bar{b}^2);$$

$$D_{31} = D_{13}\bar{b}^2; \quad 4D_{11} = 1 - 3D_{13}; \quad D_{33} = 1/3 - 2\bar{b}^2D_{13}.$$

Остальные элементы этой матрицы равны нулю.

Обращение тензора Эшелби можно заменить обращением соответствующей матрицы N^\bullet , представив ее как блочную, включающую четыре блока в виде матриц третьего порядка. Из этих матриц две будут нулевыми, одна — диагональной с элементами $N_{44}^\bullet = N_{55}^\bullet$ и N_{66}^\bullet и одна — в виде

$$N_0^\bullet = \begin{pmatrix} N_{11}^\bullet & N_{12}^\bullet & N_{13}^\bullet \\ N_{12}^\bullet & N_{11}^\bullet & N_{13}^\bullet \\ N_{31}^\bullet & N_{31}^\bullet & N_{33}^\bullet \end{pmatrix}.$$

Матрица W^\bullet , обратная матрице N^\bullet , также будет блочной, ее структура аналогична структуре матрицы N^\bullet . При этом элементы диагонального блока $W_{44}^\bullet = W_{55}^\bullet = 1/N_{44}^\bullet$ и $W_{66}^\bullet = 1/N_{66}^\bullet$, а обращение блока с матрицей N_0^\bullet даст матрицу W_0^\bullet третьего порядка с элементами

$$W_{11}^\bullet = W_{22}^\bullet = (N_{11}^\bullet N_{33}^\bullet - N_{13}^\bullet N_{31}^\bullet) / \Delta_0^\bullet,$$

$$W_{12}^\bullet = W_{21}^\bullet = (N_{13}^\bullet N_{31}^\bullet - N_{12}^\bullet N_{33}^\bullet) / \Delta_0^\bullet,$$

$$W_{13}^\bullet = W_{23}^\bullet = (N_{12}^\bullet - N_{11}^\bullet) N_{13}^\bullet / \Delta_0^\bullet,$$

$$W_{31}^\bullet = W_{32}^\bullet = (N_{12}^\bullet - N_{11}^\bullet) N_{31}^\bullet / \Delta_0^\bullet,$$

$$W_{33}^{\bullet} = (N_{11}^{\bullet} + N_{12}^{\bullet})(N_{11}^{\bullet} - N_{12}^{\bullet})/\Delta_0^{\bullet},$$

где Δ_0^{\bullet} — определитель матрицы N_0^{\bullet} ,

$$\Delta_0^{\bullet} = \det(N_0^{\bullet}) = (N_{11}^{\bullet} - N_{12}^{\bullet})(N_{11}^{\bullet}N_{33}^{\bullet} - 2N_{13}^{\bullet}N_{31}^{\bullet} + N_{12}^{\bullet}N_{33}^{\bullet}).$$

Отметим, что обращение тензоров в соотношениях (4) и (5) также целесообразно провести в матричном виде после перехода в этих соотношениях к матричной записи.

Таким образом, тензорные соотношения (4) и (5) являются составной частью математической модели, которая описывает механическое взаимодействие включений и частиц матрицы с однородной изотропной линейно-упругой средой, имеющей искомые модули упругости рассматриваемого композита. Значения этих модулей можно найти, используя метод самосогласования [23].

Метод самосогласования. Существо метода самосогласования заключается в осреднении по представительному объему композита возмущений деформированного состояния в частицах матрицы и включениях и в приравнении нулю полученного результата. Поскольку тензор $\hat{\epsilon}$ задает однородное деформированное состояние в окружающей среде на большом удалении от рассматриваемых частиц матрицы и включений, конкретное представление этого тензора не повлияет на нулевой результат осреднения. Поэтому достаточно ограничиться осреднением лишь входящих в соотношения (4) и (5) тензоров $\hat{u}_{\zeta}^{\bullet}$ и \hat{u}° , представив результат этой процедуры в виде условия

$$\left\langle (1 - C_V)\hat{u}^{\circ} + \sum_{\zeta=1}^N C_{\zeta}\hat{u}_{\zeta}^{\bullet} \right\rangle = \hat{O}_4, \quad (7)$$

где угловые скобки означают процедуру осреднения.

При хаотической ориентации включений процесс осреднения тензоров \hat{u}° и $\hat{u}_{\zeta}^{\bullet}$ четвертого ранга эквивалентен приравнению нулю двух линейных инвариантов их линейной комбинации, входящей в условие (7). Тензор четвертого ранга имеет два линейных инварианта. Для тензоров \hat{V} и \hat{D} с учетом формул (3) эти инварианты имеют вид $V_{iimm} = 3$, $V_{imim} = 1$, $D_{iimm} = 0$ и $D_{imim} = 5$, а инварианты тензоров \hat{C} и \hat{S} с компонентами соответственно C_{ijmn} и S_{ijmn} , согласно формулам (2) и (3), можно представить в виде

$$\hat{C} \cdots \hat{V} = C_{iimm} = 9K,$$

$$\hat{C} \cdots \hat{D} = C_{imim} - C_{iimm}/3 = 10G,$$

$$\hat{S} \cdots \hat{V} = S_{iimm} = 1/K,$$

$$\hat{S} \cdots \hat{D} = S_{imim} - S_{iimm}/3 = 5/(2G).$$

Таким образом, линейные инварианты тензора четвертого ранга являются внутренними произведениями этого тензора и тензоров \hat{V} и \hat{D} соответственно при свертывании по всем четырем индексам [1]. Тогда условие (7) эквивалентно системе двух нелинейных уравнений

$$\begin{aligned} \left((1 - C_V)\hat{u}^{\circ} + \sum_{\zeta=1}^N C_{\zeta}\hat{u}_{\zeta}^{\bullet} \right) \cdots \hat{V} &= 0; \\ \left((1 - C_V)\hat{u}^{\circ} + \sum_{\zeta=1}^N C_{\zeta}\hat{u}_{\zeta}^{\bullet} \right) \cdots \hat{D} &= 0, \end{aligned} \quad (8)$$

решение которой позволяет найти значения объемного модуля K и модуля сдвига G рассматриваемого композита. При переходе от тензоров четвертого ранга к соответствующим матрицам шестого порядка левые части уравнений системы (8) перейдут в матричные соотношения, устанавливающие нелинейную связь искомых модулей упругости с объемной концентрацией включений, их упругими свойствами и модулями упругости матрицы.

Построение двусторонних оценок. Сравнительно простой подход, дающий возможность получить оценки упругих свойств композита с изотропными включениями любой формы, связан с применением соотношений теории смесей [24], что позволяет для оценок модулей упругости записать

$$\begin{aligned} \tilde{K}_+ &= \frac{K_+}{K^{\circ}} = 1 - C_V + \sum_{\zeta=1}^N C_{\zeta}\bar{K}_{\zeta}; \\ \tilde{G}_+ &= \frac{G_+}{G^{\circ}} = 1 - C_V + \sum_{\zeta=1}^N C_{\zeta}\bar{G}_{\zeta}, \end{aligned} \quad (9)$$

где $\bar{K}_{\zeta} = K_{\zeta}^{\bullet}/K^{\circ}$ и $\bar{G}_{\zeta} = G_{\zeta}^{\bullet}/G^{\circ}$.

Такие же оценки можно получить осреднением напряжений в неоднородной линейно-упругой изотропной среде, используя выдвинутое В. Фойгтом в 1910 г. предположение об однородности ее деформированного состояния.

Модули упругости характеризуют жесткостные свойства материала, а свойства упругой податливости материала определяют величины, обратные этим модулям. Тогда для оценок ха-

рактических характеристик упругой податливости в рамках моделей теории смесей получим [14]

$$\frac{1}{\bar{K}_-} = \frac{K^\circ}{K_-} = 1 - C_V + \sum_{\zeta=1}^N \frac{C_\zeta}{\bar{K}_\zeta},$$

$$\frac{1}{\bar{G}_-} = \frac{G^\circ}{G_-} = 1 - C_V + \sum_{\zeta=1}^N \frac{C_\zeta}{\bar{G}_\zeta}. \tag{10}$$

Идентичные оценки следуют из выдвинутого А. Рейссом в 1929 г. предположения об однородности напряженного состояния неоднородной среды, если провести осреднение деформации, считая среду изотропной и линейно-упругой.

Нижние индексы «+» и «-» в формулах (9) и (10) указывают на то, что справедливы неравенства $\bar{K}_+ \geq \bar{K}_-$ и $\bar{G}_+ \geq \bar{G}_-$. То, что эти формулы определяют двусторонние границы возможных значений модулей упругости, можно показать, используя вариационный подход к построению оценок [25]. С этой целью введем для рассматриваемого композита тензоры \hat{C}° и \hat{S}° эффективных коэффициентов соответственно упругости и податливости, связывающие равенствами

$$\langle \hat{\sigma}_* \rangle = \hat{C}^\circ \cdot \langle \hat{\epsilon}_* \rangle, \quad \langle \hat{\epsilon}_* \rangle = \hat{S}^\circ \cdot \langle \hat{\sigma}_* \rangle \tag{11}$$

осредненные по представительному объему V истинные распределения напряжений и деформации

$$\langle \hat{\sigma}_* \rangle = \frac{1}{V} \int_V \hat{\sigma}_*(M) dV(M),$$

$$\langle \hat{\epsilon}_* \rangle = \frac{1}{V} \int_V \hat{\epsilon}_*(M) dV(M).$$

Истинные распределения $\langle \hat{\sigma}_* \rangle$ и $\langle \hat{\epsilon}_* \rangle$ определяются соответственно тензорами $\hat{\sigma}_*$ и $\hat{\epsilon}_*$, компоненты которых зависят от положения точки $M \in V$ в представительном объеме композита. Из условия равенства потенциальной энергии деформации в однородной изотропной среде с упругими свойствами, описываемыми тензорами \hat{C}° и \hat{S}° , и в композите с истинными распределениями напряжений и деформации с учетом равенств (11) следует

$$\frac{V}{2} \langle \hat{\epsilon}_* \rangle \cdot \hat{C}^\circ \cdot \langle \hat{\epsilon}_* \rangle = \frac{1}{2} \int_V \hat{\sigma}_* \cdot \hat{\epsilon}_* dV =$$

$$= \frac{V}{2} \langle \hat{\sigma}_* \rangle \cdot \hat{S}^\circ \cdot \langle \hat{\sigma}_* \rangle. \tag{12}$$

При отсутствии объемных сил и задании на поверхности S области V кинематических

граничных условий функционал Лагранжа на истинном распределении перемещений в замкнутой области $\bar{V} = V \cup S$ достигает минимального значения, совпадающего со средней частью цепочки равенств (12). Этот функционал допустимо рассматривать на непрерывных и кусочно-дифференцируемых по пространственным координатам распределениях перемещений, удовлетворяющих кинематическим граничным условиям. Тогда при допустимом однородном деформированном состоянии, определяемом тензором $\hat{\epsilon}_0 = \langle \hat{\epsilon}_* \rangle$, с учетом равенств (11) и (12) можно записать

$$\frac{1}{2} \int_V \hat{\epsilon}_0 \cdot \hat{C}_*(M) \cdot \hat{\epsilon}_0 dV(M) \leq \frac{1}{2} \int_V \hat{\sigma}_* \cdot \hat{\epsilon}_* dV =$$

$$= \frac{V}{2} \hat{\epsilon}_0 \cdot \hat{C}^\circ \cdot \hat{\epsilon}_0, \tag{13}$$

где $\hat{C}_*(M)$ — тензор коэффициентов упругости, компоненты которого в зависимости от положения точки $M \in V$ описывают упругие характеристики включений или матрицы композита.

Соотношения (13) после замены процедуры осреднения тензоров четвертого ранга вычислением их линейных инвариантов позволяют записать неравенства

$$\int_V (\hat{C}_* - \hat{C}^\circ) dV \geq \hat{O}_4, \quad \int_V \hat{V} \dots (\hat{C}_* - \hat{C}^\circ) dV \geq 0,$$

$$\int_V \hat{D} \dots (\hat{C}_* - \hat{C}^\circ) dV \geq 0.$$

Из второго и третьего неравенств с учетом первой формулы (2) и равенств (3) после интегрирования получим $\bar{K}_+ \geq K^\circ / K^\circ$ и $\bar{G}_+ \geq G^\circ / G^\circ$, где K° и G° — эффективные значения модулей упругости композита, входящих в формулы вида (2) для тензоров \hat{C}° и \hat{S}° . Таким образом, значения K_+ и G_+ , определяемые формулами (9), действительно являются *верхними оценками* соответственно для эффективных значений K° и G° .

Если на поверхности S заданы силовые граничные условия, то на истинном распределении напряжений в замкнутой области $V = V \cup S$ функционал Кастилиано достигает максимального значения, совпадающего с взятой с обратным знаком средней частью цепочки равенств (12). Этот функционал допустимо рассматривать на статически возможных распределениях напряжений. При допустимом однородном напряженном состоянии, определяемом тензо-

ром $\hat{\sigma}_0 = \langle \hat{\sigma}^* \rangle$, с учетом равенств (11) и (12) запишем [25]

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2} \int_V \hat{\sigma}_0 \cdot \hat{S}^*(M) \cdot \hat{\sigma}_0 dV(M) &\leq -\frac{1}{2} \int_V \hat{\sigma}^* \cdot \hat{\varepsilon}^* dV = \\ &= -\frac{V}{2} \hat{\sigma}_0 \cdot \hat{S}^* \cdot \hat{\sigma}_0, \end{aligned} \quad (14)$$

где $\hat{S}^*(M)$ — тензор коэффициентов податливости, компоненты которого в зависимости от положения точки $M \in V$ описывают упругие характеристики включений или матрицы композита.

Из соотношения (14) после замены процедуры осреднения тензоров четвертого ранга вычислением их линейных инвариантов приходим к неравенствам

$$\begin{aligned} \int_V (\hat{S}^* - \hat{S}_0) dV \geq \hat{O}_4, \quad \int_V \hat{V} \dots (\hat{S}^* - \hat{S}_0) dV \geq 0, \\ \int_V \hat{D} \dots (\hat{S}^* - \hat{S}_0) dV \geq 0. \end{aligned}$$

Из второго и третьего неравенств с учетом второй формулы (2) и равенств (3) после интегрирования получим $1/\bar{K}_- \geq K^\circ/K_*$ и $1/\bar{G}_- \geq G^\circ/G_*$. Следовательно, значения K_- и G_- , определяемые формулами (10), действительно являются *нижними оценками* соответственно для эффективных значений K_* и G_* .

Результаты расчетов. В первом приближении оценку влияния формы пластинчатых включений на упругие характеристики рассматриваемого композита можно получить, построив зависимости от параметра \bar{b} коэффициентов D , которые входят в соотношения для элементов матрицы N^* , соответствующей тензо-

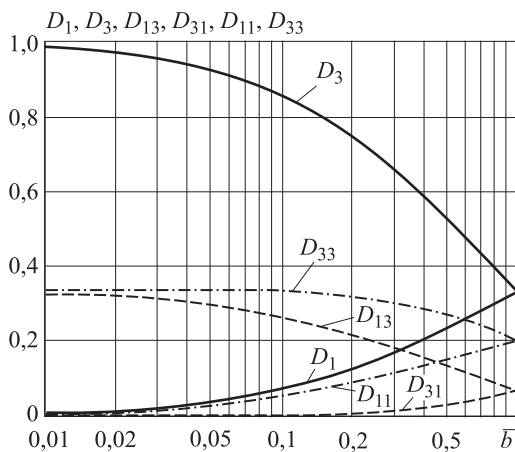


Рис. 1. Зависимости коэффициентов, определяющих компоненты тензора Эшелби, от параметра \bar{b}

ру Эшелби. Из графиков этих зависимостей, представленных на рис. 1 в полулогарифмических координатах, видно, что влияние удлинения на значения указанных коэффициентов пренебрежимо мало при $\bar{b} < 0,01$. Значения коэффициентов D_1 и D_3 при $\bar{b} \rightarrow 1$ стремятся к $1/3$, D_{13} и D_{31} — к $1/15$, а D_{11} и D_{33} — к $1/5$. При $\bar{b} \rightarrow 0$ значения коэффициентов D_1 , D_{31} и D_{11} стремятся к нулю, D_{13} и D_{33} — к $1/3$, а коэффициента D_3 — к 1.

При количественном анализе совместного влияния объемной концентрации включений и других определяющих параметров на упругие свойства композита ограничимся случаем композита с единственным типоразмером включений, определяемым значением \bar{b} , объемная концентрация которых соответствует значению C_V . Чтобы расширить область представления результатов расчетов, используем следующие формулы (9) и (10) для верхних и нижних оценок объемного модуля и модуля сдвига композита:

$$\begin{aligned} K_+ &= (1 - C_V)K^\circ + C_V K^*; \\ 1/K_- &= (1 - C_V)/K^\circ + C_V/K^*; \\ G_+ &= (1 - C_V)G^\circ + C_V G^*; \\ 1/G_- &= (1 - C_V)/G^\circ + C_V/G^*. \end{aligned}$$

Тогда при нормировании вычисляемых значений объемного модуля K композита по значению K_+ в виде отношения $\bar{K} = K/K_+$ область графического представления результатов расчетов этого модуля будет ограничена в положительном единичном квадранте с координатами C_V и \bar{K} сверху ординатой $\bar{K} = 1$, а снизу — кривой, построенной по формуле

$$\begin{aligned} \bar{K}_- &= \frac{K_-}{K_+} = \\ &= \frac{1}{[1 + C_V(K^\circ/K^* - 1)][1 + C_V(K^*/K^\circ - 1)]}. \end{aligned}$$

Аналогичным образом будет ограничена в единичном квадранте с координатами C_V и $\bar{G} = G/G_+$ область графического представления вычисляемых значений модуля сдвига G рассматриваемого композита. При этом нижняя граница этой области определена зависимостью

$$\bar{G}_- = \frac{G_-}{G_+} = \frac{1}{[1 + C_V(G^\circ/G^* - 1)][1 + C_V(G^*/G^\circ - 1)]}.$$

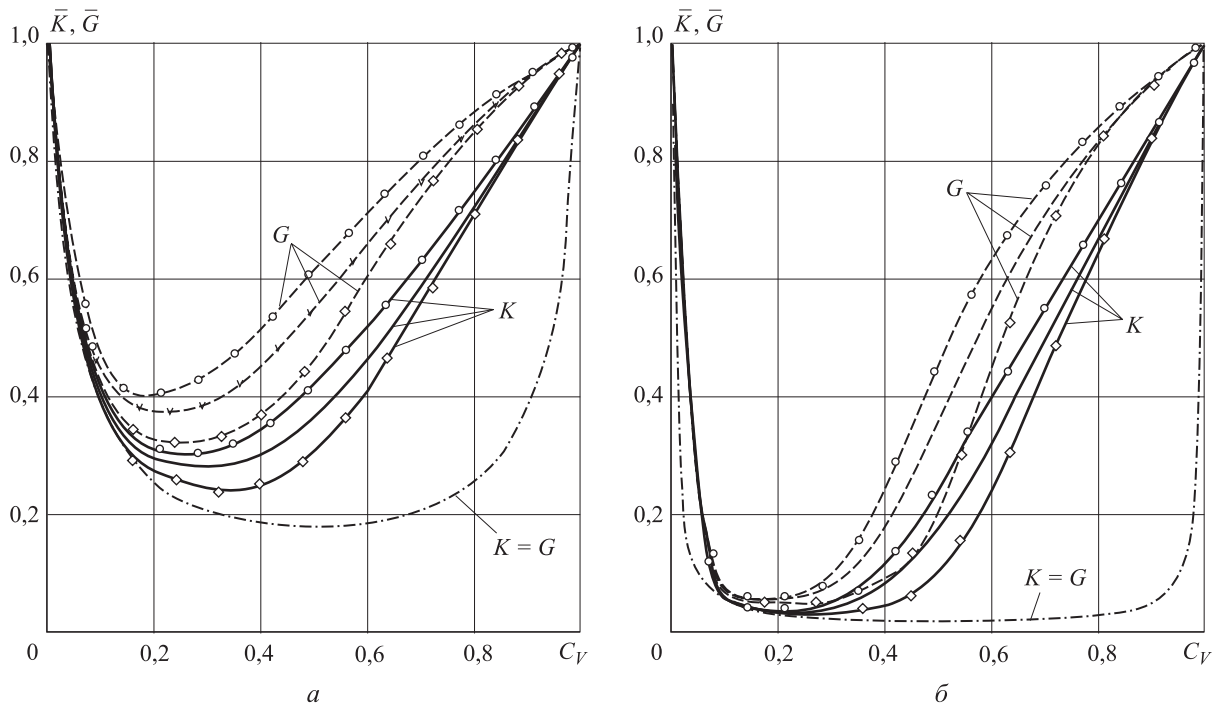


Рис. 2. Зависимости безразмерных модулей упругости композита от объемной концентрации включений в случае $K^*/K^\circ = 20$, $G^*/K^\circ = 10$ и $G^\circ/K^\circ = 0,5$ (а) и $K^*/K^\circ = 200$, $G^*/K^\circ = 100$, $G^\circ/K^\circ = 0,5$ (б) при $\bar{b} = 0,01$ (\diamond), $0,1$ ($*$) и 1 (\circ)

В случае $K^*/K^\circ = G^*/G^\circ$ области представления результатов расчетов обоих модулей совпадают. Для рассматриваемого композита система (8) двух нелинейных уравнений, решение которой определяет значения K и G , принимает вид

$$\begin{aligned} \left[(1 - C_V) \hat{u}^\circ + C_V \hat{u}^* \right] \dots \hat{V} &= 0, \\ \left[(1 - C_V) \hat{u}^\circ + C_V \hat{u}^* \right] \dots \hat{D} &= 0. \end{aligned}$$

На рис. 2, а представлены графики зависимостей \bar{K} (сплошные кривые) и \bar{G} (штриховые кривые) от C_V при фиксированных значениях $K^*/K^\circ = 20$, $G^*/K^\circ = 10$ и $G^\circ/K^\circ = 0,5$. Совпадающие нижние границы представления вычисляемых значений обоих модулей отмечены штрихпунктирной линией. Для каждого модуля расчеты проведены при $\bar{b} = 0,01$ (кривые с ромбами) и $\bar{b} = 0,1$ (кривые с галочкой). Кривые со светлыми кружками соответствуют предельному случаю шаровых включений. Видно, что изменение параметра \bar{b} мало влияет на значения модулей упругости композита при формальном условии $C_V \rightarrow 1$ и практически исчезает при $C_V < 0,1$. Переход от шаровых включений к включениям с параметром $\bar{b} = 0,1$ приводит примерно к такому же изменению значений модулей, как и при изменении этого параметра в промежутке $0,01 \dots 0,10$.

На рис. 2, б приведены результаты расчетов при фиксированных значениях $K^*/K^\circ = 200$, $G^*/K^\circ = 100$ и прежнем значении $G^\circ/K^\circ = 0,5$. Эти значения соответствуют тенденциям в применении более высокопрочных и высоко-модульных включений в качестве армирующих элементов композитов. Из сравнения результатов расчетов, представленных на рис. 2, а, б, следует, что при $C_V < 0,3$ с увеличением различия упругих характеристик включений и матрицы происходит существенное приближение значений модулей упругости композита к нижней границе области возможных значений этих модулей.

Выводы

Построение математической модели взаимодействия пластинчатых включений и частиц матрицы со средой, упругие свойства которой соответствуют искомым модулям упругости композита, позволило оценить влияние формы включений и их упругих характеристик на значения искомым модулей. Установлено, что при малой объемной концентрации C_V включений это влияние несущественно, но и с увеличением C_V различие модулей упругости композита при изменении формы пластинчатых включений в промежутке значений $\bar{b} = 0,01 \dots 1,00$ мало по

сравнению с абсолютными значениями этих модулей. Все результаты проведенных расчетов расположены в области параметров, ограниченной построенными двусторонними оценками

модулей упругости рассматриваемого композита, армированного пластинчатыми включениями.

Литература

- [1] Шермергор Т.Д. *Теория упругости микронеоднородных сред*. Москва, Наука, 1977. 400 с.
- [2] Сендецки Дж. *Механика композиционных материалов*. Москва, Мир, 1978. 564 с.
- [3] Кристенсен Р. *Введение в механику композитов*. Москва, Мир, 1982. 336 с.
- [4] Ванин Г.А. *Микромеханика композиционных материалов*. Киев, Наукова думка, 1985. 302 с.
- [5] Арзамасов Б.Н., Крашенинников А.И., Пастухова Ж.П., Рахштадт А.Г. *Научные основы материаловедения*. Москва, Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 1994. 366 с.
- [6] Ван Флек Л. *Теоретическое и прикладное материаловедение*. Москва, Атомиздат, 1975. 472 с.
- [7] Кан Р., ред. *Физическое металловедение*. В 3 т. Т. 2. Москва, Мир, 1968. 492 с.
- [8] Калинин В.А., Ягодников Д.А. *Технология производства ракетных двигателей твердого топлива*. Москва, Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2011. 688 с.
- [9] Комков М.А., Тарасов В.А. *Технология намотки композитных конструкций ракет и средств поражения*. Москва, Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2011. 432 с.
- [10] Кац Е.А. *Фуллерены, углеродные нанотрубки и нанокластеры. Родословная форм и идей*. Москва, Изд-во ЛКИ, 2008. 296 с.
- [11] Stankovich S., Dikin D.A., Dommett G.H.B., Kohlhaas K.M., Zimmey E.J., Stach E.A., Piner R.D., Nguyen S.T., Ruoff R.S. Graphene-based composite materials. *Nature*, 2006, vol. 442, pp. 282–286.
- [12] Chen Zh., Lin Yu.M., Rooks M.J., Avouris Ph. Graphene nano-ribbon electronics. *Physica E: Low-Dimensional Systems and Nanostructures*, 2007, vol. 40, pp. 228–232.
- [13] Елецкий А.В., Искандарова И.М., Книжник А.А., Красиков Д.Н. Графен: методы получения и теплофизические свойства. *Успехи физических наук*, 2011, т. 181, № 3, с. 233–268.
- [14] Беринский И.Е., Кривцов А.М. Об использовании многочастичных межатомных потенциалов для расчета упругих характеристик графена и алмаза. *Известия Российской Академии Наук. Механика твердого тела*, 2010, № 6, с. 60–85.
- [15] Erdemir A., Martin J.-M., eds. *Superlubricity*. Amsterdam, Elsevier, 2007. 524 p.
- [16] Зарубин В.С., Кувыркин Г.Н., Савельева И.Ю. Двусторонние оценки эффективной теплопроводности композита с анизотропными пластинчатыми включениями. *Наука и образование. МГТУ им. Н.Э. Баумана*, 2014, № 11, doi: 10.7463/1114.0737893. URL: <http://technomag.bmstu.ru/doc/737893.html> (дата обращения 01. 09. 2015).
- [17] Зарубин В.С., Кувыркин Г.Н., Савельева И.Ю. Теплопроводность текстурированного композита с анизотропными пластинчатыми включениями. *Композиты и наноструктуры*, 2015, т. 22, № 1, с. 1–13.
- [18] Эшелби Дж. *Континуальная теория дислокаций*. Москва, Изд-во иностр. лит., 1963. 248 с.
- [19] Зарубин В.С., Кувыркин Г.Н., Савельева И.Ю. Сравнительный анализ оценок модулей упругости композита. Изотропные шаровые включения. *Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Машиностроение*, 2014, № 5, с. 53–69.
- [20] Димитриенко Ю.И. *Тензорное исчисление*. Москва, Высшая школа, 2001. 576 с.
- [21] Зарубин В.С., Кувыркин Г.Н., Савельева И.Ю. Сравнительный анализ оценок модулей упругости композита. Анизотропные шаровые включения. *Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Машиностроение*, 2014, № 6, с. 20–31.
- [22] Цвелодуб И.Ю. Об обратном тензоре Эшелби. *Вестник Чувашского государственного педагогического института им. И.Я. Яковлева. Сер. Механика предельного состояния*, 2010, № 2(8), с. 530–535.
- [23] Hill R. A self-consistent mechanics of composite materials. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 1965, vol. 13, no. 4, pp. 213–222.

- [24] Головин Н.Н., Зарубин В.С., Кувыркин Г.Н. Смесевые модели механики композитов. Ч. 1. Термомеханика и термоупругость многокомпонентной смеси. *Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки*, 2009, № 3, с. 36–49.
- [25] Зарубин В.С., Кувыркин Г.Н. *Математические модели механики и электродинамики сплошной среды*. Москва, Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2008. 512 с.

References

- [1] Shermergor T.D. *Teoriia uprugosti mikroneodnorodnykh sred* [The theory of elasticity of micro environments]. Moscow, Nauka publ., 1977. 400 p.
- [2] Sendetski Dzh. *Mekhanika kompozitsionnykh materialov* [Mechanics of composite materials]. Moscow, Mir publ., 1978. 564 p.
- [3] Kristensen R. *Vvedenie v mekhaniku kompozitov* [Mechanics of Composite Materials]. Moscow, Mir publ., 1982. 336 p.
- [4] Vanin G.A. *Mikromekhanika kompozitsionnykh materialov* [Micromechanics of composite materials]. Kiev, Naukova dumka publ., 1985. 302 p.
- [5] Arzamasov B.N., Krasheninnikov A.I., Pastukhova Zh.P., Rakhshadt A.G. *Nauchnye osnovy materialovedeniia* [Scientific basis of materials]. Moscow, Bauman Press, 1994. 366 p.
- [6] Van Flek L. *Teoreticheskoe i prikladnoe materialovedenie* [Theoretical and Applied Materials]. Moscow, Atomizdat publ., 1975. 472 p.
- [7] Cahn R.W., Haasen P. *Physical Metallurgy*, 4 ed., North Holland, 1996, vol.2, 2888 p. (Russ. ed.: Kan R. *Fizicheskoe metallovedenie*. Moscow, Mir publ., 1968, vol. 2, 492 p).
- [8] Kalinchev V.A., Iagodnikov D.A. *Tekhnologiya proizvodstva raketnykh dvigatelei tverdogo topliva* [Technology of production of solid propellant rocket motors]. Moscow, Bauman Press, 2011. 688 p.
- [9] Komkov M.A., Tarasov V.A. *Tekhnologiya namotki kompozitnykh konstruktssii raket i sredstv porazheniia* [Winding technology of composite structures of missiles and weapons]. Moscow, Bauman Press, 2011. 432 p.
- [10] Kats E.A. *Fullereny, uglerodnye nanotrubki i nanoklastery. Rodoslovnaia form i idei* [Fullerenes, carbon nanotubes and nanoclusters. Genealogy forms and ideas]. Moscow, LKI publ., 2008. 296 p.
- [11] Stankovich S., Dikin D.A., Dommett G.H.B., Kohlhaas K.M., Zimmey E.J., Stach E.A., Piner R.D., Nguyen S.T., Ruoff R.S. Graphene-based composite materials. *Nature*, 2006, vol. 442, pp. 282–286.
- [12] Chen Zh., Lin Yu.M., Rooks M.J., Avouris Ph. Graphene nano-ribbon electronics. *Phisica E: Low-Dimensional Systems and Nanostructures*, 2007, vol. 40, pp. 228–232.
- [13] Eletskaia A.V., Iskandarova I.M., Knizhnik A.A., Krasikov D.N. Grafen: metody polucheniia i teplofizicheskie svoistva [Graphene: fabrication methods and thermophysical properties]. *Uspeski fizicheskikh nauk* [Advances in Physical Sciences]. 2011, t. 181, 3, s. 233–268.
- [14] Berinskii I.E., Krivtsov A.M. On using many-particle interatomic potentials to compute elastic properties of graphene and diamond. *Mechanics of Solids*, 2010, vol. 45, no. 6, pp. 815–834.
- [15] Erdemir A., Martin J.-M. Eds. *Superlubricity*. Amsterdam, Elsevier, 2007. 524 p.
- [16] Zarubin V.S., Kuvyrkin G.N., Savelyeva I.Yu. Dvustoronnie otsenki effektivnoi teploprovodnosti kompozita s anizotropnymi plastinchatymi vklucheniiami [Two-sided Estimates of Effective Thermal Conductivity of the Composite with Anisotropic Lamellar Inclusions]. *Nauka i obrazovanie. MGTU im. N.E. Baumana* [Science and Education. Bauman MSTU]. 2014, no. 11, doi: 10.7463/1114.0737893. Available at: <http://technomag.bmstu.ru/doc/737893.html> (accessed 01 September 2015).
- [17] Zarubin V.S., Kuvyrkin G.N., Savelyeva I.Yu. Teploprovodnost' teksturirovannogo kompozita s anizotropnymi plastinchatymi vklucheniiami [Thermal Conductivity of the Textured Composite with Anisotropic Lamellar Inclusions]. *Kompozity i nanostruktury* [Composites and nanostructures]. 2015, vol. 22, no. 1, pp. 1–13.
- [18] Eshelbi Dzh. *Kontinual'naia teoriia dislokatsii* [The continuum theory of dislocations]. Moscow, Izd-vo inostr. lit. publ., 1963. 248 p.

- [19] Zarubin V.S., Kuvyrkin G.N., Savelyeva I.Yu. Sravnitel'nyi analiz otsenok modulei uprugosti kompozita. Izotropnye sharovye vklucheniia [Comparative analysis estimates of elastic moduli for composite. Isotropic spherical inclusions]. *Vestnik MGTU im. N.E. Baumana. Ser. Mashinostroenie* [Herald of the Bauman Moscow State Technical University. Series Mechanical Engineering]. 2014, no. 5, pp. 53–69.
- [20] Dimitrienko Iu.I. *Tenzornoe ischislenie* [Tensor calculus]. Moscow, Vysshaia shkola publ., 2001. 576 p.
- [21] Zarubin V.S., Kuvyrkin G.N., Savelyeva I.Yu. Sravnitel'nyi analiz otsenok modulei uprugosti kompozita. Anizotropnye sharovye vklucheniia [Comparative analysis modulus elasticity estimates for composite anisotropic spherical inclusions]. *Vestnik MGTU im. N.E. Bauman. Ser. Mashinostroenie* [Herald of the Bauman Moscow State Technical University. Series Mechanical Engineering]. 2014, no. 6, pp. 20–31.
- [22] Tsvlodub I.Iu. Ob obratnom tenzore Eshelbi [On the inverse tensor of Eshelby]. *Vestnik Chuvashskogo gosudarstvennogo pedagogicheskogo instituta im. I.Ia. Iakovleva. Ser. Mekhanika predel'nogo sostoianiia* [I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University Bulletin. Ser. Mechanics limit States]. 2010, no. 2(8), pp. 530–535.
- [23] Hill R. A self-consistent mechanics of composite materials. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 1965, vol. 13, no. 4, pp. 213–222.
- [24] Golovin N.N., Zarubin V.S., Kuvyrkin G.N. Smesevye modeli mekhaniki kompozitov. Ch. 1. Termomekhanika i termouprugost' mnogokomponentnoi smesi [Mixture Models of Composite Mechanics. P. 1. Thermal Mechanics and Thermoelasticity of Multicomponent Mixture]. *Vestnik MGTU im. N.E. Baumana. Ser. Estestvennye nauki* [Herald of the Bauman Moscow State Technical University. Series Natural Sciences]. 2009, no. 3, pp. 36–49.
- [25] Zarubin V.S., Kuvyrkin G.N. *Matematicheskie modeli mekhaniki i elektrodinamiki sploshnoi sredy* [Mathematical models of mechanics and electrodynamics of continuous media]. Moscow, Bauman Press, 2008. 512 p.

Статья поступила в редакцию 07.09.2015

Информация об авторах

ЗАРУБИН Владимир Степанович (Москва) — доктор технических наук, профессор кафедры «Прикладная математика». МГТУ им. Н.Э. Баумана (105005, Москва, Российская Федерация, 2-я Бауманская ул., д. 5, стр. 1).

КУВЫРКИН Георгий Николаевич (Москва) — доктор технических наук, профессор, зав. кафедрой «Прикладная математика». МГТУ им. Н.Э. Баумана (105005, Москва, Российская Федерация, 2-я Бауманская ул., д. 5, стр. 1).

САВЕЛЬЕВА Инга Юрьевна (Москва) — кандидат физико-математических наук, доцент кафедры «Прикладная математика». МГТУ им. Н.Э. Баумана (105005, Москва, Российская Федерация, 2-я Бауманская ул., д. 5, стр. 1, e-mail: inga.savelyeva@gmail.com).

Information about the authors

ZARUBIN Vladimir Stepanovich (Moscow) — Doctor of Science (Eng.), Professor, Department of Applied Mathematics. Bauman Moscow State Technical University (105005, Moscow, Russian Federation, 2nd Baumanskaya St., Bldg. 5, Block 1).

KUVYRKIN Georgiy Nikolaevich (Moscow) — Doctor of Science (Eng.), Professor, Head of Department of Applied Mathematics. Bauman Moscow State Technical University (105005, Moscow, Russian Federation, 2nd Baumanskaya St., Bldg. 5, Block 1).

SAVELYEVA Inga Yurievna (Moscow) — Candidate of Science (Physics and Mathematics), Associate Professor, Department of Applied Mathematics. Bauman Moscow State Technical University (105005, Moscow, Russian Federation, 2nd Baumanskaya St., Bldg. 5, Block 1, e-mail: inga.savelyeva@gmail.com).