

УДК 531.36: 534.015: 621.01


DOI: 10.18698/0536-1044-2015-11-29-38

Прием, упрощающий решение задачи устойчивости параметрически стабилизированных статически неустойчивых маятниковых систем

В.А. Грибков, А.О. Хохлов

МГТУ им. Н.Э. Баумана, 105005, Москва, Российская Федерация, 2-я Бауманская ул., д. 5, стр. 1

A Method to Simplify Solution of Stability Problem for Parametrically Stabilized Statically Unstable Pendulum Systems

V.A. Gribkov, A.O. KhokhlovBMSTU, 105005, Moscow, Russian Federation, 2nd Baumanskaya St., Bldg. 5, Block 1 e-mail: zenit-ab@mail.ru

i Предложен прием, упрощающий решение линейной задачи устойчивости параметрически стабилизированных гармоническими колебаниями оси подвеса статически неустойчивых N -звенных обращенных маятников. Отличием приема от известных подходов (С. Оттербейн, Д. Ачесон, С.В. Челомей) является более широкая область применения, простота, оперативность решения задачи устойчивости и более высокая точность определения граничных линий области устойчивости маятниковых систем. Прием основан на использовании хорошо известного, всесторонне изученного уравнения Матьё, описывающего динамику и устойчивость одинарных математических маятников в нижнем и верхнем положениях относительного вертикального равновесия. Решение задачи устойчивости для уравнения Матьё в канонической (по Н.В. Мак-Лахлану) форме проще всего свести к анализу диаграммы Айнса — Стретта. В данной работе область использования диаграммы Айнса — Стретта распространена (путем модификации диаграммы) на обращенные маятниковые системы с произвольным числом степеней свободы.

Ключевые слова: инвертированный физический маятник, N -звенный маятник, параметрическое возбуждение, уравнение Матьё, динамическая стабилизация, диаграмма Айнса — Стретта.

i The authors propose a method that simplifies solution of a linear problem of stability of statically unstable N -link inverted pendulums with parametrically stabilized harmonic oscillations of the pivot axis. The difference of the method from the conventional approaches (S. Otterbein, D. Acheson, S.V. Chelomei) is in a wider range of application, ease and efficiency of solving the problem of stability, and a higher accuracy in determining boundary lines of stability area of the pendulum systems. The method is based on the well-known and extensively researched Mathieu equation that describes dynamics and stability of a simple mathematical pendulum in the bottom and top positions relative to the vertical equilibrium point. The solution of the stability problem for Mathieu equation in its canonical form (by N.V. McLachlan) can be easily reduced to the analysis of Ince-Strutt diagram. In this paper Ince-Strutt diagram is applied to inverted pendulum systems with an arbitrary number of degrees of freedom.

Keywords: inverted physical pendulum, N -link pendulum, parametric excitation, Mathieu equation, dynamic stabilization, Ince — Strutt diagram.

Введение. Постановка задачи. При решении линейной задачи устойчивости параметрически стабилизируемых статически неустойчивых обращенных плоских идеальных (без трения) маятниковых систем в настоящее время используется несколько методик.

Методика С. Оттербейна [1] основана на преобразовании подобия исходного векторно-матричного дифференциального уравнения, описывающего возмущенное движение обращенной маятниковой системы. Система состоит из последовательности одинаковых математических маятников. Координаты масс маятников совпадают с координатами шарнирных узлов. Для определения границ области устойчивости (нижней и верхней) автор воспользовался известными простейшими приближенными аналитическими выражениями для одинарного маятника.

Прием Д. Ачесона [2] базируется на правиле, сформулированном им как маятниковая теорема. Теорема позволяет построить область устойчивости обращенного маятника через использование частотного спектра прямого маятника, не подверженного параметрическому возбуждению. Область применения приема включает системы, образованные математическими маятниками, связанными через цилиндрические шарниры в местах расположения масс (плоская система). Необходимое условие использования приема — высшая собственная частота прямого маятника должна быть существенно ниже частоты параметрического возбуждения. Второе условие — квадраты высшей и низшей собственных частот прямого маятника должны значительно отличаться (в этом случае верхняя граница может аппроксимироваться прямой линией). Задача устойчивости решена приближенно, получены нижняя и верхняя границы области устойчивости маятника с N степенями свободы. Приближение для верхней границы имеет вид оценки (использовано предположение о прямолинейности верхней границы).

Подход С.В. Челомея представлен в [3] как обобщение задачи П.Л. Капицы для одинарного обращенного маятника на систему многозвенных гетерогенных математических маятников. Система уравнений медленного движения получена асимптотическим методом. Приведено решение задачи устойчивости в первом и втором приближениях. Получена нижняя граница области устойчивости.

Методика, основанная на теории Г. Флоке [4], является одной из наиболее эффективных и универсальных методик решения линейных задач устойчивости систем с параметрическим периодическим возбуждением. Решение задачи устойчивости выполняется численно с вычислением матрицы монодромии и определением мультипликаторов.

В данной работе предлагается методика решения линейной задачи устойчивости параметрически стабилизируемых статически неустойчивых систем, сводящихся к исследованию устойчивости обращенных N -звенных маятников. Принципиальным отличием методики от известных, в частности, от перечисленных выше аналитических методик [1–3] является более высокая точность определения граничных линий области устойчивости и более широкая область применения. От численной методики, основанной на теории Флоке [4], ее отличают простота и оперативность решения задачи устойчивости.

Предлагаемый прием ориентирован на использование в практике проектировочных расчетов элементов конструкций машин (в первую очередь космических тросовых систем), приводимых к дискретным расчетным схемам типа многозвенного маятника.

Прямым маятником будем называть маятник с центром тяжести, расположенным ниже оси подвеса. В противном случае называем маятник обращенным, или инвертированным. Будем называть собственными частотами собственные частотные характеристики прямого маятника, не подверженного параметрическому возбуждению.

Решение задачи устойчивости обращенного математического маятника с использованием классической диаграммы Айнса — Стретта.

Одинарный математический маятник — простейший всесторонне изученный образец маятниковой системы. Поведение математического маятника, находящегося в поле сил тяжести под действием гармонической вибрации оси подвеса в направлении вертикали, и описывающее его уравнение Матъё [5–8] анализировались многими известными учеными как в нашей стране, так и за рубежом. Появляются новые работы по теории, приложениям функций Матъё и стабилизации маятниковых систем [9–11] и др.

Один из наиболее простых и поэтому

наиболее удобных способов решения задачи устойчивости обращенного вертикального положения математического маятника (устойчивости уравнения Матъё) основан на использовании диаграммы Айнса — Стретта.

В этом случае уравнение движения маятника, представляется в канонической, по Н.В. Мак-Лахлану [5], безразмерной форме:

$$\frac{d^2\varphi}{d\tau^2} + (a - 2q \cos 2\tau)\varphi = 0, \quad \tau, \varphi(\tau) \in \mathbb{R}, \quad (1)$$

где φ — отклонение маятника от вертикали; τ — безразмерное время, связанное с размерным временем t соотношением $\tau = tp/2$; p — частота параметрического возбуждения; $a = 4(p_1/p)^2$ — относительный частотный параметр (для прямого маятника a положителен, для обращенного — отрицателен); p_1 — собственная частота прямого маятника; $q = 2a_* p_1^2 / g = 2a_* / l$ — относительный амплитудный параметр; a_* — амплитудный параметр возбуждения; l — длина маятника; $y = a_* \cos(pt)$ — параметрическое возбуждение в размерных параметрах, действующее в направлении вертикали (по оси y).

При решении задачи устойчивости вертикального положения математического маятника уравнение движения маятника (1) рассматривается как уравнение в возмущениях при заданных параметрах воздействия — частотном a и амплитудном q . Безразмерные параметры a и q определяют поведение решений (1), формируя на плоскости безразмерных параметров $q = f(a)$ в осях прямоугольной системы Oaq области устойчивых и неустойчивых решений уравнения Матъё. Графическое представление областей устойчивости и неустойчивости решений уравнения Матъё целого порядка на плоскости безразмерных параметров называют диаграммой Айнса — Стретта (рис. 1). Правая полуплоскость ($a > 0$) содержит информацию по прямому маятнику, левая ($a < 0$) — по обращенному.

Для решения задачи устойчивости того или иного конкретного обращенного маятника с использованием диаграммы Айнса — Стретта достаточно определить местоположение изображающей точки по параметрам a и q на диаграмме Айнса — Стретта. При попадании в область устойчивости система устойчива, в противном случае — неустойчива.

В соответствии с первой теоремой Флоке [4] фундаментальная матрица решений линейной

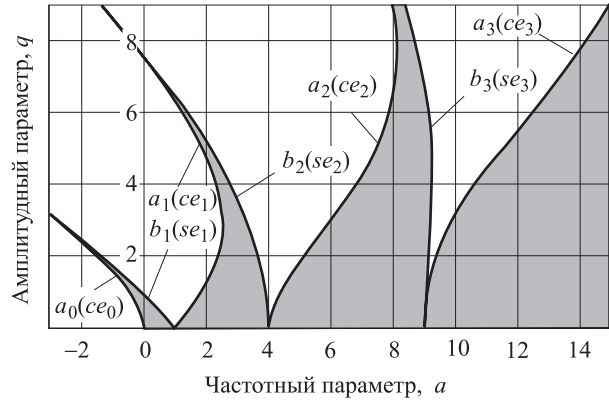


Рис. 1. Области устойчивости диаграммы Айнса — Стретта (выделены серым тоном) и граничные линии

системы порядка $2N$ с вектором фазовых переменных $\varphi_* = \{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_N, \dot{\varphi}_1, \dots, \dot{\varphi}_{2N}\}$

$$\frac{d\varphi_*}{dt} = \mathbf{A}(t)\varphi_*, \quad t \in \mathbb{R}, \quad \varphi_* \in \mathbb{R}^{2N}, \quad (2)$$

с T -периодической неособенной кусочно-непрерывной на $(-\infty, +\infty)$ матрицей коэффициентов $\mathbf{A}(t)$, имеет представление Флоке вида $\mathbf{X}(t) = \mathbf{\Phi}(t) \exp(\mathbf{\Xi} t)$, где $\mathbf{\Phi}(t)$ — T -периодическая неособенная кусочно-гладкая матрица на $(-\infty, +\infty)$, причем $\mathbf{\Phi}(0) = \mathbf{E}$ и $\mathbf{\Xi}$ — постоянная матрица. Матрица $\mathbf{X}(T)$ носит название матрицы монодромии, собственные значения ρ_i матрицы монодромии $\mathbf{X}(T)$ называются ее мультипликаторами.

Вторая теорема Флоке говорит о существовании нетривиального решения $\psi(t)$ периодической системы (2) для любого мультипликатора ρ_i . Мультипликатор матрицы монодромии ρ_i связывает нетривиальное решение $\psi(t)$ с $\psi(t+T)$ через множитель (мультипликатор) в виде $\psi(t+T) = \rho_i \psi(t)$ (решение, называемое нормальным). Мультипликаторы ρ_i и характеристические показатели ξ_i экспоненты Флоке $\exp(\xi_i T)$ соотносятся как $\xi_i = (1/T) \ln \rho_i$ или $\rho_i(T) = \exp(\xi_i T)$.

Применение теории Флоке к уравнению Матъё (1) приводит к общему решению (представлению Флоке) вида [12]

$$\varphi(\tau) = C_1 e^{\xi \tau} \tilde{\varphi}(\tau) + C_2 e^{-\xi \tau} \tilde{\varphi}(-\tau), \quad (3)$$

где C_1, C_2 — константы; $\xi_j \neq 0, \pm 1, \pm 2, \dots$; $\tilde{\varphi}(\tau)$ — функция, периодическая по τ , с периодом π ; ξ — характеристический показатель экспоненты Флоке; j — мнимая единица.

Характеристический показатель Флоке ξ для уравнения Матъё в зависимости от пара-

метров a и q принимает мнимые, вещественные или комплексные значения. При мнимых значениях ξ решения (2) ограничены, устойчивы. Эти решения описывают поведение системы внутри областей устойчивости. Вещественные и комплексные значения ξ определяют неограниченно растущие решения уравнения (1) в областях неустойчивости.

Вторым случаем (наряду с (3), но не входящим в него), является решение уравнения (1) для граничных линий — линий раздела областей устойчивости и неустойчивости. На граничных линиях диаграммы Айнса — Стретта

$$\xi_j = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (4)$$

Решения уравнения Матъё на граничных линиях являются периодическими (с периодом π или 2π), их называют функциями Матъё. С учетом линейно независимой второй функции фундаментальной системы общее решение запишется

$$\varphi(\tau) = C_1 \tilde{\varphi}_0(\tau) + C_2 \tau \tilde{\varphi}_0(-\tau). \quad (5)$$

Второе решение линейно растет по τ при условии, что $q \neq 0$.

В (5) функции Матъё обозначены $\tilde{\varphi}_0(\tau)$. Часто [5, 12] нечетные функции Матъё обозначают $se_{2n+1}(\tau, q)$, четные $ce_{2n}(\tau, q)$. В обозначениях $n = 0, 1, 2, \dots$ целые числа — порядок функции Матъё. Порядок функций Матъё определяется номером области неустойчивости (номером простого параметрического резонанса) [5].

Некоторое частное значение параметра a , соответствующее периодическому решению уравнения Матъё, для которого выполняется (4), называют собственным значением функций Матъё [5] или собственным значением уравнения Матъё [12].

Собственные значения $a_n(q)$ функций Матъё $se(\tau, q)$, $ce(\tau, q)$ обозначаются, обычно, как $b_n(q)$, или $b_n(se_n)$ — определяют левые границы резонансов; $a_n(q)$, или $a_n(ce_n)$ — определяют правые границы резонансов.

В данной работе рассматривается устойчивость обращенных маятниковых систем, информация для которых находится на левой полуплоскости (a, q) с отрицательным частотным параметром a и простыми параметрическими резонансами нулевого и первого порядков. Правая граница области простого резонанса нулевого порядка $a_0(ce_0)$ образует нижнюю границу области устойчивости, а ле-

вая граница простого резонанса первого порядка $b_1(se_1)$ — верхнюю границу области устойчивости.

Методика решения задачи устойчивости обращенного маятника произвольной размерности, основанная на модификации диаграммы Айнса — Стретта. Покажем как, модифицированную диаграмму Айнса — Стретта можно применить к исследованию устойчивости маятниковых систем не с одной, а с произвольным числом степеней свободы.

Для определенности выберем в качестве объекта обращенный плоский математический маятник с числом звеньев N , находящийся в земном поле сил тяжести с ускорением свободного падения g под действием моногармонической вертикальной вибрации $y = a \cos(pt)$ заданной амплитуды a , и частоты p (рис. 2, а). Считаем, что параметрическое возбуждение системы приводит к малым отклонениям маятника и задача устойчивости решается в линейном приближении. Звенья нумеруем от корневого звена маятника (оси подвеса) к концевому звену ($i = 1, N$).

В качестве примера применения методики далее рассмотрен плоский двойной $N = 2$ физический маятник (рис. 2, б). На схемах математического и физического маятников центры инерции звеньев маятников обозначены окружностями с четырьмя контрастными секторами.

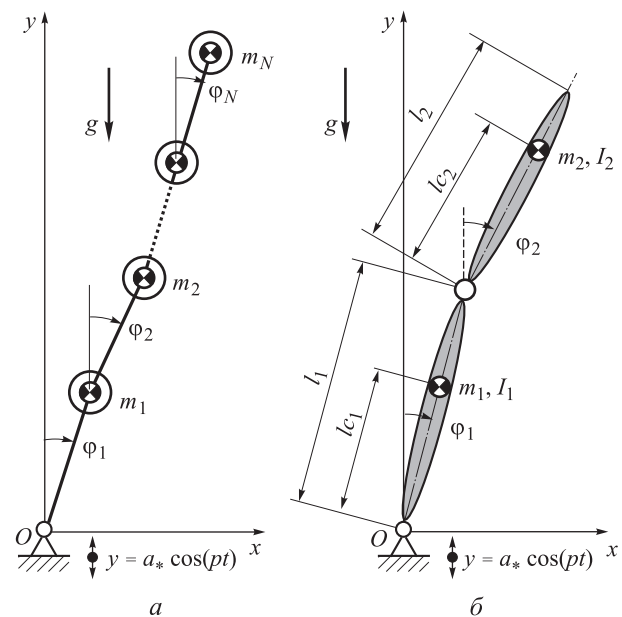


Рис. 2. Схемы параметрически стабилизируемого обращенного плоского математического маятника из N звеньев (а) и двойного физического маятника (б)

Параметры звеньев маятников: масса звена m_i , момент инерции относительно центра инерции звена I_i ; длина звена — расстояние между осями шарниров звена (для всех звеньев кроме конечного) или расстояние от оси шарнира до конечной точки звена (для конечного звена) — l_i . Дополнительно для физического маятника следует задать расстояние от корневого шарнира звена до центра инерции звена l_{ci} .

Уравнения движения обращенного плоско-го идеального математического N -маятника с параметрическим возбуждением получены с использованием уравнения Лагранжа второго рода. Применение в качестве обобщенных координат малых угловых отклонений звеньев маятника от вертикали приводит к системе обыкновенных дифференциальных уравнений в векторно-матричной размерной форме

$$\mathbf{M} \frac{d^2 \boldsymbol{\varphi}}{dt^2} + (-g + a_* p^2 \cos(pt)) \mathbf{C} \boldsymbol{\varphi} = \mathbf{0}, \quad (6)$$

$$t \in \mathbb{R}, \quad \boldsymbol{\varphi}(t) \in \mathbb{R}^N,$$

где \mathbf{M} — положительноопределенная симметрическая инерционная матрица; \mathbf{C} — диагональная матрица квазижесткости; $\boldsymbol{\varphi} \in \mathbb{R}^N$, $\boldsymbol{\varphi} = \{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_i, \dots, \varphi_N\}$ — вектор обобщенных координат — угловых отклонений звеньев маятника от вертикали.

Выполним переход к нормальным координатам $\boldsymbol{\theta} = \{\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_i, \dots, \theta_N\}$ с использованием соотношений ортогональности с матрицами (инерционной и квазижесткости). После перехода к безразмерным параметрам (частотному, амплитудному и времени) получим уравнения, которые в скалярной форме запишутся как канонические уравнения Матьё (аналогично уравнению одинарного маятника (1)):

$$\frac{d^2 \theta_i}{d\tau^2} + (a_i - 2q_i \cos 2\tau) \theta_i = 0, \quad (7)$$

$$\tau, \theta_i(\tau) \in \mathbb{R}, \quad i = \overline{1, N}.$$

Для каждого из уравнений Матьё (7) может быть построена диаграмма Айнса — Стретта на своей плоскости безразмерных параметров. Сколько степеней свободы в системе — столько и диаграмм. Диаграммы при этом абсолютно одинаковые, хотя размерные параметры (амплитуда и частота воздействия) индивидуальные для каждого отдельного маятника.

Для получения области устойчивости мно-

гозвенного маятника необходимо свести на одну общую диаграмму области устойчивости отдельных маятников, построенных в осях с общими для всех маятников частотным и амплитудным параметрами.

Выберем в качестве базовых безразмерных параметров и базовой диаграммы диаграмму Айнса — Стретта для уравнения Матьё с низшей собственной частотой с единицами измерения по каждой из двух осей (вертикальной и горизонтальной), соответствующих низшему (первому) тону колебаний:

$$a_1 = 4 \left(\frac{p_1}{p} \right)^2; \quad q_1 = \frac{2a_* p_1^2}{g} = \frac{2a_*}{l_1}.$$

Для остальных диаграмм (для всех тонов выше первого, т. е. $i > 1$), накладываемых на базовую диаграмму, необходимо масштабировать (пересчитать) частотный $a_i^i = a_i (p_1/p_i)^2$, и амплитудный $q_i^i = q_i (p_1/p_i)^2 = q_i (l_i/l_1)$ параметры, где $a_i = 4(p_i/p)^2$, $q_i = 2a_* p_i^2/g = 2a_*/l_i$ — индивидуальные безразмерные параметры i -го маятника; $(p_1/p_i)^2 = (l_i/l_1)$ — коэффициенты масштабирования (масштабные множители), p_i — i -я собственная частота прямого маятника с покоящейся осью подвеса, l_i — i -я длина прямого математического (или приведенная длина физического) маятника, с покоящейся осью подвеса, a_i^i , q_i^i — i -е частотный и амплитудный параметры в осях диаграммы Айнса — Стретта с едиными параметрами низшего (первого) тона колебаний.

Значения координат граничных линий $a_i^i = f(q_i^i)$ пересчитываются умножением на масштабирующие множители $(p_1/p_i)^2$. В результате на модифицированной диаграмме Айнса — Стретта получают столько наложенных с масштабированных диаграмм, сколько степеней свободы имеет рассматриваемая система.

Область устойчивости обращенного N -маятника ограничивается самой верхней из нижних границ $a_0(ce_0)$ и самой нижней из верхних границ $b_1(se_1)$. Низшая граница области устойчивости получается на диаграмме из уравнения (7) с низшей собственной частотой колебаний ($i = 1$) прямого маятника. Верхняя граница определяется высшей собственной частотой колебаний прямого маятника ($i = N$). Следовательно, при определении области устойчивости обращенного N -маятника нет необходимости строить области первого и нулевого порядков для всех собственных частот. Достаточно огра-

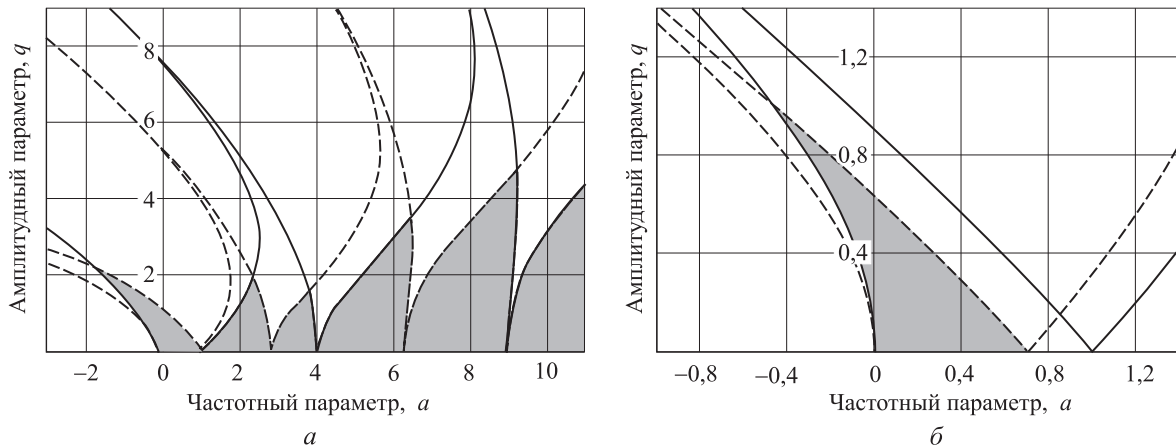


Рис. 3. Пример модифицированной диаграммы Айнса — Стретта для двойного маятника с отношением квадратов собственных частот, равным 0,7 (сплошные кривые отвечают первому тону колебаний, штриховые — второму)

ничиться построением только двух граничных кривых — верхней и нижней.

В качестве примера на рис. 3 приведена модифицированная диаграмма Айнса — Стретта для двойного маятника с отношением квадратов собственных частот, равным 0,7. На рис. 3, а представлено изменение положения и вида граничных линий (соответствующих второму тону) простых резонансов нулевого, первого, второго и третьего порядков на плоскости безразмерных параметров первого тона. Граничные линии, соответствующие первому тону показаны сплошными линиями, соответствующие второму тону — штриховыми. На рис. 3, б часть той же диаграммы в области начала координат показана в большем масштабе. Область устойчивости выделена на рис. 3 — серым цветом. Граничные функции (характеристические линии) на рис. 3, а построены по таблице собственных значений функций Матъё целого порядка [5], на рис. 3, б по [13] — с модификацией диаграммы.

Таким образом, процедура построения области устойчивости статически неустойчивой маятниковой системы произвольной размерности, основанная на модификации классической диаграммы Айнса — Стретта для одинарного маятника сводится к нескольким простейшим операциям.

Рекомендуемые способы получения числовых данных для построения диаграммы Айнса — Стретта и вычислительные особенности представления собственных значений функций Матъё в виде степенных рядов. Для реализации описанного приема следует иметь числовые

данные для построения диаграммы Айнса — Стретта с необходимой для решения задачи устойчивости точностью. Рассмотрим несколько способов получения числовых данных для построения диаграммы Айнса — Стретта.

Первый (простейший) способ получения числовых данных, необходимых для построения диаграммы Айнса — Стретта, заключается в использовании таблиц собственных значений из литературных источников [5, 13].

Вторым способом получения числовых данных является использование разложения собственных значений функций Матъё целого порядка в степенные ряды, или ряды Фурье, или использование иных расчетных соотношений (рекуррентных соотношений, бесконечных дробей) из числа имеющихся в литературе [5, 12, 13 и др.].

Третий способ основан на использовании современных систем компьютерной математики, в первую очередь Wolfram Mathematica, имеющей встроенные функции Матъё и встроенные собственные значения функций Матъё.

Таким образом, существует несколько способов получения необходимой информации для построения как классической, так и модифицированной диаграммы Айнса — Стретта.

В рассматриваемом случае обращенных статически неустойчивых маятниковых систем интерес представляют области главного резонанса и резонанса нулевого порядка. Оценим влияние на результаты расчета граничных линий (собственных значений функций Матъё) числа удерживаемых членов ряда при использовании разложений в степенные ряды (второй способ получения числовых данных).

Для собственного значения $a_0(q)$ имеем четыре члена степенного ряда, описывающего нижнюю границу области устойчивости обращенного одинарного маятника [5]:

$$a_0(q) = -\frac{1}{2}q^2 + \frac{7}{128}q^4 - \frac{29}{2304}q^6 + \frac{68687}{18874368}q^8 + O(q^{10}). \quad (8)$$

Ряд, описывающий верхнюю границу обращенного маятника и левую границу прямого маятника $b_1(q)$, имеет вид [5]

$$b_1(q) = 1 - q - \frac{1}{8}q^2 + \frac{1}{64}q^3 - \frac{1}{1536}q^4 - \frac{11}{36864}q^5 + \frac{49}{589824}q^6 - \frac{55}{9437184}q^7 - \frac{265}{113246208}q^8 + O(q^9). \quad (9)$$

На рис. 4, а в качестве примера приведены результаты расчетов граничных линий модифицированной диаграммы Айнса — Стретта для двойного обращенного маятника с соотношением квадратов собственных частот, равным 0,2019. Кривые иллюстрируют изменение положения граничных линий (сходимость) при удержании разного числа членов ряда (1–5) для нижней граничной линии $a_0(q)$ (определяемой

низшей собственной частотой) и верхней граничной линии $b_1(q)$ (определяемой высшей собственной частотой).

Кривая собственного значения нулевого порядка $a_0(q)$ построена для первой собственной частоты при удержании одного (1), двух (2), трех (3) и четырех (4) членов ряда (8). Кривая $b_1(q)$ построена при удержании двух (2), трех (3) и пяти (5) членов ряда (9). Граничные линии, построенные по точным данным из [13] с описанной выше модификацией, обозначены a и b .

Рис. 4, б построен также для двойного маятника, но с различным отношением квадратов собственных частот (1,0; 0,7; 0,2 и 0,05). В указанном диапазоне отношений квадратов собственных частот число удерживаемых членов влияет на граничную линию нулевого порядка (нижняя граница) очень слабо. Результаты, полученные с удержанием от одного до четырех членов ряда, на диаграмме совпали с точными, в то время как положение верхней границы заметно изменяется при сохранении различного числа членов ряда (9). Верхние граничные линии построены по точным данным (сплошные линии) и при использовании двух членов ряда (9) (штриховые).

Пример решения задачи устойчивости для двойного обращенного физического маятника

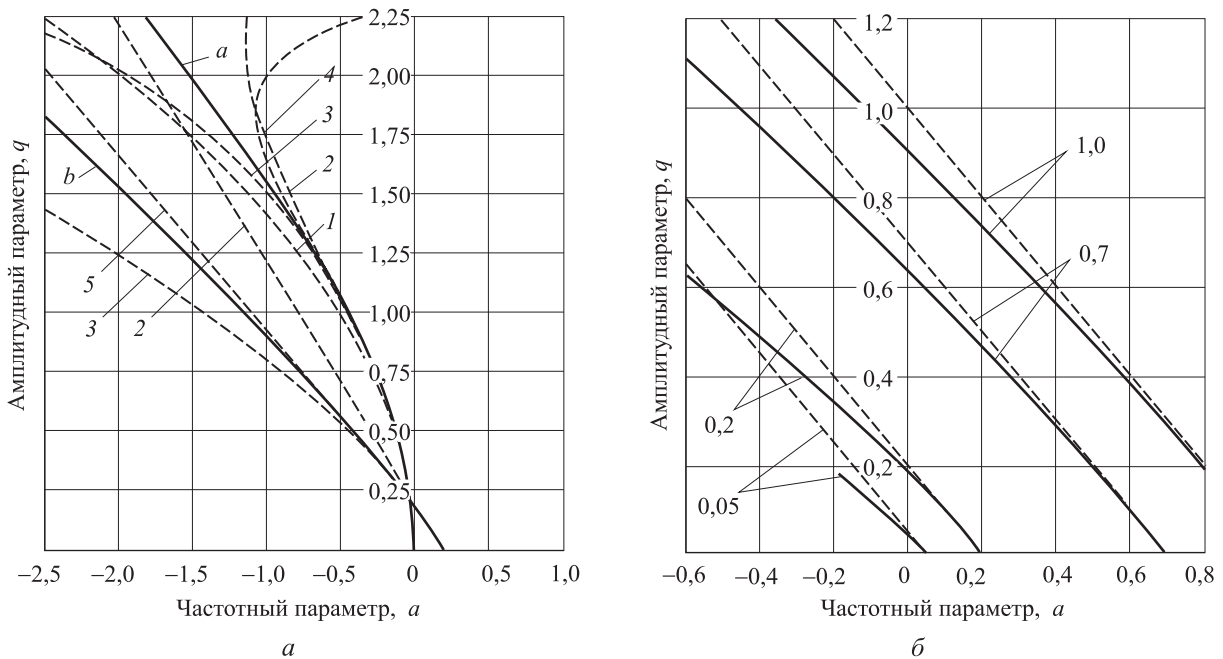


Рис. 4. Область начала координат модифицированной диаграммы Айнса — Стретта для обращенного двойного маятника

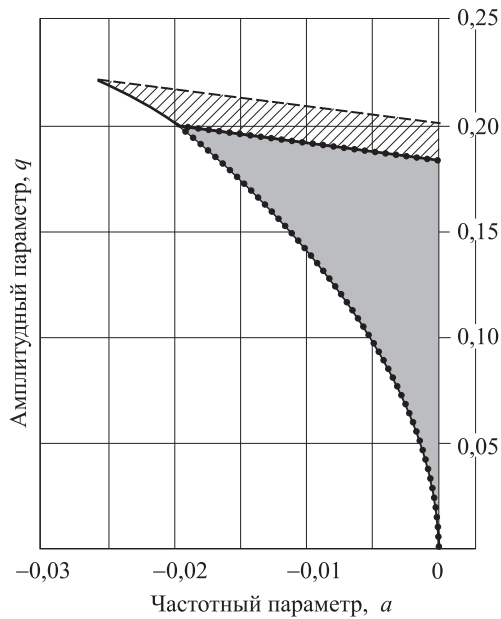


Рис. 5. Результаты расчета области устойчивости двойного обращенного физического маятника, полученные с использованием четырех методик

ка с использованием модифицированной диаграммы Айнса — Стретта. Рассмотрим использование предлагаемого приема при решении задачи устойчивости обращенного двойного физического маятника, находящегося в земном поле сил тяжести (см. рис. 2, б)

Геометрические и инерционные параметры маятника, необходимые для определения области устойчивости, представлены в таблице. Собственные частоты, полученные по программе в Wolfram Mathematica, для первого и второго тонов колебаний составляют 2,289 и 5,094 Гц.

Необходимый безразмерный параметр для модификации диаграммы Айнса — Стретта — отношение квадратов собственных частот (нижнего к верхнему) равен 0,2019.

Полученная с использованием предложен-

Таблица 1

№ звена	m_i , г	l_i , мм	l_{ci} , мм	I_i , г мм ²
1	1,032	45,0	24,917	146,804
2	0,424	26,2	12,838	32,871

ного приема решения задачи устойчивости модифицированная диаграмма Айнса — Стретта показана на рис. 5. Границы области устойчивости, найденные с помощью предлагаемого приема (сплошные линии) и с использованием теории Флоке (точечные линии), практически совпадают. Результаты для верхней границы, по С. Оттербейну [1] и Д. Ачесону [2] (штриховая линия), не только сильно отличаются от фактических, но и существенно искажают область устойчивости, расширяя ее границы, добавляя к ней несуществующую подобласть сверху (заштрихована).

Главные результаты и выводы

1. Предложен прием, позволяющий упростить решение задачи устойчивости статически неустойчивых параметрически стабилизируемых маятниковых систем произвольной размерности.

2. Прием отличается от известных аналитических методик решения задачи устойчивости (С. Оттербейн, Д. Ачесон, С.В. Челомей) простотой, оперативностью получения результата, более высокой точностью и более широкой областью применения.

3. В отличие от методики, основанной на теории Флоке, предлагаемый прием не требует применения специальной вычислительной программы.

4. Расчетные результаты, полученные с помощью предлагаемого приема и с использованием теории Флоке, практически совпали.

Литература

- [1] Otterbein S. Stabilisierung des n-Pendels und der Indische Seiltrick. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 1982, vol. 78, pp. 381–393.
- [2] Acheson D.J. A pendulum theorem. *Proceedings of the Royal Society A*, 1993, vol. 443, pp. 239–245.
- [3] Челомей С.В. О двух задачах динамической устойчивости колебательных систем, поставленных академиками П.Л. Капицей и В.Н. Челомеем. *Изв. АН СССР. МТТ*, 1999, № 6, с. 159–166.
- [4] Демидович Б.П. *Лекции по математической теории устойчивости*. Санкт-Петербург, Лань, 2008. 480 с.

- [5] Мак-Лаклан Н.В. *Теория и приложения функций Маттьё*. Москва, Изд-во иностранной лит-ры, 1953. 475 с.
- [6] Уиттекер Э. Т., Ватсон Дж. Н. *Курс современного анализа*. Москва, Едиториал УРСС, 2015. 864 с.
- [7] Абрамовиц М., Стиган И., ред. *Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и математическими таблицами*. Москва, Наука, 1979. 832 с.
- [8] Бейтмен Г., Эрдейи А. *Высшие трансцендентные функции*. Т. 3. Москва, Наука, 1967. 300 с.
- [9] Абрамов А.А., Курочкин С.В. Вычисление решений уравнения Маттьё и связанных с ними величин. *Журнал вычислительной математики и математической физики*, 2007, т. 47, № 3, с. 414–423.
- [10] Кашеваров А.В. Функции Маттьё и кулоновские сфероидальные функции в теории электрического зонда. *Журнал вычислительной математики и математической физики*, 2011, т. 51, № 12, с. 2269–2278.
- [11] Arkhipova I.M., Luongo A., Seyranian A.P. Vibrational stabilization of the upright statically unstable position of a double pendulum. *Journal of Sound and Vibration*, 2012, vol. 331, iss. 2, pp. 457–469.
- [12] Цимринг Ш.Е. *Специальные функции и определенные интегралы*. Москва, Радио и связь, 1988. 272 с.
- [13] *Таблицы для вычисления функций Маттьё: собственные значения, коэффициенты и множители связи. Большие математические таблицы*. Москва, ВЦ АН СССР, 1967. 279 с.

References

- [1] Otterbein S. Stabilisierung des n-Pendels und der Indische Seiltrick. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 1982, vol. 78, pp. 381–393.
- [2] Acheson D.J. A pendulum theorem. *Proceedings of the Royal Society A*, 1993, vol. 443, pp. 239–245.
- [3] Chelomei S.V. O dvukh zadachakh dinamicheskoi ustoichivosti kolebatel'nykh sistem, post-avlennykh akademikami P.L. Kapitsei i V.N. Chelomeem [On two problems of dynamic stability of oscillatory systems set academicians P.L. Kapitsa and V.N. Chelomey]. *Izvestiia Rossiiskoi Akademii nauk. Mekhanika tverdogo tela* [A Journal of Russian Academy of Sciences. Mechanics of Solids]. 1999, no. 6, pp. 159–166.
- [4] Demidovich B.P. *Lektsii po matematicheskoi teorii ustoichivosti* [Lectures on mathematical theory of stability]. St. Petersburg, Lan' publ., 2008. 480 p.
- [5] Mak-Lakhlan N.V. *Teoriia i prilozheniia funktsii Mat'e* [Theory and application functions Mathieu]. Moscow, Inostrannaia literatura publ., 1953. 475 p.
- [6] Uitteker E. T., Vatson Dzh. N. *Kurs sovremennogo analiza* [Course of Modern Analysis]. Moscow, Editorial URSS publ., 2015. 864 p.
- [7] *Spravochnik po spetsial'nyim funktsiiam s formulami, grafikami i matematicheskimi tablitsami* [Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables]. Ed. Abramovits M., Stigan I. Moscow, Nauka publ., 1979. 832 p.
- [8] Beitmen G., Erdeii A. *Vysshie transtsendentnye funktsii* [Higher transcendental functions]. Vol. 3. Moscow, Nauka publ., 1967. 300 p.
- [9] Abramov A.A., Kurochkin S.V. Calculation of solutions to the Mathieu equation and of related quantities. *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 2007, vol. 47, no. 3, pp. 397–406.
- [10] Kashevarov A.V. Mathieu functions and coulomb spheroidal functions in the electrostatic probe theory. *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 2011, vol. 51, no. 12, pp. 2137–2145.
- [11] Arkhipova I.M., Luongo A., Seyranian A.P. Vibrational stabilization of the upright statically unstable position of a double pendulum. *Journal of Sound and Vibration*, 2012, vol. 331, iss. 2, pp. 457–469.
- [12] Tsimring Sh.E. *Spetsial'nye funktsii i opredelennye integraly* [Special functions and definite integrals]. Moscow, Radio i sviaz' publ., 1988. 272 p.

- [13] *Tablitsy dlia vychisleniia funktsii Mat'e: sobstvennye znacheniiia, koeffitsienty i mnozhiteli sviazi* [Tables for the calculation of Mathieu functions: eigenvalues, ratios and multipliers communication]. Moscow, VTs AN SSSR publ., 1967. 279 p.

Статья поступила в редакцию 11.06.2015

Информация об авторах

ГРИБКОВ Владимир Арсеньевич (Москва) — кандидат технических наук, доцент кафедры «Аэрокосмические системы». МГТУ им. Н.Э. Баумана (105005, Москва, Российская Федерация, 2-я Бауманская ул., д. 5, стр. 1, e-mail: zenit-ab@mail.ru).

ХОХЛОВ Алексей Олегович (Москва) — аспирант кафедры «Аэрокосмические системы». МГТУ им. Н.Э. Баумана (105005, Москва, Российская Федерация, 2-я Бауманская ул., д. 5, стр. 1, e-mail: zenit-ab@mail.ru).

Information about the authors

GRIBKOV Vladimir Arsenievich (Moscow) — Candidate of Science (Eng.), Associate Professor, Department of Aerospace Systems. Bauman Moscow State Technical University (105005, Moscow, Russian Federation, 2nd Baumanskaya St., Bldg. 5, Block 1, e-mail: zenit-ab@mail.ru).

KHOKHLOV Aleksey Olegovich (Moscow) — Post Graduate, Department of Aerospace Systems. Bauman Moscow State Technical University (105005, Moscow, Russian Federation, 2nd Baumanskaya St., Bldg. 5, Block 1, e-mail: zenit-ab@mail.ru).



В Издательстве МГТУ им. Н.Э. Баумана
вышло в свет учебное пособие
Н.Г. Назарова

«Методы экспериментальной оценки качества партии изделий с учетом степени риска»

Рассмотрены три вида экспериментальной оценки качества партий однородных изделий: сплошной контроль, контроль с использованием случайной однократной выборки и случайной последовательной выборки. Для всех видов оценки качества партий дан анализ затрат производителя партии, а также доходов и потерь потребителя. Обоснованы условия, при реализации которых производителю целесообразно отказаться от оценки качества партии и выплатить потребителю компенсацию за дефектные изделия.

По вопросам приобретения обращайтесь:

105005, Москва, 2-я Бауманская ул., д. 5, стр. 1.
Тел.: +7 499 263-60-45, факс: +7 499 261-45-97;
press@bmstu.ru; www.baumanpress.ru