

УДК 531.134

DOI: 10.18698/0536-1044-2015-12-11-16

# Кинематика параллельного механизма, состоящего из вращательных пар

**М.Л. Иоффе**

США, Нью-Йорк, 2-я Авеню, д. 444

## Kinematics of a Parallel Mechanism Consisting of Rotational Pairs

**M.L. Ioffe**444, 2<sup>nd</sup> Avenue, New York, USA e-mail: [ioffe.mark@gmail.com](mailto:ioffe.mark@gmail.com)

**i** Рассмотрен один из возможных количественных подходов к анализу кинематики широко распространенного в робототехнике механизма параллельной структуры, состоящего из плоских вращательных пар. Каждая из трех параллельных ветвей механизма включает четыре тела и соединяет неподвижное основание с выходным звеном. Механизм имеет 13 подвижных звеньев и 15 пар пятого класса, т. е.  $13 \cdot 6 - 15 \cdot 5 = 3$  степени свободы. Таким образом, 15 обобщенных координат, углов поворота одного звена относительно другого, связаны 12 уравнениями связи. Рассмотрен численный алгоритм решения уравнений связи, позволяющий по трем заданным углам найти остальные, а также координаты и угловое положение выходного звена. Этот алгоритм реализован в программе MATLAB.

**Ключевые слова:** кинематика механизмов, параллельная структура, число степеней свободы, обобщенные координаты, уравнения связи, кватернион, MATLAB.

**i** The article describes one of the possible quantitative approaches to the analysis of kinematics of a parallel mechanism consisting of planar rotational pairs. The mechanism is widespread in robotics. It comprises three parallel branches, each of which includes four rigid bodies and connects the stationary base with the output link. The mechanism has 13 mobile links and 15 pairs of the fifth class, that is,  $13 \cdot 6 - 15 \cdot 5 = 3$  degrees of freedom. Thus, 15 generalized coordinates, angles of rotation of one link relative to the other, are connected by 12 coupling equations. A numerical algorithm for solving the coupling equations is developed. Using three pre-determined angles, this allows the authors to find the others angles, as well as the coordinates and angular position of the output link. The algorithm is implemented using MATLAB software.

**Keywords:** kinematics of mechanisms, parallel structure, number of degrees of freedom, generalized coordinates, coupling equation, quaternion, MATLAB.

Теории машин и механизмов [1], в частности механизма параллельной структуры, посвящено большое количество работ [2–7]. В литературе широко обсуждаются численные методы анализа и моделирования механизмов параллельной структуры [8–10], одна из возможных реализаций которых представлена в статье.

Рассмотрим механизм, который состоит из  $n$  абсолютно твердых тел, соединенных между собой и с неподвижным основанием плоскими вращательными шарнирами. С каждым телом свяжем правую декартову систему координат  $oxuz$ . Начало координат расположим на оси вращения, вокруг которой последующее тело

вращается по отношению к предыдущему. Эту ось будем считать осью  $oz$ . Для первого тела предыдущим является неподвижное основание. Свяжем с неподвижным основанием систему координат  $OXYZ$ . Положение каждого тела определим относительно  $OXYZ$  путем задания начала координат  $o(x_0, y_0, z_0)$  и тройки единичных векторов, образующих правую ортогональную систему координат  $oxuz$ :

$$\mathbf{e}_x = (e_{11}, e_{12}, e_{13}),$$

$$\mathbf{e}_y = (e_{21}, e_{22}, e_{23}),$$

$$\mathbf{e}_z = (e_{31}, e_{32}, e_{33}).$$

Вектор  $\mathbf{e}_z$  является единичным вектором оси вращения. На каждом из тел, кроме последнего, находятся две оси вращения. При вращении тела относительно первой оси вторая ось, связанная с соседним телом, перемещается соответствующим образом.

Положение второй для данного тела системы координат определим проекциями на оси  $oxuz$  радиуса-вектора  $\mathbf{s}$ , соединяющего начала системы координат смежных тел и единичных векторов второй системы, т. е. величинами:

$$\mathbf{l}_x = (l_{11}, l_{12}, l_{13}),$$

$$\mathbf{l}_y = (l_{21}, l_{22}, l_{23}),$$

$$\mathbf{l}_z = (l_{31}, l_{32}, l_{33}),$$

$$\mathbf{s} = (s^x, s^y, s^z).$$

Поворот вектора относительно оси зададим кватернионом вида

$$Sp = \cos \frac{\varphi}{2}, \quad (1)$$

$$Vp = \sin \frac{\varphi}{2} \mathbf{I} = \sin \frac{\varphi}{2} (l_x, l_y, l_z),$$

где  $Sp$  — скалярная часть кватерниона;  $Vp$  — векторная часть кватерниона;  $\varphi$  — угол поворота;  $\mathbf{I}$  — единичный вектор оси поворота.

Задание поворота кватернионом (1) основано на формуле преобразования координат векторов, представленных как кватернионы с нулевой скалярной частью, в результате поворота вокруг некоторой оси на некоторый угол:

$$\mathbf{r}(t) = p\mathbf{r}(0)p^{-1}, \quad (2)$$

где  $\mathbf{r}(0) = (0, \mathbf{r}(0)_x, \mathbf{r}(0)_y, \mathbf{r}(0)_z)$  — преобразуемый вектор;  $\mathbf{r}(t) = (0, \mathbf{r}(t)_x, \mathbf{r}(t)_y, \mathbf{r}(t)_z)$  — преобразованный вектор;  $p^{-1} = (Sp, -Vp)$  — кватернион, обратный кватерниону  $p$ .

Как известно, при умножении кватернионов их скалярные и векторные части получают по формулам:

$$S(p_1 p_2) = S(p_1)S(p_2) - V(p_1)V(p_2),$$

$$V(p_1 p_2) = S(p_1)V(p_2) + S(p_2)V(p_1) + V(p_1)V(p_2).$$

Формула (2) относится к случаю, когда все векторы приведены к началу координат, находящемуся на оси вращения. Если ось вращения не проходит через начало координат, формула преобразования радиуса-вектора  $\mathbf{R}$ , соединяющего произвольную точку с началом координат, при повороте вокруг оси, не проходящей через начало, на угол  $\varphi$  имеет вид

$$\mathbf{R}^\varphi = \mathbf{s} + p(\overline{\mathbf{R}} - \mathbf{s})p^{-1}. \quad (3)$$

Следует отметить, что в формуле (3) все векторы представлены как кватернионы с нулевой скалярной частью, а кватернион поворота представлен формулой (1).

Воспользовавшись выражением (2), найдем, что в результате поворота начало подвижной системы координат, смежной с  $oxuz$ , и ее оси, а также оси самой системы координат примут значения:

$$\begin{aligned} (0, s_\varphi^x, s_\varphi^y, s_\varphi^z) &= p(0, s^x, s^y, s^z)p^{-1}, \\ (0, e_{11}^\varphi, e_{12}^\varphi, e_{13}^\varphi) &= p(0, 1, 0, 0)p^{-1}, \\ (0, e_{21}^\varphi, e_{22}^\varphi, e_{23}^\varphi) &= p(0, 0, 1, 0)p^{-1}, \\ (0, e_{31}^\varphi, e_{32}^\varphi, e_{33}^\varphi) &= p(0, 0, 0, 1)p^{-1}, \\ (0, l_{11}^\varphi, l_{12}^\varphi, l_{13}^\varphi) &= p(0, l_{11}, l_{12}, l_{13})p^{-1}, \\ (0, l_{21}^\varphi, l_{22}^\varphi, l_{23}^\varphi) &= p(0, l_{21}, l_{22}, l_{23})p^{-1}, \\ (0, l_{31}^\varphi, l_{32}^\varphi, l_{33}^\varphi) &= p(0, l_{31}, l_{32}, l_{33})p^{-1}, \\ p &= \left( \cos \frac{\varphi}{2}, \sin \frac{\varphi}{2} (0, 0, 1) \right). \end{aligned} \quad (4)$$

Формулы (4) определяют соответствующие значения нового начала координат и направления осей системы координат относительно подвижной системы координат  $oxuz$ . Для пересчета их в неподвижную систему воспользуемся формулами

$$\begin{aligned} (X^0, Y^0, Z^0) &= (x^0, y^0, z^0) + \\ &+ (s_\varphi^x, s_\varphi^y, s_\varphi^z) \begin{pmatrix} e_{11} & e_{12} & e_{13} \\ e_{21} & e_{22} & e_{23} \\ e_{31} & e_{32} & e_{33} \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{pmatrix} e_{11} & e_{12} & e_{13} \\ e_{21} & e_{22} & e_{23} \\ e_{31} & e_{32} & e_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l_{11}^\varphi & l_{12}^\varphi & l_{13}^\varphi \\ l_{21}^\varphi & l_{22}^\varphi & l_{23}^\varphi \\ l_{31}^\varphi & l_{32}^\varphi & l_{33}^\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_{11} & e_{12} & e_{13} \\ e_{21} & e_{22} & e_{23} \\ e_{31} & e_{32} & e_{33} \end{pmatrix}. \quad (6)$$

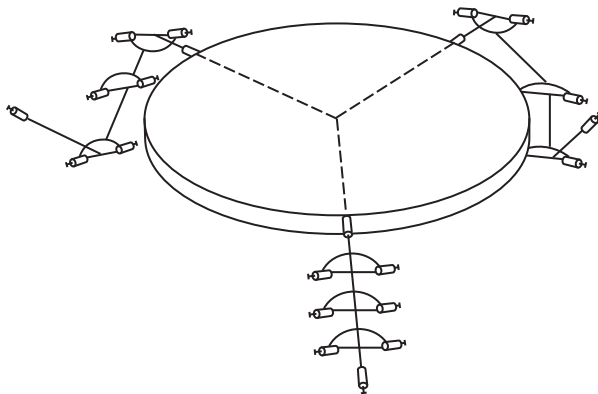
Формулы (4)–(6) служат основой для построения рекуррентной процедуры, которая позволяет вычислить положение тел относительно неподвижной системы координат для заданной последовательности углов поворота звеньев  $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$  и параметров механизма (системы абсолютно твердых тел), характеризующих взаимное положение осей вращения и связанных с системой координат, т. е. для величин  $(s_x^i, s_y^i, s_z^i)$ ,  $(l_{11}^i, l_{12}^i, l_{13}^i)$ ,  $(l_{21}^i, l_{22}^i, l_{23}^i)$ ,  $(l_{31}^i, l_{32}^i, l_{33}^i)$ ,  $i = 1, 2, \dots, n-1$ .

Чтобы начать расчет, необходимо задать расположение системы координат *охуз*, связанной с первым телом относительно неподвижной системы координат *OXYZ*, т. е. величины  $(x^0, y^0, z^0)$ ,  $(e_{11}^0, e_{12}^0, e_{13}^0)$ ,  $(e_{21}^0, e_{22}^0, e_{23}^0)$ ,  $(e_{31}^0, e_{32}^0, e_{33}^0)$ .

Очевидно, что для последнего тела величины  $(s_x^n, s_y^n, s_z^n)$ ,  $(l_{11}^n, l_{12}^n, l_{13}^n)$ ,  $(l_{21}^n, l_{22}^n, l_{23}^n)$ ,  $(l_{31}^n, l_{32}^n, l_{33}^n)$  не связаны с осью вращения, а описывают некую систему координат, связанную с последним телом.

В качестве примера рассмотрим одну из трех ветвей изображенного на рисунке механизма параллельной структуры с тремя соединительными кинематическими цепями.

Каждая ветвь является рассмотренным ранее механизмом, содержащим пять вращательных кинематических пар, шарниров. Первая и последняя оси параллельны между собой и перпендикулярны трем промежуточным осям, которые также параллельны между собой. Введем описанные выше параметры, определяющие положение соответствующей системы ко-



Механизм параллельной структуры

ординат — второго звена относительно первого, третьего относительно второго, четвертого относительно третьего и пятого (выходного звена) относительно четвертого:

$$(s_x^1, s_y^1, s_z^1) = (0, 0, -a),$$

$$(l_{11}^1, l_{12}^1, l_{13}^1) = (0, 1, 0),$$

$$(l_{21}^1, l_{22}^1, l_{23}^1) = (0, 0, 1),$$

$$(l_{31}^1, l_{32}^1, l_{33}^1) = (1, 0, 0);$$

$$(s_x^2, s_y^2, s_z^2) = (0, -a, 0),$$

$$(l_{11}^2, l_{12}^2, l_{13}^2) = (1, 0, 0),$$

$$(l_{21}^2, l_{22}^2, l_{23}^2) = (0, 1, 0),$$

$$(l_{31}^2, l_{32}^2, l_{33}^2) = (0, 0, 1);$$

$$(s_x^3, s_y^3, s_z^3) = (0, -a, 0),$$

$$(l_{11}^3, l_{12}^3, l_{13}^3) = (1, 0, 0),$$

$$(l_{21}^3, l_{22}^3, l_{23}^3) = (0, 1, 0),$$

$$(l_{31}^3, l_{32}^3, l_{33}^3) = (0, 0, 1);$$

$$(s_x^4, s_y^4, s_z^4) = (0, -a, 0),$$

$$(l_{11}^4, l_{12}^4, l_{13}^4) = (0, 0, 1),$$

$$(l_{21}^4, l_{22}^4, l_{23}^4) = (1, 0, 0),$$

$$(l_{31}^4, l_{32}^4, l_{33}^4) = (0, 1, 0).$$

С пятым (выходным звеном) свяжем трехгранник

$$(s_x^5, s_y^5, s_z^5) = (0, 0, -a),$$

$$(l_{11}^5, l_{12}^5, l_{13}^5) = (0, 0, 1),$$

$$(l_{21}^5, l_{22}^5, l_{23}^5) = (1, 0, 0),$$

$$(l_{31}^5, l_{32}^5, l_{33}^5) = (0, 1, 0).$$

Основной для указанного рекуррентного способа является функция, на вход которой подаются значения  $(x, y, z)$ ,  $(e_{11}, e_{12}, e_{13})$ ,  $(e_{21}, e_{22}, e_{23})$ ,  $(e_{31}, e_{32}, e_{33})$ , характеризующие начальное положение поворачивающей на угол  $\varphi$  относительно третьего координатного вектора  $\mathbf{e} = (e_{31}, e_{32}, e_{33})$  системы координат *охуз* относительно неподвижной системы координат, и значения  $(s_x, s_y, s_z)$ ,  $(l_{11}, l_{12}, l_{13})$ ,  $(l_{21}, l_{22}, l_{23})$ ,  $(l_{31}, l_{32}, l_{33})$ , характеризующие положение последующего тела относительно предыдущего. Вектор  $\mathbf{l} = (l_{31}, l_{32}, l_{33})$  является единичным вектором оси вращения последующего тела.

Выходом функции являются новые значения  $(x^n, y^n, z^n)$ ,  $(e_{11}^n, e_{12}^n, e_{13}^n)$ ,  $(e_{21}^n, e_{22}^n, e_{23}^n)$ ,  $(e_{31}^n, e_{32}^n, e_{33}^n)$ .

Формулы (4)–(6) описывают совершаемые операции. Соответствующая функция была реализована в программе MATLAB как function `[XYZ0 TXx0]=Preobr(xyz0,e0,s0,l0,fi0)`.

Входными параметрами этой функции являются:

`xyz0` — координаты точки, лежащей на оси вращения первого звена относительно неподвижной системы координат  $OXYZ$ ;

`e0` — матрица направляющих косинусов осей первого звена, ось  $oz$  является осью вращения второго звена относительно первого;

`s0` — вектор, соединяющий начала соседних систем координат в проекциях на оси предыдущего;

`l0` — матрица направляющих косинусов последующей системы координат относительно предыдущей;

`fi0` — угол поворота последующего звена относительно предыдущего.

Расчет всего механизма, состоящего из пяти последовательно соединенных плоскими шарнирами звеньев, заключается в нахождении координат трехгранника, связанного с последним, пятым звеном, т. е. начала координат этого трехгранника и матрицы его направляющих косинусов относительно неподвижной системы координат  $OXYZ$ . В программе MATLAB расчет реализован в виде соответствующего цикла. На каждом шаге вводятся соответствующие координаты и параметры (направляющие косинусы) последующего звена относительно предыдущего. На первом шаге вводятся координаты и матрица направляющих косинусов первого звена относительно неподвижного и координаты и параметры (направляющие косинусы) второго звена относительно первого. Параметры включают и угол поворота.

Описанный алгоритм использован для расчета показанного на рисунке механизма. Последний состоит из трех проанализированных ранее механизмов, соединенных параллельно, и имеет 13 подвижных звеньев и 15 шарниров, т. е. пар пятого класса. Число степеней свободы механизма равно  $13 \cdot 6 - 15 \cdot 5 = 3$ . Полагаем, что три составляющих пятизвенных механизма идентичны по конструкции и расположены один относительно другого под углом  $120^\circ$ . Поскольку число степеней свободы равно трем, можно задать значения любых трех из 15 углов и, пользуясь уравнениями связи, определить

значения оставшихся 12 углов. В качестве уравнений связи используем то обстоятельство, что последним звеном в каждом из трех рассмотренных механизмов является одно и то же абсолютно твердое тело. Таким образом, определив для каждого механизма координаты и матрицы направляющих косинусов последнего тела, являющегося в данном случае выходным звеном всего механизма, и приравняв их, получим необходимые 12 уравнений связи: шесть для координат и шесть для матриц, поскольку каждая матрица определяется тремя независимыми параметрами, например углами Эйлера. Для решения описанных 12 уравнений связи используем функцию `lsqnonlin.m`. Эта функция находит неизвестные параметры путем минимизации суммы квадратов отклонений функций, каждая из которых равна нулю в том случае, когда неизвестные параметры принимают требуемые значения.

Описанный способ определения неизвестных 12 углов при заданных параметрах механизма и первых углов поворота для каждой из трех ветвей реализован в функции `kinematics.m`. Выходом данной функции являются неизвестные углы поворота, а также координаты и матрица направляющих косинусов выходного звена.

Рассмотрим два частных случая. В первом случае значения первых трех углов равны нулю. На выходе, как и следовало ожидать, получаем нулевые значения остальных углов, координат начала выходного звена и единичную матрицу направляющих косинусов.

Во втором случае первый угол первой ветви равен единице, первые углы остальных ветвей — нулю. В результате расчета получаем следующие значения углов:

Angles =

1.0000	-0.0000	0.0000	0.0000	-0.6667
0	0.0000	-0.0000	0.0000	0.3333
0	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.3333

Координаты и матрица направляющих косинусов принимают значения:

xyz =

1.0e-009 \*

0	0.7032	-0.4515
---	--------	---------

e =

1.0000	0.0000	-0.0000
-0.0000	0.9450	0.3272
0.0000	-0.3272	0.9450

## Выводы

1. Разработана математическая модель кинематики широко распространенного в робото-

технике механизма параллельной структуры, состоящего из плоских вращательных пар.

2. Разработанная модель реализована в программе MATLAB.

## Литература

- [1] Артоболевский И.И. *Теория механизмов и машин*. Москва, Наука, 1988. 639 с.
- [2] Merlet J.-P. *Parallel Robots*. Kluwer Academic Publishers, 2000. 372 p.
- [3] Carricato M., Parenti-Castelli V. On the topological and geometrical synthesis and classification of translational parallel mechanisms. *Proc. of the XI World Congress in Mechanism and Machine Science*, Tianjin, China, 2004, pp. 1624–1628.
- [4] Arsenault M., Boudreau R. The synthesis of three-degree-of-freedom planar parallel mechanisms with revolute joints (3-RRR) for an optimal singularity-free workspace. *Journal of Robotic Systems*, 2004, no. 21(5), pp. 259–274.
- [5] *Latest Advances in Robot Kinematics*. Eds. Lenarcic J., Husty M. Springer, Dordrecht, Heidelberg, New York, London, 2012, XI, 457 p.
- [6] Lee K.-M., Shah D.K. Kinematic analysis of a three-degrees-of freedom in-parallel actuated manipulator. *IEEE Journal of Robotics and Automation*, 1988, no. 4(3), pp. 354–360.
- [7] Глазунов В.А., Ласточкин А.Б., Терехова А.Н., Ву Нгок Бик. Об особенностях устройств относительного манипулирования. *Проблемы машиностроения и надежности машин*, 2007, № 2, с. 77–85.
- [8] Глазунов В.А. Структура пространственных механизмов. Группы винтов и структурные группы. *Справочник. Инженерный журнал*, 2010, Приложение № 3, 24 с.
- [9] Ларюшкин П.А., Глазунов В.А., Хейло С.В. Решение задачи о положениях параллельных манипуляторов с тремя степенями свободы. *Справочник. Инженерный журнал*, 2012, № 2, с. 16–20.
- [10] Huda S., Takeda Y. Dimension Synthesis of 3-URU Pure Rotation Parallel Mechanism with Respect to Singularity and Workspace. *12<sup>th</sup> IFToMM World Congress*, Becasson, 2007, pp. 235–242.

## References

- [1] Artobolevskii I.I. *Teoriia mekhanizmov i mashin* [Theory of mechanisms and machines]. Moscow, Nauka publ., 1988. 639 p.
- [2] Merlet J.-P. *Parallel Robots*. Kluwer Academic Publishers, 2000. 372 p.
- [3] Carricato M., Parenti-Castelli V. On the topological and geometrical synthesis and classification of translational parallel mechanisms. *Proc. of the XI World Congress in Mechanism and Machine Science*, Tianjin, China, 2004, pp. 1624–1628.
- [4] Arsenault M., Boudreau R. The synthesis of three-degree-of-freedom planar parallel mechanisms with revolute joints (3-RRR) for an optimal singularity-free workspace. *Journal of Robotic Systems*, 2004, no. 21(5), pp. 259–274.
- [5] *Latest Advances in Robot Kinematics*. Ed. Lenarcic J., Husty M. Springer, Dordrecht, Heidelberg, New York, London, 2012, XI, 457 p.
- [6] Lee K.-M., Shah D.K. Kinematic analysis of a three-degrees-of freedom in-parallel actuated manipulator. *IEEE Journal of Robotics and Automation*, 1988, no. 4(3), pp. 354–360.
- [7] Glazunov V.A., Lastochkin A.B., Terekhova A.N., Vu Ngok Bik. Ob osobennostiakh ustroystv otnositel'nogo manipulirovaniia [About the peculiarities of the device relative to the manipulation]. *Problemy mashinostroeniia i nadezhnosti mashin* [Journal of Machinery Manufacture and Reliability]. 2007, no. 2, pp. 77–85.
- [8] Glazunov V.A. Struktura prostranstvennykh mekhanizmov. Gruppy vintov i strukturnye gruppy [The structure of spatial mechanisms. Group screws and structural groups]. *Spravochnik. Inzhenernyi zhurnal* [Handbook. An engineering journal]. 2010, att. no. 3, 24 p.
- [9] Lariushkin P.A., Glazunov V.A., Kheilo S.V. Reshenie zadachi o polozheniakh paralel'nykh manipulatorov s tremia stepeniami svobody [Kinematics of 3-dof parallel manipulator].

*Spravochnik. Inzhenernyi zhurnal* [Handbook. An engineering journal]. 2012, no. 2, pp. 16–20.

- [10] Huda S., Takeda Y. Dimension Synthesis of 3-URU Pure Rotation Parallel Mechanism with Respect to Singularity and Workspace. *12<sup>th</sup> IFToMM World Congress*, Becasson, 2007, pp. 235–242.

Статья поступила в редакцию 17.09.2015

## Информация об авторе

**ИОФФЕ Марк Львович** (Нью-Йорк) — кандидат технических наук. (США, Нью-Йорк, 2-я Авеню, д. 444, e-mail: ioffe.mark@gmail.com).

## Information about the author

**IOFFE Mark Lvovich** (New York) — Candidate of Science (Eng.) (444, 2<sup>nd</sup> Avenue, New York, USA, e-mail: ioffe.mark@gmail.com).



В Издательстве МГТУ им. Н.Э. Баумана  
вышла в свет монография  
**М.М. Жилейкина**

### **«Теоретические основы повышения показателей устойчивости и управляемости колесных машин на базе методов нечеткой логики»**

Управляемость и устойчивость автомобиля являются важнейшими эксплуатационными свойствами и составляющими активной безопасности движения, оценке которых придается большое значение. Представлены результаты теоретических исследований, выполненных на кафедре «Колесные машины» МГТУ им. Н.Э. Баумана. Разработаны принципы повышения показателей устойчивости и управляемости как двухосных, так и многоосных колесных машин, оснащенных различными типами трансмиссий. Обоснованы принципиальные решения по способам управления движением машин, обеспечивающих повышение их курсовой и траекторной устойчивости. Предложены критерии оценки эффективности работы комплексной системы динамической стабилизации движения колесных машин. Разработаны алгоритмы работы системы динамической стабилизации с применением методов нечеткой логики для двухосных и многоосных колесных машин.

Для аспирантов и докторантов, обучающихся по научной специальности 05.05.03 «Колесные и гусеничные машины», а также для научных работников, занимающихся научными исследованиями в области теории движения колесных машин.

**По вопросам приобретения обращайтесь:**

105005, Москва, 2-я Бауманская ул., д. 5, стр. 1.  
Тел.: +7 499 263-60-45, факс: +7 499 261-45-97;  
press@bmstu.ru; www.baumanpress.ru