МИНАЕВА
Надежда Витальевна
доктор
физико-математических
наук, профессор кафедры
«Высшая математика»
(Воронежская
государственная
технологическая академия)

УДК 539.214, 539.3

О предельных состояниях упруго подкрепленного стержня при продольно-поперечном изгибе

Н.В. Минаева

Рассматривается проблема исследования предельного состояния упругопластических тел при комбинированном нагружении. В качестве необходимого условия нарушения нормального функционирования предлагается использовать критерий непрерывной зависимости функции, характеризующий поведение изучаемого объекта, от исходных данных. Найдено условие, соответствующее предельному состоянию шарнирно закрепленного стержня на упругом основании при комбинированном нагружении.

Ключевые слова: предельное состояние, упругость, пластичность, комбинированное нагружение.

The problem of research of the limiting state of elastoplastic bodies under combined loading. As a necessary condition of normal functioning it is offered to use the continuous dependence of the function that specifies the behavior of the studied object from the original data. Found condition corresponding to the limit as the fixed rod to an elastic foundation under combined loading.

Keywords: limiting condition, elasticity, plasticity, combined loading.

Как известно, материалы при производстве могут быть различных марок, разных заводов-изготовителей, изготовленные в различные периоды времени и по различным технологиям. Например, стали одного класса прочности и одной марки вследствие различных технологий изготовления заметно отличаются друг от друга даже в исходном состоянии и, тем более, в состоянии после длительной эксплуатации. Этот «естественный» разброс свойств весьма значителен [1, 2]. Кроме этого в процессе эксплуатации физические и геометрические характеристики объекта изменяются, например, происходит процесс старения.

Очевидно, что для нормального функционирования рассматриваемого объекта необходимо, чтобы незначительные изменения его характеристик приводили бы к незначительным изменениям в поведении рассматриваемого объекта. Тем самым предполагается, что непрерывная зависимость функции, описывающей поведение изучаемого объекта, от функций, характеризующих сам объект и внешнее воздействие на него, является необходимым условием нормального функционирования рассматриваемого объекта. Граница области этой непрерывности будет верхней границей эксплуатации исследуемого объекта. Верхней потому, что причиной нарушения нормального функционирования объекта могут быть и другие явления, например, достижение пределов прочности и т. д. Следует отметить, что нарушение нормального функционирования может произойти и вследствие старения одного или нескольких элементов объекта.

Рассмотрим поведение шарнирно закрепленного по концам упругого стержня длины ℓ, находящимся на упругом основании под воздействием продольной силы P и моментов M_i $(i=1,2)$, приложенных на концах стержня. Стержни на упругом основании широко применяются, например, при моделировании понтонных мостов, фундаментов высотных зданий (ленточный фундамент), сооружений в сейсмически опасных зонах.

В безразмерных переменных ось стержня определяется путем решения следующей задачи

$$\begin{gathered} u^{\text{IV}}(x)+\alpha u''(x)+cu(x)=0; \\ u(0)=u(1)=0; \quad u''(0)=m_1; \quad u''(1)=m_2. \end{gathered} \tag{1}$$

где $x=\dfrac{\tilde{x}}{\ell}$; $u=\dfrac{\tilde{u}}{\ell}$; $\alpha=\dfrac{P\ell^2}{E_0I_0f_1(x)}$; $c=\dfrac{\tilde{c}_0\ell^4 f_2(x)}{E_0I_0f_1(x)}$; $m_i=\dfrac{M_i}{E_0I_0f_1(x)}$; $\tilde{c}_0$ — коэффициент жесткости основания; $f_1(x)$, $f_2(x)$ — функции, описывающие изменение характеристик стержня и упругого основания.

Состояние изогнутого стержня, при котором нарушается непрерывная зависимость решения задачи (1) от $f_1(x)$, $f_2(x)$, назовем предельным.

Пусть при $f_1(x)=f_{10}(x)$, $f_2(x)=f_{20}(x)$ задача (1) допускает решение $u=u_0(x)$. Тогда состояние стержня, соответствующее решению $u_0(x)$, не будет предельным, если решение задачи (1) непрерывно зависит от $f_1(x)$, $f_2(x)$ при $f_1(x)=f_{10}(x)$, $f_2(x)=f_{20}(x)$.

Для проверки этой непрерывности, как следует из теоремы о неявных функциях [3—5], нужно составить следующую задачу относительно вспомогательной функции $\zeta(x)$:

$$\begin{gathered} u^{\text{IV}}+\zeta^{IV}+\alpha_0u''+\alpha_0\zeta''+c_0u+c_0\zeta=0; \\ u(0)+\zeta(0)=u(1)+\zeta(1)=0; \\ u''(0)+\zeta''(0)=m_1; \qquad u''(1)+\zeta''(1)=m_2. \end{gathered} \tag{2}$$

где $\alpha_0=\dfrac{P\ell^2}{E_0I_0f_{10}(x)}$; $c_0=\dfrac{\tilde{c}_0\ell^4 f_{20}(x)}{E_0I_0f_{10}(x)}$. (3)

Поскольку $u_0(x)$ — решение задачи (1) при $\alpha=\alpha_0$, $c=c_0$, то из (2) получаем следующую задачу:

$$\begin{gathered} \zeta^{\text{IV}}+\alpha_0\zeta''+c_0\zeta=0; \\ \zeta(0)=\zeta(1)=0; \quad \zeta''(0)=0; \quad \zeta''(1)=0. \end{gathered} \tag{4}$$

Как следует из теоремы о неявных функциях [3—5] решение задачи (1) непрерывно зависит от $f_1(x)$, $f_2(x)$ при $f_1(x)=f_{10}(x)$, $f_2(x)=f_{20}(x)$, если задача (4) имеет только тривиальное решение.

Следовательно, предельному состоянию изогнутого стержня соответствует существование нетривиального решения задачи (4).

При равномерном изменении по длине жесткости стержня и коэффициента упругого основания $f_1(x)\equiv\text{const}$, $f_2(x)\equiv\text{const}$. В этом случае $\alpha_0\equiv\text{const}$, $c_0\equiv\text{const}$.

Составим характеристическое уравнение для задачи (4):

$$\mu^4+\alpha_0\mu^2+c_0=0. \tag{5}$$

Отсюда

$$\mu^2=-\frac{\alpha_0}{2}\pm\sqrt{\frac{\alpha_0^2}{4}-c_0}. \tag{6}$$

Сделаем замену

$$\mu=im. \tag{7}$$

Тогда из (6), (7) находим

$$m^2=\frac{\alpha_0}{2}\mp\sqrt{\frac{\alpha_0^2}{4}-c_0}. \tag{8}$$

Таким образом, уравнение (5) имеет следующие корни:

$$\begin{gathered} m_1=\sqrt{\frac{\alpha_0}{2}-\sqrt{\frac{\alpha_0^2}{4}-c_0}}; \quad m_3=-m_1; \\ m_2=\sqrt{\frac{\alpha_0}{2}+\sqrt{\frac{\alpha_0^2}{4}-c_0}}; \quad m_4=-m_2. \end{gathered} \tag{9}$$

Общее решение уравнения (4) имеет вид

$$\begin{gathered} \zeta=C_1\sin m_1x+C_2\cos m_1x+ \\ +C_3\sin m_2x+C_4\cos m_2x. \end{gathered} \tag{10}$$

Подставляя (10) в граничные условия, получаем систему уравнений относительно C_i:

$$C_2 + C_4 = 0;$$
$$m_1^2 C_2 + m_2^2 C_4 = 0;$$
$$\begin{aligned} &C_1 \sin m_1 + C_2 \cos m_1 + C_3 \sin m_2 + \\ &\qquad + C_4 \cos m_2 = 0; \end{aligned} \qquad (11)$$
$$\begin{aligned} &m_1^2 C_1 \sin m_1 + m_1^2 C_2 \cos m_1 + m_2^2 C_3 \sin m_2 + \\ &\qquad + m_2^2 C_4 \cos m_2 = 0. \end{aligned}$$

Поскольку $m_1 \neq m_2$, то $C_2 = C_4 = 0$ и (11) примет вид:

$$\begin{aligned} &C_1 \sin m_1 + C_3 \sin m_2 = 0; \\ &m_1^2 C_1 \sin m_1 + m_2^2 C_3 \sin m_2 = 0. \end{aligned} \qquad (12)$$

Система (12) имеет нетривиальное решение в том случае, когда

$$\begin{vmatrix} \sin m_1 & \sin m_2 \\ m_1^2 \sin m_1 & m_2^2 \sin m_2 \end{vmatrix} \qquad (13)$$

или

$$\left(m_1^2 - m_2^2\right) \sin m_1 \sin m_2 = 0. \qquad (14)$$

Учитывая, что $m_1 \neq m_2$, получаем

$$m_1 = n\pi, \quad m_2 = n\pi \quad (n \in Z). \qquad (15)$$

Подставив любое решение из (15) в (8), имеем

$$\left[(n\pi)^2 - \frac{\alpha_0}{2}\right]^2 = \frac{\alpha_0^2}{4} - c_0. \qquad (16)$$

Условие существования нетривиального решения задачи (4) тогда будет следующим:

$$c_0 = n^2 \pi^2 \alpha_0 - n^4 \pi^4. \qquad (17)$$

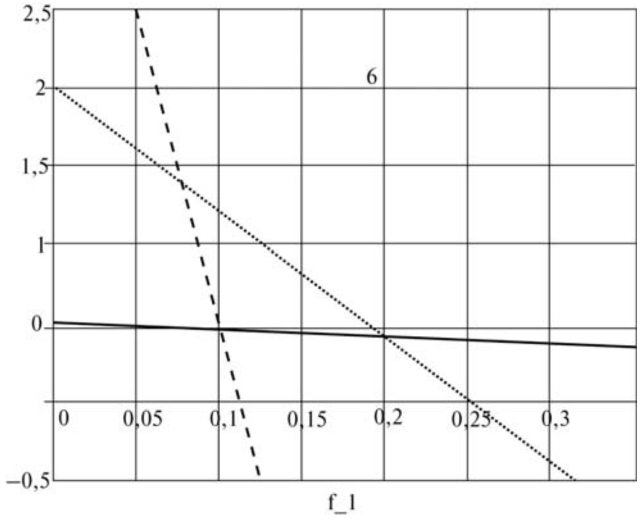
В результате подстановки (3) в (17) получаем следующее условие, соответствующее предельному состоянию стержня (индекс «0» у f_i опущен):

$$c_1 f_2 = n^2 \pi^2 \alpha_1 - n^4 \pi^4 f_1, \qquad (18)$$

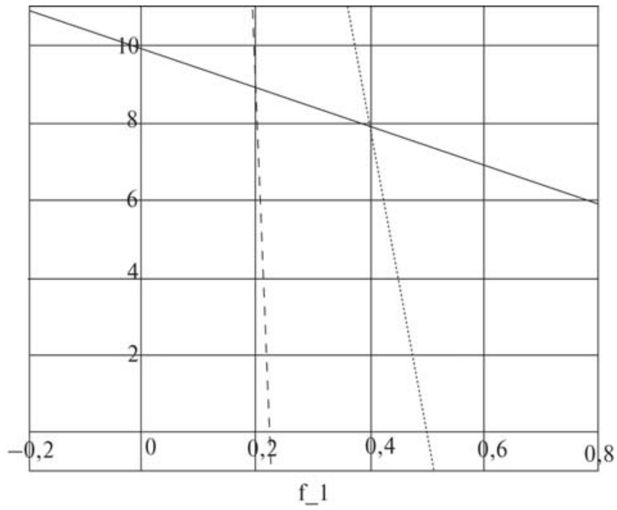
где $c_1 = \dfrac{\widetilde{c}_0 \ell^4}{E_0 I_0}$, $\alpha_1 = \dfrac{P\ell^2}{E_0 I_0}$.

На рис. 1 приведены графики, соответствующие соотношению (18) при $n = 1, 2, 3$.

Следует отметить, что с практической точки зрения наиболее интересным является случаи, когда $\left|f_1(x)\right| \le 1$, $\left|f_2(x)\right| \le 1$, так как они соответствуют уменьшению жесткости стержня и уменьшению коэффициента упругого основания, т. е. процессу старения.



$\alpha_1 = \pi^2$, $c_1 = 2\pi^4$



$\alpha_1 = c_1 = 2\pi^2$.

Рис. 1. — — f_2(1, f_1); ····· – f_2(2, f_1);
---- – f_2(3, f_1)

Литература

1. *Филиппов Г.А., Ливанова О.В.* Деградационные процессы и их влияние на трещиностойкость трубных сталей после длительной эксплуатации // Проблемы старения сталей магистральных трубопроводов. Н. Новгород: Университетская книга. 2006. С. 196—211.
2. *Сагарадзе В.В., Филиппов Ю.И.* и др. Коррозионное растрескивание аустенитных и феррито-перлитных сталей. Екатеринбург: УрО РАН, 2004, 228 с.
3. *Колмогоров А.Н., Фомин С.В.* Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1976. 542 с.
4. *Зачепа В.Р., Сапронов Ю.И.* Локальный анализ фредгольмовых уравнений. Воронеж: Изд-во Воронежск. госунивер., 2002. 185 с.
5. *Минаева Н.В.* Адекватность математических моделей деформируемых тел. М.: Научная книга, 2006. 236 с.

Статья поступила 26.05.2011 г.