Расчет и конструирование машин

УДК 517.947.44 DOI 10.18698/0536-1044-2016-2-3-10

Определение вероятностных моментов фазовых координат нелинейной модели конструкции

О.Н. Тушев, А.М. Донских

МГТУ им. Н.Э. Баумана, 105005, Москва, Российская Федерация, 2-я Бауманская ул., д. 5, стр. 1

The Determination of Stochastic Moments of Phase Coordinates in a Nonlinear Structural Model

O.N. Tushev, A.M. Donskikh

BMSTU, 105005, Moscow, Russian Federation, 2nd Baumanskaya St., Bldg. 5, Block 1

e-mail: donskihalexey@mail.ru

Рассмотрена задача стохастической динамики нелинейной конечно-элементной модели с использованием разложения решения по усеченному ортогональному базису собственных векторов статистически линеаризованной системы. Принято допущение, что нелинейности, присутствующие в системе, не приводят к принципиальному изменению ее динамического поведения, а только вносят существенную количественную поправку в вероятностные характеристики по отношению к линейной модели. Для того чтобы последняя не потеряла физический смысл, все нелинейные характеристики представлены в виде суммы линейной и нелинейной составляющих. Аддитивное внешнее воздействие принято стационарным или квазистационарным. Система уравнений относительно главных координат, записанная в форме Коши, приведена к каноническому виду с применением формирующих фильтров. Использованы известные дифференциальные уравнения метода моментов, позволяющие решить задачу в рамках корреляционной теории, если известна зависимость собственных чисел и векторов от искомых вероятностных моментов, через которые выражаются коэффициенты статистической линеаризации. Для выявления этой зависимости использованы разложения собственных чисел и векторов в степенные ряды по коэффициентам статистической линеаризации, рассматриваемые как вариации элементов матрицы жесткости линейной модели. Учтено линейное или квадратическое приближение. Расчет вероятностных моментов, входящих в коэффициенты статистической линеаризации, проводится посредством итерационной процедуры, которая, как показала практика, сходится за два или три приближения. Результаты проиллюстрированы примером.

Ключевые слова: моментные характеристики, ортогональный базис, каноническая форма уравнений, метод моментов, итерационная процедура, нормальная форма Коши.

The problem of stochastic dynamics of a nonlinear finite element model is considered in this article using the expansion of the solution in the truncated orthogonal basis of eigenvectors of the statistically linearized system. It is assumed that the nonlinearity present in the system does not lead to a considerable change in the system's dynamic behavior. It only makes a significant quantitative amendment to the probabilistic characteristics in relation to the linear model. In order for the latter to maintain its physical meaning, all nonlinear characteristics are represented as the sum of the linear and nonlinear components. The additive external action is taken as stationary or quasi-stationary. The system of equations relative to the main coordinates written in the Cauchy form is brought to the canonic form using the generating filters. The well-known differential equations of the method of moments are used to solve the problem within the correlation theory framework, providing that the relationship between the eigenvalues and eigenvectors, and the unknown stochastic moments, through which the coefficients of statistical linearization are expressed, is known. To reveal this relationship, the expansions of eigenvalues and eigenvectors to power series with respect to coefficients of statistical linearization are used. These expansions are considered as variations of the elements of the stiffness matrix of the linear model. The linear or quadratic approximation is taken into account. The stochastic moments that constitute the coefficients of statistical linearization are calculated through an iterative procedure. Practice shows that this procedure converges in two or three approximations. The results are illustrated by an example.

Keywords: moment characteristics, orthogonal basis, canonical form of equations, method of moments, iterative procedure, normal Cauchy form.

При решении различных задач динамики конструкций на основе линейных конечно-элементных моделей большой размерности часто применяется его разложение по главным координатам на основе ортогонального базиса собственных векторов. Этот подход является наиболее рациональным, поскольку обычно для достижения необходимой точности ограничиваются небольшим количеством членов разложения. Если в системе присутствуют нелинейные элементы, то, выделив линейную часть модели, на ее основе можно использовать ортогональный базис. Как и для линейной системы, в большинстве случаев можно ограничиться небольшим числом членов разложения, обеспечивающим необходимую точность в ограниченном диапазоне частот, который, как правило, задается при решении конкретной инженерной задачи.

Для эффективного решения стохастических задач динамики конструкции применяется статистическая линеаризация [1]. Принципиальных трудностей в формировании решения не возникает, если использовать в качестве математического описания динамики конечно-элементной модели систему дифференциальных уравнений в нормальной форме Коши и после статистической линеаризации применить один из известных подходов, например, метод моментов [1]. Для моделей с большим числом степеней свободы этот путь слишком громоздок и сложен в практической реализации. Применение же ортогонального разложения затруднено тем, что коэффициенты статистической линеаризации зависят от математических ожиданий и дисперсий решения. Таким образом, вычислить априори собственные числа и векторы линеаризованной системы невозможно вследствие неизвестности некоторых элементов матриц коэффициентов.

Построим формальное решение на основе ортогональных разложений с применением метода моментов, проигнорировав пока указанные трудности. При этом рассматривается только класс задач, в котором учет нелинейностей по отношению к линейной модели не приводит к качественным изменениям в динамическом поведении конструкции, например, потеря устойчивости или автоколебания. Влияние нелинейностей проявляется лишь в существенном изменении вероятностных характеристик фазовых координат модели.

Представим каждую из нелинейностей $\psi(y)$, входящих в уравнения движения, в виде суммы некоторой линейной части cy и нелинейного дополнения $\varphi(y)$ [2]

$$\psi(y) = cy + \varphi(y). \tag{1}$$

Такая операция обычно не вызывает трудностей и может выполняться различными способами.

В качестве примера на рис. 1 приведена нелинейная характеристика люфта, где *1* — $\psi(y)$; *2* — cy; *3* — $\varphi(y)$:

$$\psi(y) = \begin{cases} c(y-d), & y > d, \\ 0, & |y| \le d, \\ c(y+d), & y < -d; \end{cases} \qquad \varphi(y) = \begin{cases} -cd, & y > d, \\ -cy, & |y| \le d, \\ cd, & y < -d. \end{cases}$$

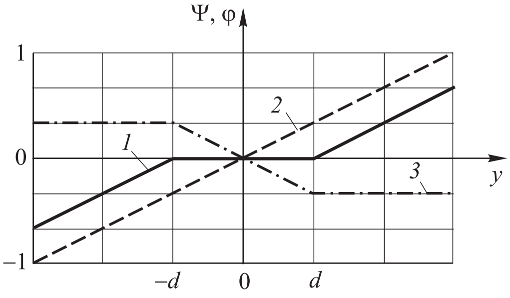

Рис. 1. Нелинейная характеристика люфта: *1* — $\psi(y)$; *2* — cy; *3* — $\varphi(y)$

Для выделения линейной части можно использовать также способ, предложенный Я.Г. Пановко [3]. В этом случае коэффициенты c определяются из условия минимума среднеквадратической погрешности аппроксимации $\psi(y)$ на выбранном интервале аргумента y.

После преобразований (1) векторное уравнение движения объекта можно записать в следующем виде:

$$M\ddot{Y} + \Gamma\dot{Y} + CY + \Phi(Y) = F(t), \qquad (2)$$

где $Y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)^{\text{т}}$ — вектор перемещений; M, Γ, C — симметричные, положительно определенные матрицы масс, демпфирования и жесткости; $F(t) = [f_1(t), f_2(t), \ldots, f_n(t)]^{\text{т}}$ — вектор стационарных внешних воздействий с нулевым математическим ожиданием и заданной матрицей корреляционных функций $K_F(\tau)$; $\Phi(Y) = [\varphi_1(Y), \varphi_2(Y), \ldots, \varphi_n(Y)]^{\text{т}}$ — нелинейная вектор-функция.

Для большинства инженерных задач анализа влияния случайных вибраций на конструкцию нулевое математическое ожидание является характерным для реальных эксплуатационных нагрузок. Исключения этого допущения принципиально не усложняют задачу, добавляя лишь технические трудности.

Если при стационарном внешнем воздействии нестационарным является только переходный процесс, то квазистационарное воздействие само может генерировать нестационарные режимы функционирования системы. Как показано в работе [4], такое обобщение внешнего воздействия не приводит к существенным усложнениям и вписывается в предлагаемый аппарат анализа.

Согласно принятому для многих практических задач допущению, в уравнении (2) диссипативные силы, эффект действия которых может быть оценен лишь интегрально, условно задаются линейным членом $\Gamma\dot{Y}$. Матрица Γ выбирается обычно пропорциональной матрицам масс и жесткости. Следует отметить, что принципиально несложно рассмотреть нелинейность общего вида $\Phi(Y, \dot{Y})$, тем более что на практике она, как правило, сепарабельна.

Из допущения о характере нелинейности следует, что при $\Phi(Y) \equiv 0$ система (2) не теряет физического смысла и является линейной моделью изучаемого объекта, качественно сохраняющей его основные свойства. Проведем статистическую линеаризацию нелинейности [1]:

$$\Phi(Y^0) = P(K_Y)Y^0, \qquad (3)$$

где Y^0 — центрированный вектор; K_Y — матрица корреляционных моментов вектора Y^0; $P(K_Y)$ — матрица коэффициентов статистической линеаризации по центрированным составляющим.

Подставив (3) в (2), получим следующее уравнение:

$$M\ddot{Y}^0 + \Gamma\dot{Y}^0 + \left[C + P(K_Y)\right]Y^0 = F^0(t). \qquad (4)$$

Для исключения приведенных в статье трудностей, связанных с использованием ортогональных разложений для линеаризованного уравнения, будем считать элементы матрицы $P(K_Y)$ некоторыми пока неизвестными вариациями соответствующих элементов матрицы жесткости C. Таким образом рассматривается решение нелинейной задачи в окрестности решения линейной модели.

Обозначим: λ_k и $X_k = (x_{k1}, x_{k2}, \ldots, x_{kn})^{\text{т}}$ — собственные числа и векторы линеаризованной модели $(k = 1, 2, \ldots, n)$. Известно, что вектор Y выражается в виде

$$Y = WZ(t), \qquad (5)$$

где $Z(t) = [z_1(t), z_2(t), \ldots, z_r(t)]^{\text{т}}$ — вектор модальных координат $(r < n)$; W — матрица, столбцами которой являются собственные векторы $X_1, X_2, \ldots, X_r$.

Принимаем, что матрица коэффициентов демпфирования Γ пропорциональна матрицам массы M и жесткости C [5]:

$$\Gamma = 2\mu_1 M + 2\mu_2 C,$$

где μ_1, μ_2 — заданные скалярные коэффициенты.

Подставив (5) в (4) с учетом условий ортонормировки собственных векторов, получим известную развязанную систему дифференциальных уравнений относительно модальных координат:

$$\ddot{z}_j + 2\xi_j \dot{z}_j + \lambda_j z_j = g_j(t), \tag{6}$$

где

$$g_j(t) = [X_j, F(t)];\ \xi_j = \mu_1 + \mu_2 \lambda_j,\ j = 1, 2, \ldots, r. \tag{7}$$

Преобразуем уравнения (6) к форме Коши, введя переменные $z_j = z_{j1}$, $\dot{z}_{j1} = z_{j2}$, и сгруппируем их в два вектора:

$$Z_1 = (z_{11}, z_{21}, \ldots, z_{r1})^{\text{т}};$$

$$Z_2 = (z_{12}, z_{22}, \ldots, z_{r2})^{\text{т}}.$$

Обозначим: $G(t) = [g_1(t), g_2(t), \ldots, g_r(t)]^{\text{т}}$; $O_{s_2}^{s_1}$ — матрица с нулевыми элементами (нижний индекс показывает число строк, верхний — число столбцов; например, O_r^1 — нулевой вектор размерностью r).

Из соотношения (7) следует, что

$$G(t) = W^{\text{т}} F(t). \tag{8}$$

На основании изложенного, систему уравнений (6) можно записать в следующем виде:

$$\dot{Z} = \tilde{B} Z + G_1(t), \tag{9}$$

где

$$Z = \begin{vmatrix} Z_1 \\ Z_2 \end{vmatrix};\ \tilde{B} = \begin{vmatrix} O_r^r & E \\ B_1 & B_2 \end{vmatrix};\ G_1(t) = RF(t);\ R = \begin{vmatrix} O_r^n \\ W^{\text{т}} \end{vmatrix};$$

$$B_1 = \operatorname{diag}(-\lambda_i; i = 1, 2, \ldots, r);$$

$$B_2 = \operatorname{diag}(-2\xi_i; i = 1, 2, \ldots, r).$$

Для использования метода моментов в качестве предварительного этапа необходимо преобразовать уравнение (9) к каноническому виду, в котором внешнее воздействие является векторным белым шумом. Для такого преобразования необходимо использовать формирующий фильтр, трансформирующий белый шум в заданный реальный случайный процесс. Такое преобразование осуществляется достаточно просто, если последний является стационарным с дробно-рациональной спектральной плотностью. Тогда фильтр описывается линейным дифференциальным уравнением с постоянными коэффициентами, которые определяются известным способом, приведенным в работах [1, 5]. Например, для стационарного случайного процесса $f^0(t)$ с корреляционной функцией

$$k_f(\tau) = D_f \exp(-a|\tau|) \tag{10}$$

уравнение формирующего фильтра имеет вид

$$\dot{f}^0 + af^0 = \sqrt{2D_f a}\, u^0(t), \tag{11}$$

где $u^0(t)$ — белый шум с единичной спектральной плотностью.

В общем случае уравнение формирующего фильтра записывается следующим образом:

$$\dot{F}^0 = AF^0 + Q\tilde{U}^0(t), \tag{12}$$

где A, Q — матрицы коэффициентов $(n \times n)$; $\tilde{U}^0(t)$ — векторный белый шум.

Объединив уравнения (9) и (12) в одно с вектором переменных W^0 размерностью $2r + n$:

$$W^0 = \begin{vmatrix} Z^0 \\ F^0 \end{vmatrix},$$

получим уравнение в канонической форме:

$$\dot{W}^0 = SW^0 + LU^0(t), \tag{13}$$

где

$$S = \begin{vmatrix} \tilde{B} & R \\ O_n^{2r} & A \end{vmatrix};\ L = \begin{vmatrix} O_{2r}^{2r} & O_{2r}^n \\ O_n^{2r} & Q \end{vmatrix};\ U^0(t) = \begin{vmatrix} O_{2r}^1 \\ \tilde{U}^0(t) \end{vmatrix}.$$

В соответствии с методом моментов на основе уравнения (13) формируется уравнение относительно матрицы корреляционных моментов K_W вектора W:

$$\dot{K}_W = SK_W + K_W S^{\text{т}} + H, \tag{14}$$

где H — матрица интенсивностей белого шума.

Определим матрицу корреляционных функций вектора внешних воздействий в уравнении (13):

$$M[LU^0(t)U^{0\text{т}}(t')L^{\text{т}}] = LK_U(t, t')L^{\text{т}}.$$

Поскольку $K_U(t, t') = E\delta(\tau)$, то

$$S = \begin{vmatrix} O_{2r}^{2r} & O_{2r}^n \\ O_n^{2r} & QQ^{\text{т}} \end{vmatrix}.$$

Из соотношения (5) следует, что

$$y_i^0(t) = \sum_{s=1}^{r} x_{si} z_s^0(t).$$

Тогда элементы матрицы корреляционных моментов $K_y(t)$ имеют следующий вид:

$$k_{i,j}^{(y)}(t) = \sum_{s,s'=1}^{r} x_{si} x_{s'j} k_{ss'}^{(z)}(t),$$

где $k_{ss'}^{(z)}(t)$ — элементы корреляционной матрицы $K_Z(t)$, которая определяется решением уравнения (14).

При $i = j$

$$D_i^{(y)}(t) = \sum_{s,s'=1}^{r} x_{si} x_{s'i} k_{ss'}^{(z)}(t). \tag{15}$$

Как уже отмечалось, элементы $p_{ij}(y)$ матрицы коэффициентов линеаризации $P(K_Y)$ рассматриваются как вариации соответствующих элементов c_{ij} матрицы C. Для удобства формализации (сокращения количества индексов) введем одинарную построчную нумерацию только для элементов матриц C и P, которые определяют нелинейные элементы $(i = 1, 2, \ldots, m)$. Как и в работе [2], представим собственные числа λ_k и векторы X_k в виде степенных рядов в окрестности из значений, полученных для линейной модели по $p_i(K_Y)$, ограничившись линейным или квадратичным приближениями. Как показано в работе [6], точность вполне удовлетворительна при отклонении вариаций до 30–40 % от номинальных значений $\tilde{\lambda}_k$ и $\tilde{X}_k$:

$$\begin{cases} \lambda_k = \tilde{\lambda}_k + \sum\limits_{i=1}^{m} \alpha_i^{(k)} p_i(K_y) + \\ + \dfrac{1}{2} \sum\limits_{i,j=1}^{m} \beta_{ij}^{(k)} p_i(K_y) p_j(K_y); \\ X_k = \tilde{X}_k + \sum\limits_{i=1}^{m} Q_i^{(k)} p_i(K_y) + \\ + \dfrac{1}{2} \sum\limits_{i,j=1}^{m} N_{ij}^{(k)} p_i(K_y) p_j(K_y). \end{cases} \tag{16}$$

где $\alpha_i^{(k)} = \partial\tilde{\lambda}_k / \partial c_i$; $\beta_{ij}^{(k)} = \partial^2 \tilde{\lambda}_k / \partial c_i \partial c_j$; $Q_i^{(k)} = \partial \tilde{X}_k / \partial c_i$; $N_{ij}^{(k)} = \partial^2 \tilde{X}_k / \partial c_i \partial c_j$ — скалярные и векторные функции чувствительности, определение которых широко описано в литературе, например [7–11]. Если рассматривается вариация элементов матрицы C, то на основании результатов, приведенных в работе [6], функции чувствительности первого порядка записываются в виде

$$\alpha_i^{(k)} = \left(\frac{\partial C}{\partial c_i} X_k, X_k \right); \tag{17}$$

$$Q_i^{(k)} = \sum_{\substack{s=1 \\ s \neq k}}^{n} \frac{\left(\dfrac{\partial C}{\partial c_i} X_k, X_s \right)}{\lambda_k - \lambda_s} X_s. \tag{18}$$

В реальных задачах, когда рабочий диапазон частот существенно ограничен, необходимая точность вычислений по формуле (18) достигается для числа элементов суммы много меньше, чем n (порядка r).

Задача значительно упрощается, если учесть следующие обстоятельства, характерные для реальных инженерных задач анализа динамики конструкций: практический интерес обычно представляют только дисперсии и спектральные плотности перемещений, скоростей и ускорений, т. е. диагональные элементы соответствующих матриц; количество нелинейных элементов m в расчетных моделях реальных конструкций на порядки меньше числа конечных элементов $(m \ll n)$; нелинейные характеристики элементов конструкций, как правило, зависят от одного перемещения $\varphi_i(y_i)$ или разности двух обычно соседних перемещений.

Обозначим элементы матрицы $K_y(t)$ — $k_{ij}^{(y)}$, тогда дисперсия $D_i^{(y)} = K_{ii}^{(y)}$. В первом случае имеем $p_i(D_i^{(y)})$, а во втором $p_i(D[y_i - y_{i-1}])$, где $D[y_i - y_{i-1}] = D_i^{(y)} + D_{i-1}^{(y)} - 2k_{i,i-1}^{(y)}$.

Как отмечено в работе [1] и подтверждено расчетами, пренебрежение взаимным корреляционным моментом $k_{i,i-1}^{(y)}$ не приводит к значительным погрешностям.

Тогда выражения (16) принимают следующий вид:

$$\begin{cases} \lambda_k = \tilde{\lambda}_k + \sum\limits_{i=1}^{m} \alpha_i^{(k)} p_i[D_i^{(y)}] + \\ + \dfrac{1}{2} \sum\limits_{i,j=1}^{m} \beta_{ij}^{(k)} p_i[D_i^{(y)}] p_j[D_j^{(y)}]; \\ X_k = \tilde{X}_k + \sum\limits_{i=1}^{m} Q_i^{(k)} p_i[D_i^{(y)}] + \\ + \dfrac{1}{2} \sum\limits_{i,j=1}^{m} N_{ij}^{(k)} p_i[D_i^{(y)}] p_j[D_j^{(y)}]. \end{cases} \tag{19}$$

Кроме того, в реальных инженерных задачах количество внешних нагрузок (обычно некоррелированных), а значит, и уравнений фильтров, как правило, невелико в отличие от общего случая (12). Таким образом, переход к канонической форме уравнения (13) не связан с существенным увеличением размерности системы уравнений. Следует отметить, что в решении уравнений фильтров кроме стационарных процессов содержатся еще и переходные процессы, как в любой динамической системе. Заданные стационарные воздействия установятся только после того, как переходные процессы в фильтрах затухнут вследствие диссипации. Наличие «переходного» нестационарного воздействия искажает анализируемый переходный режим в системе. Для исключения этого недостатка можно использовать любой из двух способов:

• начать интегрировать уравнения фильтров раньше, чем уравнения основной системы на интервал времени, требуемый для затухания переходных процессов;

• часто уравнения фильтров описываются уравнениями первого или второго порядков, которые могут быть решены аналитически; из полученного аналитического решения несложно выделить требуемую стационарную часть.

Следует отметить также, что блочные матрицы, входящие в B, $\tilde{B}$, в основном нулевые или диагональные, что позволяет построить экономную вычислительную процедуру.

Предлагаемый подход позволяет создать следующую итерационную схему вычислений, реализуемую на каждом шаге по времени. Итерация осуществляется только по совокупности дисперсий, входящих в нелинейности D_i $(i = 1, 2, \ldots, m)$. Обозначим: l — номер итерации. За нулевое приближение можно выбрать значения дисперсий линейной модели системы или их значения с предыдущего шага по времени.

Последовательность вычислений:

1) $D_i^{(0)}(t)$ $\forall i$;

2) $\lambda_i^{(l)}(t)$, $X_i^{(l)}(t)$ по формулам (16);

3) $k_{s,s'}^{(z,l)}(t)$ — интегрированием уравнения (13);

4) $D_i^{(l+1)}(t)$ $\forall i$ по формулам (15).

Затем осуществляется переход к позиции 2.

Обычно итерация хорошо сходится за 2–3 приближения, после чего нетрудно определить все остальные дисперсии. В качестве нулевого приближения можно выбрать решение для линейной модели или значения дисперсий с предыдущего шага интегрирования.

Существенной особенностью полученных результатов является зависимость коэффициентов линеаризованного уравнения от времени, поскольку коэффициенты статистической линеаризации $p_i[D_i^{(y)}(t)]$ являются функциями времени. Следовательно, от времени зависят и

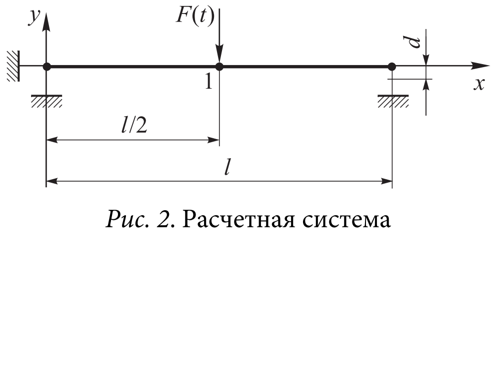

Рис. 2. Расчетная система

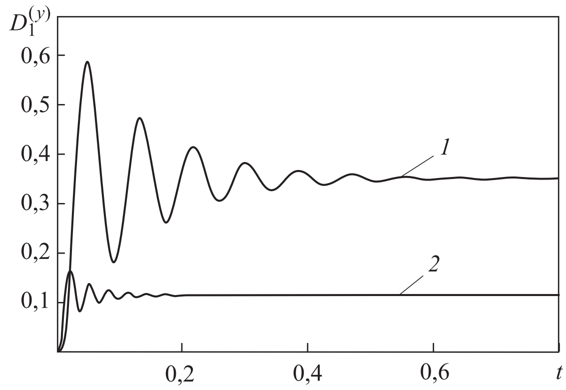

Рис. 3. Дисперсии системы при различных значениях люфта:
1 — d = 10 мм; *2* — d = 0 мм

собственные значения, которые следует рассматривать как «мгновенные».

В качестве примера рассмотрена система, представляющая собой двухопорную балку, в одной из опор которой имеется люфт (рис. 2).

Расчет собственных значений проводился в конечно-элементном программном пакете Nastran. Общее число элементов системы — 1000. За внешнее воздействие принимался стационарный случайный процесс с корреляционной функцией $K_F(\tau) = D_F e^{-a|\tau|}$, где $a = 200$, $D_F = 20$.

Значение люфта d варьировалась в пределах 0–10 мм. Количество собственных векторов r выбиралось для линейной и линеаризованной систем из условия, чтобы решения при $r-1$ и r отличались не более чем на 5 %. Обычно при $r = 5-7$ это требование выполнялось. Погрешность разложений собственных чисел и векторов по формулам (16) при конечных вариациях $30-35\,\%$ от номинальных значений (вариации линеаризованной системы даже для $d = 10$ мм укладываются в эти пределы) при $k = 7$ не превышали $5-6\,\%$.

Дисперсии при различных значениях люфта в точке приложения нагрузки приведены на рис. 3.

Для люфта $d = 10$ мм решение при указанной ранее точности потребовало учета семи $(r = 7)$ мгновенных собственных форм. При этом, если использовать ортогональный базис линейной системы, что в принципе правомерно, то решения при $r = 6$ и $r = 7$ различаются на 42 % в установившееся время.

Выводы

1. Предлагаемый подход позволил радикально упростить корреляционный анализ ис-

пользованием ортогональных разложений для статистически линеаризованной системы.

2. Применение разложения собственных чисел и векторов в усеченный степенной ряд по коэффициентам статистической линеаризации, рассматриваемым как вариации элементов матрицы жесткости модели, позволило выявить их зависимость от вероятностных характеристик фазовых координат и получить замкнутое алгоритмическое решение.

Литература

[1] Казаков И.Е. *Статистическая теория систем управления в пространстве состояний*. Москва, Наука, 1975. 432 с.

[2] Тушев О.Н., Березовский А.В. Определение спектральных плотностей динамических характеристик нелинейной модели конструкции. *Проблемы машиностроения и надежности машин*, 2013, № 1, с. 18–25.

[3] Пановко Я.Г. *Основы прикладной теории колебаний и удара*. Москва, Машиностроение, 1976. 320 с.

[4] Тушев О.Н., Донских А.М. Применение метода моментов для корреляционного анализа динамики конечноэлементных моделей конструкций. *Известия высших учебных заведений. Машиностроение*, 2014, № 12(657), с. 30–35.

[5] Светлицкий В.А. *Стохастическая механика и теория надежности*. Москва, Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2002. 504 с.

[6] Тушев О.Н., Березовский А.В. Чувствительность собственных значений и векторов к вариациям параметров конечно-элементных моделей конструкций. *Вестник МГТУ имени Н.Э. Баумана. Сер. Машиностроение*, 2007, № 1, с. 35–44.

[7] Rozenwasser E., Yusupov R. *Sensitivity of Automatic Control Systems*. London, New York, Washington, D.C., CRC Press, Boca Raton, 2000. 436 p.

[8] Soldatenko S., Yusupov R. Sensitivity Analysis of Coupled Chaotic Dynamical Systems with the Pseudo-Orbit Tracing Property. *Applied Mathematical Sciences*, 2015, vol. 9, № 18, pp. 885–893.

[9] Гусев А.С. *Вероятностные методы в механике машин и конструкций*. Москва, Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2009. 224 с.

[10] Хог Э., Чой К., Комков В. *Анализ чувствительности при проектировании конструкций*. Москва, Мир, 1988. 428 с.

[11] Гельфанд И.М. *Лекции по линейной алгебре*. Москва, Добросвет МЦНМО, 1998. 320 с.

References

[1] Kazakov I.E. *Statisticheskaia teoriia sistem upravleniia v prostranstve sostoianii* [Statistical theory of control systems in state space]. Moscow, Nauka publ., 1975. 432 p.

[2] Tushev O.N., Berezovskii A.V. Opredelenie spektral'nykh plotnostei dinamicheskikh kharakteristik nelineinoi modeli konstruktsii [Determination of the spectral densities of the dynamic characteristics of nonlinear structure model]. *Problemy mashinostroeniia i nadezhnosti mashin* [Journal of Machinery Manufacture and Reliability]. 2013, no. 1, pp. 18–25.

[3] Panovko Ia.G. *Osnovy prikladnoi teorii kolebanii i udara* [Fundamentals of applied theory of vibrations and shock]. Moscow, Mashinostroenie publ., 1976. 320 p.

[4] Tushev O.N., Donskikh A.M. Primenenie metoda momentov dlia korreliatsionnogo analiza dinamiki konechnoelementnykh modelei konstruktsii [Application of the method of moments for the correlation analysis of the dynamics of finite element models of structures]. *Izvestiia vysshikh uchebnykh zavedenii. Mashinostroenie* [Proceedings of Higher Educational Institutions. Machine Building]. 2014, no. 12(657), pp. 30–35.

[5] Svetlitskii V.A. *Stokhasticheskaia mekhanika i teoriia nadezhnosti* [Stochastic mechanics and the theory of reliability]. Moscow, Bauman Press, 2002. 504 p.

[6] Tushev O.N., Berezovskii A.V. Chuvstvitel'nost' sobstvennykh znachenii i vektorov k variatsiiam parametrov konechno–elementnykh modelei konstruktsii [Sensitivity of Eigen Values and Vectors for Variations of Parameters of Finite Element Models of Construction]. *Vestnik MGTU im. N.E. Baumana. Ser. Mashinostroenie* [Herald of the Bauman Moscow State Technical University. Series Mechanical Engineering]. 2007, no. 1, pp. 35–44.

[7] Rozenwasser E., Yusupov R. *Sensitivity of Automatic Control Systems*. London, New York, Washington, D.C., CRC Press, Boca Raton, 2000. 436 p.

[8] Soldatenko S., Yusupov R. Sensitivity Analysis of Coupled Chaotic Dynamical Systems with the Pseudo-Orbit Tracing Property. *Applied Mathematical Sciences*, 2015, vol. 9, № 18, pp. 885–893.

[9] Gusev A.S. *Veroiatnostnye metody v mekhanike mashin i konstruktsii* [Probabilistic methods in mechanics of machines and structures]. Moscow, Bauman Press, 2009. 224 p.

[10] Khog E., Choi K, Komkov V. *Analiz chuvstvitel'nosti pri proektirovanii konstruktsii* [The sensitivity analysis in the design of structures]. Moscow, Mir publ., 1988. 428 p.

[11] Gel'fand I.M. *Lektsii po lineinoi algebre* [Lectures on Linear Algebra]. Moscow, Dobrosvet MTsNMO publ., 1998. 320 p.

Статья поступила в редакцию 16.10.2015

Информация об авторах

ТУШЕВ Олег Николаевич (Москва) — доктор технических наук, профессор, зав. кафедрой «Аэрокосмические системы». МГТУ им. Н.Э. Баумана (105005, Москва, Российская Федерация, 2-я Бауманская ул., д. 5, стр. 1).

ДОНСКИХ Алексей Михайлович (Москва) — аспирант кафедры «Аэрокосмические системы». МГТУ им. Н.Э. Баумана (105005, Москва, Российская Федерация, 2-я Бауманская ул., д. 5, стр. 1, e-mail: donskihalexey@mail.ru).

Information about the authors

TUSHEV Oleg Nikolaevich (Moscow) — Doctor of Science, Professor, Head of Department of Aerospace Systems. Bauman Moscow State Technical University (105005, Moscow, Russian Federation, 2nd Baumanskaya St., Bldg. 5, Block 1).

DONSKIKH Aleksei Mikhailovich — Postgraduate, Department of Aerospace Systems. Bauman Moscow State Technical University (105005, Moscow, Russian Federation, 2nd Baumanskaya St., Bldg. 5, Block 1, e-mail: donskihalexey@mail.ru).