Расчет и конструирование машин

УДК 539.4 DOI 10.18698/0536-1044-2016-3-3-9

Вероятностная оценка появления в элементах конструкций усталостных повреждений

А.С. Гусев[1], К.Б. Даниленко[1], С.А. Стародубцева[2]

[1] МГТУ им. Н.Э. Баумана, 105005, Москва, Российская Федерация, 2-я Бауманская ул., д. 5, стр. 1
[2] Московский автомобильно-дорожный государственный технический университет (МАДИ), 125319, Москва, Российская Федерация, Ленинградский пр-т, д. 64

Probabilistic Estimation of Fatigue Damage in Structural Elements

A.S. Gusev[1], C.B. Danilenko[1], S.A. Starodubtseva[2]

[1] BMSTU, 105005, Moscow, Russian Federation, 2nd Baumanskaya St., Bldg. 5, Block 1
[2] Moscow Automobile and Road Construction State Technical University (MADI), 125319, Moscow, Russian Federation, Leningradskiy Ave, Bldg. 64

e-mail: dcb@bmstu.ru, danilenko@email.com, CTAHOK@gmail.com

Одной из проблем современного машиностроения является повышение прочностной надежности элементов конструкций и деталей машин, находящихся под воздействием нерегулярных интенсивных нагрузок. Такие нагрузки и соответствующие напряжения адекватно описываются методами теории вероятностей, математической статистики и теорией случайных процессов. В связи с этим достоверное расчетное прогнозирование прочности по критерию накопления усталостных повреждений и появления трещин при случайных процессах нагружения является актуальной задачей. Приведена расчетная оценка вероятности появления в элементах конструкций усталостных повреждений в зависимости от интенсивности воздействий и времени функционирования системы. Статистическая информация о прочности элементов конструкции основывается на законах распределения вероятностей для их пределов выносливости с учетом масштабного фактора, а информация о нагруженности — на корреляционных функциях и энергетических спектрах для напряжений, полученных по результатам решения соответствующих задач статистической динамики. Для получения основных результатов использовано понятие об абсолютном максимуме случайного процесса.

Ключевые слова: статистическая механика, прочностная надежность, усталость, выносливость, случайные процессы, гауссовские стационарные процессы, спектральная плотность, трехпараметрический закон, интегральная функция, накопление усталостных повреждений, абсолютный максимум.

One of the topical problems of modern mechanical engineering is to increase the strength safety of structural elements and machine parts exposed to irregular intense loads. Such loads and therefore, corresponding stresses can be sufficiently described by the theory of probability, mathematical statistics and the theory of random processes. Thus, reliable analytical prediction of strength by the criterion of accumulation of fatigue damage and crack occurrence under random loading is a relevant problem. The authors present an analytical estimation of probability of fatigue damage occurrence in structural elements depending on the action intensity and the time that the system is in operation. Statistical information on the strength of the elements is based on laws of probability distribution for their fatigue limits considering the scale factor, while the information on the loading is based on correlation functions and energy spectra for the stresses obtained by solving corresponding problems of statistical dynamics. To obtain key results, the concept of absolute maximum of random process is used.

Keywords: statistical mechanics, strength reliability, fatigue, durability, random processes, Gaussian stationary processes, spectral density, three-parameter law, integral function, accumulation of fatigue damage, absolute maximum.

Силовые воздействия на детали современных машин меняются во времени как по детерминированным (в основном циклическим), так и по случайным законам.

Цель работы — вывод формул вероятности возникновения усталостных повреждений в элементах конструкций в зависимости от внешних нагрузок и фактора времени.

Рассмотрим случай, когда в элементах конструкций возникают однородные по всему объему напряжения $x(t)$, представляющие собой гауссовские стационарные процессы [1] с нулевыми средними значениями и спектральными плотностями $S(\omega)$, а предел выносливости r материала конструкции — случайная величина с заданной плотностью вероятностей $f(r)$, определенная на образцах металла со стандартным объемом V_0, значительно меньшим, чем объем V конструкции.

Определим вероятность («опасность») того, что за некоторое время t в элементе конструкции объемом $V >> V_0$ напряжения хотя бы один раз превысят соответствующий этому объему уровень предела выносливости r_V, что будет соответствовать моменту старта процесса накопления усталостных повреждений (рис. 1).

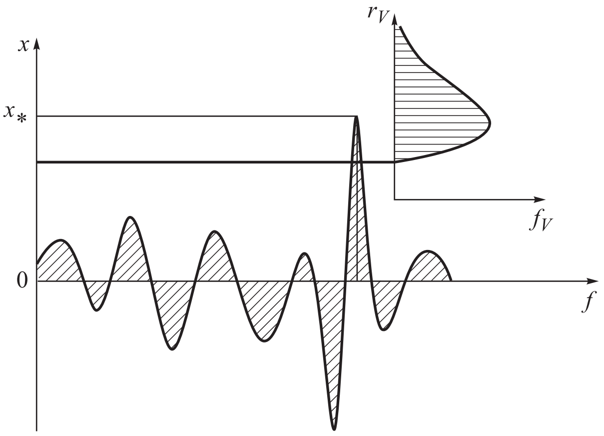

Рис. 1. Превышение напряжением уровня предела выносливости

Искомую вероятность определяют по формуле

$$P\{x(\tau) > r_V, \tau \in (0,t)\} =$$

$$= \int_{r_*}^{\infty} f_V(r_V)\left(\int_{r_V}^{\infty} f_*(x_*)dx_*\right)dr_V, \qquad (1)$$

где r_* — минимальное значение предела выносливости; $f_V(r_V)$ — плотность распределения вероятностей предела выносливости элемента конструкции объемом V; $f_*(x_*)$ — плотность распределения вероятностей для наибольшего в интервале времени $0\ldots t$ максимума x_* процесса $x(t)$.

Решим поставленную задачу, исходя из того, что распределение вероятностей для предела выносливости образцов металла объемом V_0 описывается трехпараметрическим законом Вейбулла [2] с интегральной функцией

$$F(r,V_0) = 1 - \exp\left[-\left(\frac{r - r_*}{r_c}\right)^{\alpha}\right] \text{ при } r \geq r_*$$

и плотностью вероятностей

$$f(r,V_0) = \frac{\alpha}{r_c^{\alpha}}(r - r_*)^{\alpha-1}\exp\left[-\left(\frac{r - r_*}{r_c}\right)^{\alpha}\right], \qquad (2)$$

где α, r_c — параметры распределения вероятностей.

Параметры α, r_c, r_* и среднее значение величины $(r - r_*)$ определяют по результатам испытаний образцов металла на усталость, так как из этих испытаний становятся известными среднее значение величины $(r - r_*)$, ее коэффициент вариации δ и величина r_*.

Параметр α определим из решения уравнения

$$\frac{\sqrt{\Gamma(1+2/\alpha) - \Gamma^2(1-1/\alpha)}}{\Gamma(1+1/\alpha)} = \delta, \qquad (3)$$

где гамма-функция

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-t}\, t^{x-1} dt.$$

Результаты решения уравнения (3) приведены на рис. 2 и в табл. 1.

Параметр r_c имеет вид

$$r_c = \frac{< r - r_* >}{\Gamma\left(1 + \dfrac{1}{\alpha}\right)},$$

где < > — знак усреднения.

Вероятность того, что в объеме $V = nV_0$ ($n = 1, 2, 3, \ldots$) предел выносливости будет превышать некоторое значение r, определим согласно теореме об умножении вероятностей и условию равномерного распределения напряжений по всему объему по формуле

$$P\{r, V\} = \left[1 - F(r, V_0)\right]^n. \quad (4)$$

Тогда в соответствии с выражениями (1) и (4) функция распределения вероятностей для предела выносливости в объеме V приобретает следующий вид:

$$F(r, V) = 1 - \left[1 - F(r, V_0)\right]^n =$$

$$= 1 - \exp\left[-\frac{V}{V_0}\left(\frac{r - r_*}{r_c}\right)^\alpha\right]. \quad (5)$$

Соответствующая плотность вероятностей

$$f_V(r_V) = \frac{\alpha V}{V_0} \frac{(r - r_*)^{\alpha-1}}{r_c^\alpha} \exp\left[-\left(\frac{r - r_*}{r_c}\right)^\alpha\right]. \quad (6)$$

В таком виде выражение (6) входит в формулу (1). Расчетная зависимость F от r, полученная по формуле (5) при различных значениях V и V_0, приведена на рис. 3.

Из соотношений (5), (6) и рис. 3 следует, что в статистическом смысле [3] $r_V < r_0$ (r_0 — предел выносливости образца объемом V_0).

Вычислим распределение вероятностей для наибольшего максимума процесса $x(t)$ на интервале времени $0\ldots t$, исходя из следующего функционала Стейнберга [4] для определения числа нулей (пересечений нулевого уровня) функции $x(t)$ за время t:

$$n_0(t) = \int_0^t \left|\dot{x}(\tau)\right| \delta\{x(\tau)\}\, d\tau, \quad (7)$$

где $\delta(\cdot)$ — дельта-функция Дирака; $\dot{x}(\tau)$ — первая производная процесса $x(t)$.

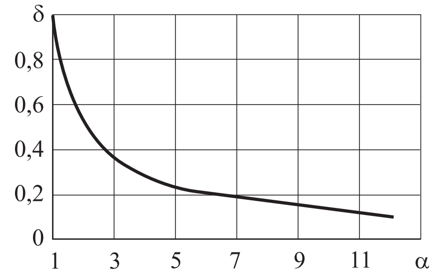

Рис. 2. Расчетная зависимость коэффициента вариации δ от параметра α

Таблица 1

δ	α	δ	α
1,00	1,00	0,50	2,10
0,90	1,11	0,40	2,70
0,80	1,26	0,30	3,71
0,70	1,45	0,22	5,34
0,60	1,72	0,10	12,15

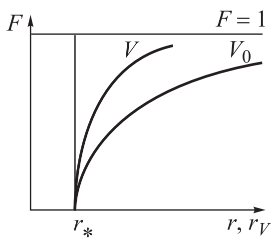

Рис. 3. Расчетная функция распределения вероятностей для предела выносливости при различных значениях V и V_0

Введя в рассмотрение совместную плотность вероятностей $f(x, \dot{x})$ для процесса $x(t)$ и его первой производной $\dot{x}(t)$, из выражения (7) получим формулу Райса [5] для определения среднего числа выбросов процессом $x(t)$ уровня x за время t:

$$\overline{n}(x, t) = \frac{t}{2\pi} \frac{S_{\dot{x}}}{S_x} \exp\left(-\frac{x^2}{2S_x^2}\right),$$

где дисперсия процесса $x(t)$ имеет вид

$$S_x^2 = \int_{-\infty}^{\infty} S(x) d\omega,$$

а дисперсия первой производной

$$S_{\dot{x}}^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \omega^2 S(x) d\omega.$$

Ожидаемое число максимумов для узкополосного случайного процесса $x(t)$ в интервале dx определим по формуле

$$dn_{\max} = \left|\overline{n}(x) - \overline{n}(x+dx)\right| = n_{\max} f_{\max}(x)dx, \quad (8)$$

где $n_{\max} = \overline{n}(0,t)$ — среднее число максимумов за время t; $f_{\max}(x)$ — плотность вероятностей для максимумов.

Из соотношения (8) следует, что распределение максимумов в узкополосных процессах соответствует закону Рэлея [6] с плотностью вероятностей

$$f_{\max}(x) = \frac{1}{n_{\max}}\left|\frac{d\overline{n}(x)}{dx}\right| = \frac{x}{S_x^2}\exp\left(-\frac{x^2}{2S_x^2}\right)$$

и интегральной функцией

$$F_M(x) = 1 - \exp\left(-\frac{x^2}{2S_x^2}\right).$$

Вероятность того, что в потоке из $n_{\max}$ наибольший из них будет меньше некоторого значения x_*, определяют в соответствии с теоремой о произведении вероятностей по формуле

$$F_*(x_*) = \left[F_M(x_*)\right]^{n_{\max}}.$$

Введя в рассмотрение величину $z = n_{\max}\left[1 - F_M(x_*)\right]$ при большом числе $n_{\max}$, получим

$$F_*(x_*) = \left(1 - \frac{z}{n_{\max}}\right)^{n_{\max}} \to \exp\left[-n_{\max}\left(1 - F_M(x_*)\right)\right] \approx$$

$$\approx 1 - n_{\max}\left[1 - F_M(x_*)\right] =$$

$$= \begin{cases} 0 \text{ при } x_* < x_0 = S_x\sqrt{2\ln n_{\max}}; \\ 1 - n_{\max}\exp\left(-\dfrac{x_*^2}{2S_x^2}\right) \text{ при } x_* \geq x_0, \end{cases} \quad (9)$$

где $\to$ — знак стремления к большому числу максимумов $n_{\max}$.

Вид функции (9) при различных значениях $n_{\max}$ показан на рис. 4.

В статистическом смысле величина наибольшего максимума со временем возрастает [7].

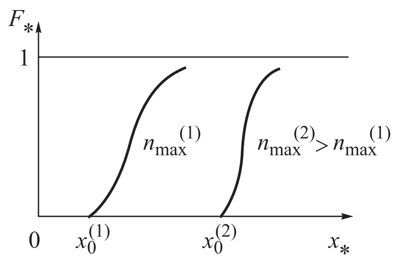

Рис. 4. Расчетная функция распределения вероятностей для наибольшего максимума при различных значениях $n_{\max}$

Плотность распределения вероятностей для наибольшего максимума

$$f_*(x_*) = \begin{cases} 0 \text{ при } x_* < x_0; \\ \dfrac{n_{\max} x_*}{S_x^2}\exp\left(-\dfrac{x_*^2}{2S_x^2}\right) \text{ при } x_* \geq x_0. \end{cases} \quad (10)$$

Подставив соотношения (6) и (10) в формулу (1), определим искомую вероятность старта процесса накопления усталостных повреждений в интервале времени $0\ldots t$.

При ориентировочных расчетах вместо выражения (10) можно принять, что

$$f_*(x_*) = \delta(x_* - x_0).$$

С учетом того, что

$$\int\limits_{r_V}^{\infty} \delta\left(x_* - x_0\right) = \begin{cases} 0 \text{ при } r_V > x_0; \\ 1 \text{ при } r_V \leq x_0, \end{cases}$$

получим

$$P\left\{x(\tau) > r_V, \tau \in (0,t)\right\} = \int\limits_{r_*}^{x_0} f_V(r_V)dr_V = F_V\left(x_0\right) =$$

$$= 1 - \exp\left[-\frac{V}{V_0}\left(\frac{x_0 - r_*}{r_c}\right)^{\alpha}\right] \text{ при } n_{\max} > n_*,$$

где наибольший максимум процесса нагружения

$$x_0 = S_x\sqrt{2\ln n_{\max}},$$

а критическое число максимумов, при котором начнется процесс накопления усталостных повреждений,

$$n_* = \exp\left[\frac{1}{2}\left(\frac{r_*}{S_x}\right)^2\right].$$

В качестве примера рассмотрим элемент конструкции из углеродистой стали с пределом выносливости r, заданным по результатам испытаний образцов со стандартным объемом V_0 полигоном частостей (рис. 5).

По результатам расчета получены следующие значения:

• минимальное значение предела выносливости $r_* = 300$ МПа;

• среднее значение $\overline{r} = \sum P_i r_i = 413{,}5$ МПа;

• момент второго порядка

$$<r^2> = \sum P_i r_i^2 = 1{,}79 \cdot 10^5 \text{ МПа}^2;$$

• момент третьего порядка

$$<r^3> = \sum P_i r_i^3 = 7{,}87 \cdot 10^7 \text{ МПа}^3;$$

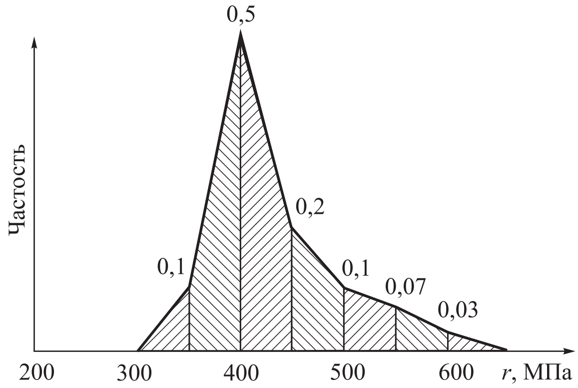

Рис. 5. Полигон частостей

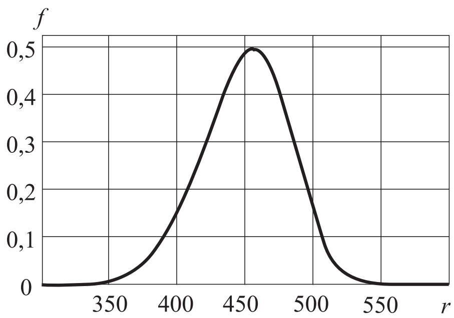

Рис. 6. Расчетная плотность распределения вероятностей предела выносливости

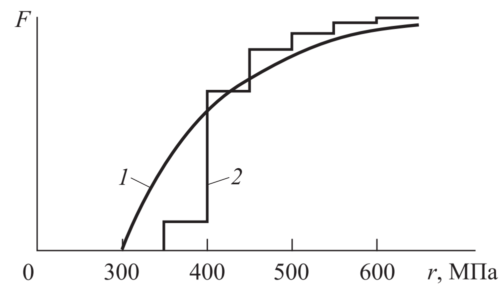

Рис. 7. Теоретическая (*1*) и эмпирическая (*2*) функции распределения вероятностей для предела выносливости

Таблица 2

λ	K	λ	K
0,5	0,036	1,1	0,822
0,6	0,14	1,2	0,89
0,65	0,208	1,4	0,96
0,75	0,373	1,5	0,978
0,8	0,456	1,6	0,99
1	0,73	1,8	0,999

• среднее квадратичное отклонение

$$S = \sqrt{<r^2> - \bar{r}^2} = 89{,}12 \text{ МПа;}$$

• коэффициент вариации $\delta = S/<r> = 0{,}2155$.

Решив уравнение (3), получим $\alpha = 5{,}344$. Параметр $r_c = 162{,}7$ МПа.

График функции (2) приведен на рис. 6.

Теоретическая и эмпирическая функции распределения вероятностей для предела выносливости показаны на рис. 7. Наибольшее различие между ними не превышает значения $\Delta = 0{,}05$, что при $n = 100$ испытаний соответствует параметру близости двух распределений вероятностей $\lambda = \Delta\sqrt{n} = 0{,}5$.

Некоторые значения функции критерия согласия А.Н. Колмогорова $K(\lambda)$ [8] приведены в табл. 2.

В рассматриваемом случае $K(\lambda) = 0{,}036$, что указывает на то, что с высокой вероятностью полученное теоретическое распределение вероятностей не противоречит опытным данным.

В качестве примера рассмотрим элемент конструкции с характеристиками сопротивления усталости [9]: $r_* = 30$ МПа, $\alpha = 4$, $r_c = 16{,}6$ МПа. Этот элемент подвергается воздействию случайных напряжений с $S_x = 7$ МПа.

Расчет показывает, что старт процесса накопления усталостных повреждений с очень малой вероятностью произойдет примерно через 10^4 циклов нагружения, а при 10^6 циклов нагружения этот процесс будет происходить с вероятностью 99 %.

Таким образом, предложенная методика расчета вполне эффективна для вероятностного прогнозирования старта процесса накопления усталостных повреждений.

Выводы

1. Получены формулы, описывающие вероятность возникновения усталостных трещин в нагруженном теле при воздействии случайных нагрузок.

2. Сравнение расчетных и экспериментальных результатов показывает их хорошее соответствие. Полученные выражения можно использовать для оценки прочностной надежности деталей.

Литература

[1] Болотин В.В. *Ресурс машин и конструкции.* Москва, Машиностроение, 1990. 448 с.

[2] Гусев А.С. *Вероятностные методы в механике машин и конструкций.* Москва, Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2009. 223 с.

[3] Когаев В.П., Махутов Н.А., Гусенков А.П. *Расчеты деталей машин и конструкций на прочность и долговечность.* Москва, Машиностроение, 1985. 223 с.

[4] Whitney C.A. *Random processes in physical systems*. New York, John Willey, 1990. 320 p.

[5] Гусев А.С. *Теоретические основы расчетов на сопротивление усталости.* Москва, Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2014. 46 с.

[6] Окопный Ю.А., Радин В.П., Чирков В.П. *Колебания линейных систем*. Москва, Спектр, 2014. 432 с.

[7] Elishakoff J. *Probabilistic Methods in the Theory of Structures*. New York, John Willey, 2010. 489 p.

[8] Волков В.М., Миронов А.А. Оценка надежности сварных соединений в условиях циклического нагружения. *Проблемы машиностроения и надежности машин*, 2011, № 1, с. 38–42.

[9] Абызов А.А., Березин И.Я. Расчет ресурса деталей при случайном нагружении. *Вестник ЮУрГУ. Сер. Машиностроение*, 2006, вып. 8, № 11, с. 30–36.

References

[1] Bolotin V.V. *Resurs mashin i konstruktsii* [Resource and construction machinery]. Moscow, Mashinostroenie publ., 1990. 448 p.

[2] Gusev A.S. *Veroiatnostnye metody v mekhanike mashin i konstruktsii* [Probabilistic methods in mechanics of machines and structures]. Moscow, Bauman Press, 2009. 223 p.

[3] Kogaev V.P., Makhutov N.A., Gusenkov A.P. *Raschety detalei mashin i konstruktsii na prochnost' i dolgovechnost'* [Calculations of machine parts and structures for strength and durability]. Moscow, Mashinostroenie publ., 1985. 223 p.

[4] Whitney C.A. *Random processes in physical systems*. New York, John Willey, 1990. 320 p.

[5] Gusev A.S. *Teoreticheskie osnovy raschetov na soprotivlenie ustalosti* [Theoretical Bases of Calculations Fatigue]. Moscow, Bauman Press, 2014. 46 p.

[6] Okopnyi Iu.A., Radin V.P., Chirkov V.P. *Kolebaniia lineinykh system* [Vibrations of linear systems]. Moscow, Spektr publ., 2014. 432 p.

[7] Elishakoff J. *Probabilistic Methods in the Theory of Structures*. New York, John Willey, 2010. 489 p.

[8] Volkov V.M., Mironov A.A. Otsenka nadezhnosti svarnykh soedinenii v usloviiakh tsiklicheskogo nagruzheniia [Evaluation of reliability of welded joints under cyclic loading]. *Problemy mashinostroeniia i nadezhnosti mashin* [Journal of Machinery Manufacture and Reliability]. 2011, no. 1, pp. 38–42.

[9] Abyzov A.A., Berezin I.Ia. Raschet resursa detalei pri sluchainom nagruzhenii [Calculation of the resource parts at random loading]. *Vestnik IuUrGU. Ser. Mashinostroenie* [Vestnik of SUSU. Ser. Mechanical engineering]. 2006, iss. 8, no. 11, pp. 30–36.

Статья поступила в редакцию 14.12.2015

Информация об авторах

ГУСЕВ Александр Сергеевич (Москва) — доктор технических наук, профессор кафедры «Прикладная механика». МГТУ им. Н.Э. Баумана (105005, Москва, Российская Федерация, 2-я Бауманская ул., д. 5, стр. 1, e-mail: dcb@bmstu.ru).

ДАНИЛЕНКО Константин Борисович (Москва) — старший преподаватель кафедры «Прикладная механика». МГТУ им. Н.Э. Баумана (105005, Москва, Российская Федерация, 2-я Бауманская ул., д. 5, стр. 1, e-mail: danilenko@email.com).

СТАРОДУБЦЕВА Светлана Александровна (Москва) — кандидат технических наук кафедры «Машиноведение и детали машин». Московский автомобильно-дорожный государственный технический университет (МАДИ) (125319, Москва, Российская Федерация, Ленинградский пр-т, д. 64, e-mail: СТАНОК@gmail.com).

Information about the authors

GUSEV Aleksandr Sergeevich (Moscow) — Doctor of Science (Eng.), Professor, Department of Applied Mechanics. Bauman Moscow State Technical University (105005, Moscow, Russian Federation, 2nd Baumanskaya St., Bldg. 5, Block 1, e-mail: dcb@bmstu.ru).

DANILENKO Konstantin Borisovich (Moscow) — Senior Lecturer, Department of Applied Mechanics. Bauman Moscow State Technical University (105005, Moscow, Russian Federation, 2nd Baumanskaya St., Bldg. 5, Block 1, e-mail: danilenko@email.com).

STARODUBTSEVA Svetlana Aleksandrovna (Moscow) — Candidate of Science (Eng.), Department of Theoretical Engineering and Machine Parts. Moscow Automobile and Road Construction State Technical University (MADI) (125319, Moscow, Russian Federation, Leningradskiy Ave., Bldg. 64, e-mail: СТАНОК@gmail.com).