

Расчет и конструирование машин

УДК 621.833

DOI 10.18698/0536-1044-2016-9-3-9

Теоретические исследования влияния различных параметров на предельный момент волновой зубчатой передачи

И.Е. Люминарский, С.Е. Люминарский

МГТУ им. Н.Э. Баумана, 105005, Москва, Российская Федерация, 2-я Бауманская ул., д. 5, стр. 1

A Theoretical Study of the Influence of Various Parameters on the Limit Torque of a Harmonic Drive

I.E. Lyuminarsky, S.E. Lyuminarsky

BMSTU, 105005, Moscow, Russian Federation, 2nd Baumanskaya St., Bldg. 5, Block 1

e-mail: katjstas@mail.ru, lie260@mail.ru



Рассмотрены особенности работы волновых зубчатых передач. Приведена математическая модель, учитывающая пространственный характер деформирования и взаимодействия элементов такой передачи. Разрешающая система уравнений получена методом Бубнова–Галеркина. Коэффициенты влияния определены методами пространственной теории упругости, а предельный момент — из условия появления проскока генератора. Исследовано влияние различных параметров на предельный момент волновой зубчатой передачи с кулачковым генератором волн и гибким колесом, выполненным в виде стакана с гибким дном. Проведенные расчеты показали, что радиальная деформация гибкого колеса, глубина захода зубьев, угол главного профиля исходного контура и радиальный зазор в гибком подшипнике оказывают значительное влияние на предельный момент, а предварительный натяг в зубчатом зацеплении, длина оболочки и форма деформирования гибкого колеса практически не влияют на этот параметр.

Ключевые слова: волновая зубчатая передача, гибкое колесо, жесткое колесо, генератор волн, предельный момент.



Specific work features of a harmonic drive are considered in this article. The mathematical model that takes into account spatial nature of deformation and interaction of the drive elements is presented. The resolving system of equations is obtained using the Bubnov–Galerkin’s method. The influence coefficients are determined by the methods of spatial theory of elasticity, while the limit torque is determined based on the generator slippage occurrence. The authors investigate the influence of various parameters on the limit torque of the harmonic drive with a cam wave generator and the flex spline shaped like a flexible bottom cup. The calculations have shown that radial deformation of the flex spline, depth of teeth engagement, main pressure angle of the basic contour and radial clearance in the flexible bearing have a significant influence on the limit torque, while preload in the gearing, length of the shell and shape of flex spline deformation have hardly any influence on this parameter.

Keywords: harmonic drive, flex spline, circular spline, wave generator, limit torque.

Волновые зубчатые передачи (ВЗП) имеют большое передаточное отношение при небольших габаритных размерах и малом количестве деталей. Такие передачи имеют высокую нагрузочную способность, а также (благодаря многопарности зацепления) повышенную кинематическую точность. Перечисленные достоинства позволяют широко использовать ВЗП в различных приводах систем автоматического управления, механических приводах роботов, авиационной и космической технике.

Работоспособность волновых передач определяется такими критериями, как усталостная прочность гибкого колеса (ГК), долговечность генератора волн, износостойкость боковых поверхностей зубьев ГК и жесткого колеса (ЖК) [1]. Для волновых передач, работающих с большими периодическими нагрузками (грузоподъемные машины, поворотные механизмы и др.), важным показателем работоспособности является предельный момент $M_{пр}$, представляющий собой максимальный момент сопротивления на выходном валу, при котором ВЗП может передавать движение. Нарушение работоспособности передачи может возникнуть вследствие проскока генератора волн или статического разрушения звеньев. Использование ВЗП в различных машинах показало, что при правильном выборе параметров передачи проскок генератора происходит без статического разрушения деталей ВЗП.

Проскок генератора происходит из-за упругой податливости элементов передачи. С увеличением момента сопротивления M_c уменьшается зазор между зубьями на входе в зацепление, что приводит к их интерференции. При дальнейшем повышении момента M_c интерференция растет, а зубья ГК и ЖК начинают взаимодействовать поверхностями вершин. При этом ЖК растягивается, генератор волн сжимается, а его ось отклоняется от оси вращения. Указанные деформации приводят к тому, что в одной из зон зацепления все зубья ГК выходят из впадин ЖК. В результате передача превращается в одноволновую и становится неработоспособной [2–4], т. е. при повороте ведущего звена (кулачка) ведомое звено не поворачивается. Такое явление называется проскоком генератора.

Постановка задачи. Исследованию явлений интерференции зубьев и проскока генератора посвящены работы [2–6] и др. Наиболее полное исследование влияния конструктивных пара-

метров на предельный момент проведено в работах А.И. Полетучего [2–4]. С помощью экспериментальных исследований им получена зависимость предельного момента $M_{пр}$ от радиальной деформации ГК, глубины захода зубьев, конструктивных размеров, биения генератора и других основных параметров передачи. Следует отметить, что испытания проводились для волновой передачи, имеющей внутренний диаметр ГК, равный 120 мм, и зубчатое присоединение ГК к валу. Теоретические зависимости для других размеров получены по приближенной инженерной методике, не учитывающей пространственный характер деформаций и взаимодействие элементов волновой передачи.

В работе [7] предложена методика определения предельного режима работы ВЗП, основанная на нахождении пространственного упругого взаимодействия элементов передачи методами теории упругости. Она позволяет более точно исследовать влияние различных параметров на предельный момент для неодинаковых конструктивных исполнений и размеров ВЗП.

Цель работы — теоретическое исследование влияния различных параметров на предельный момент ВЗП с кулачковым генератором волн и ГК, выполненным в виде стакана с гибким дном. Для расчетов использована пространственная математическая модель ВЗП, предложенная в работах [7, 8].

Проведенные исследования позволили уточнить имеющиеся и получить новые зависимости предельного момента $M_{пр}$ от параметров ВЗП.

Математическая модель. Основной причиной проскока генератора волн является упругая деформация деталей ВЗП, поэтому для определения предельного момента $M_{пр}$ выполняют расчет упругого взаимодействия элементов ВЗП. При расчете учитывают упругие деформации ГК и ЖК, наружного кольца гибкого подшипника (ГП), контактные деформации в ГП, изгибные деформации вала кулачка, смещение элементов ВЗП как жестких тел. Для определения сил взаимодействия элементов передачи используют ее пространственную модель [7, 9, 10].

Разрешающая система уравнений учитывает возможность взаимодействия: ГК и ЖК по боковым и наружным поверхностям зубьев, поверхностей ГК и наружного кольца ГП, а также тел качения с дорожками качения ГП. При со-

ставлении этих уравнений используют метод Бубнова–Галеркина.

Распределенные по поверхностям силы взаимодействия элементов ВЗП заменяют поверхностными силами с кусочно-линейным распределением. Для этого взаимодействующие поверхности разбивают на прямоугольные подобласти. Каждому узлу сетки ставят в соответствие безразмерную функцию Куранта φ_i [11], которая представляет собой шестиугольную пирамиду с единичной высотой. В качестве базисных функций используют функции $u_i = 3\varphi_i/S_i$, где S_i — площадь основания пирамиды. Базисные функции u_i представляют собой шестиугольные пирамиды с единичным объемом.

Таким образом, интенсивность распределенной силы взаимодействия двух поверхностей представляют линейной комбинацией базисных функций

$$p = \sum_{k=1}^{N_2} F_k u_k, \quad (1)$$

где коэффициенты F_k имеют размерность силы, их определяют в результате расчета разрешающей системы уравнений и неравенств [8].

Перемещения в узловых точках поверхности взаимодействия ГК и ГП от действия единичных сил u_k (коэффициенты влияния) определяют с использованием линейной теории оболочек. Коэффициенты влияния боковых поверхностей зубьев ГК складываются из глобальных перемещений, вызванных деформацией оболочки ГК и зубьев. Глобальные перемещения вычисляют по линейной теории оболочек. Деформацию зубьев ГК и коэффициенты влияния боковых поверхностей зубьев ЖК определяют методом конечных элементов с использованием пространственных элементов первого порядка.

Силы взаимодействия тел качения с дорожками качения ГП считают сосредоточенными. Сближения указанных тел находят по формулам Герца. Коэффициенты влияния наружной поверхности ГК определяют по линейной теории оболочек, а коэффициенты влияния наружной поверхности ЖК — методом конечных элементов.

Система разрешающих уравнений представляет собой совокупность канонических уравнений метода сил, уравнений равновесия ЖК, ГК, наружного кольца ГП, кулачка и неравенств, выражающих односторонний характер взаимодействия деталей:

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{D}} & \tilde{\mathbf{G}} \\ \tilde{\mathbf{G}} & \mathbf{C} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{F} \\ \mathbf{a} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{\boldsymbol{\delta}} - \tilde{\boldsymbol{\delta}}_0 \\ \mathbf{B} \end{pmatrix}; \\ \tilde{\delta}_j \geq 0; F_j \geq 0; \tilde{\delta}_j F_j = 0, j = 1, \dots, N, \end{cases} \quad (2)$$

где $\tilde{\mathbf{D}}$ — приведенная матрица узловых податливостей; \mathbf{C} — матрица, учитывающая податливость опор кулачка, ГК и ЖК; \mathbf{F} — вектор сил взаимодействия контактируемых поверхностей (для распределенных по поверхности сил элементы этого вектора равны коэффициентам F_k , входящим в выражение (1)); $\tilde{\boldsymbol{\delta}}$ и $\tilde{\boldsymbol{\delta}}_0$ — векторы приведенных зазоров в узловых точках между поверхностями в деформированном и недеформированном состоянии; \mathbf{a} — вектор смещения звеньев ВЗП как жестких тел; $\tilde{\mathbf{G}}$ — матрица, связывающая приращение вектора приведенных зазоров $\tilde{\boldsymbol{\delta}}$ с вектором смещения \mathbf{a} ; \mathbf{B} — вектор внешних сил и моментов, содержащий только один ненулевой элемент (момент сопротивления на ГК); $\tilde{\delta}_j$ — элементы вектора $\tilde{\boldsymbol{\delta}}$; F_j — элементы вектора \mathbf{F} .

Расчет выполняют в следующей последовательности.

1. При нулевом значении момента сопротивления на выходном валу методом введения восстанавливающих сил [9] решают систему разрешающих уравнений (2). В результате расчета определяют зоны контакта взаимодействующих деталей (узлы, в которых зазоры $\tilde{\delta}_j$ равны нулю). При этом предполагают, что интерференции зубьев на холостом ходу нет и, следовательно, зубья ГК и ЖК не могут взаимодействовать наружными поверхностями.

2. Далее постепенно увеличивают момент сопротивления на выходном валу M_c . При каждом значении M_c угол поворота кулачка φ_k изменяют от 0 до 90° с небольшим шагом. Для каждого значения φ_k выполняют расчет упругого взаимодействия элементов передачи. Такие вычисления необходимы для определения возможности проскока генератора, который происходит в случае, когда все зубья одной полуолуны ГК взаимодействуют с зубьями ЖК только по наружным поверхностям.

Расчет системы (2) при наличии интерференции зубьев осложняется тем, что заранее неизвестно, какими поверхностями (наружными или боковыми) могут взаимодействовать зубья ГК и ЖК. Для определения поверхностей возможного контакта зубьев вычисления выполняют по шагам путем постепенного увеличения момента сопротивления M_c и угла пово-

рота кулачка. Для определения поверхности возможного контакта пары зубьев рассматривают результаты двух вариантов расчета, первый из которых соответствует предыдущему шагу нагружения, второй — текущему шагу, т. е. расчету после поворота кулачка на небольшой угол $\Delta\varphi$ без смены возможных поверхностей контакта всех пар зубьев.

При этом возможны следующие случаи.

1. В первом варианте расчета заход j -й пары зубьев h_j (зазор между наружными поверхностями пары зубьев, взятый с обратным знаком) имеет отрицательное значение. Во втором варианте h_j принимает положительное значение, а зазор между рабочими боковыми поверхностями этой же пары зубьев δ_j — отрицательное значение. В этом случае возможными поверхностями контакта j -й пары зубьев считаются наружные поверхности зубчатых колес (интерференция зубьев на входе в зацепление).

2. Пара зубьев взаимодействует боковыми поверхностями до поворота кулачка, а после его поворота на угол $\Delta\varphi$ заход h_j этой пары зубьев становится отрицательным. В этом случае возможные поверхности контакта j -й пары зубьев меняются с боковых на наружные поверхности зубчатых колес (срыв зуба ГК из впадины на вершину ЖК).

3. Пара зубьев взаимодействует наружными поверхностями до поворота кулачка, а после его поворота на угол $\Delta\varphi$ боковой зазор δ_j этой пары зубьев становится положительным. В этом случае возможные поверхности контакта j -й пары зубьев меняются с наружных на боковые поверхности зубчатых колес (срыв зуба ГК с вершины во впадину ЖК).

Более подробно пространственная модель ВЗП изложена в работах [7, 8].

Результаты исследования. Исследование влияния различных параметров на предельный момент $M_{пр}$ проводили на примере ВЗП с кулачковым генератором волн и ГК, выполненным в виде стакана с гибким дном. Рассматриваемая передача имела следующие основные параметры: число зубьев ЖК (обозначено индексом b) $Z_b = 172$; число зубьев ГК (обозначено индексом g) $Z_g = 170$; коэффициенты смещения ЖК и ГК $X_b = 4,35$ и $X_g = 4,22$; модуль зацепления $m = 0,7$ мм; толщина оболочки ГК $h_0 = 1,1$ мм; толщина зубчатого венца во впадине ГК $h_1 = 1,3$ мм; длина оболочки ГК

$L = 120$ мм; ширина зубчатого венца ГК $b = 13$ мм; толщина ЖК $h_b = 21$ мм; наружный диаметр ГП $D_n = 120$ мм; ширина ГП $V = 20$ мм; относительная максимальная радиальная деформация ГК $w_0/m = 1,1$; глубина захода зубьев $h_d = m$; радиальный зазор в ГП $G_r = 26$ мкм. Номинальный момент $M_{ном} = 400$ Н·м. Погрешность установки кулачка соответствует седьмому качеству точности деталей ВЗП. Другие параметры передачи приведены в работе [7].

Рассмотрим влияние на предельный момент $M_{пр}$ следующих параметров: деформации w_0 и формы деформирования ГК, глубины захода зубьев h_d , толщины оболочки ГК h_0 , длины оболочки ГК L , толщины ЖК h_b , радиального зазора в ГП G_r , угла профиля исходного контура α и предварительного натяга в зубчатом зацеплении. Исходные значения этих параметров приведены выше. При изменении одного из них все другие параметры остаются неизменными. В приведенных ниже расчетных зависимостях использован относительный предельный момент $M_{пр}^*$, равный отношению предельного момента $M_{пр}$ к номинальному $M_{ном}$.

На рис. 1 приведена зависимость относительного предельного момента от относительной радиальной деформации ГК $w_0^* = w_0/m$. При увеличении радиальной деформации ГК w_0 предварительный натяг в зубчатом зацеплении и глубина захода зубьев не изменяются, что обеспечивается соответствующим изменением коэффициента смещения и радиуса окружности вершин ЖК. С увеличением радиальной деформации w_0 возрастает боковой зазор на входе в зацепление. Это приводит к повышению момента, при котором наступает интерференция зубьев, и, следовательно, к росту предельного момента $M_{пр}$.

На рис. 2 показано влияние относительной глубины захода зубьев $h_d^* = h_d/m$ на относи-

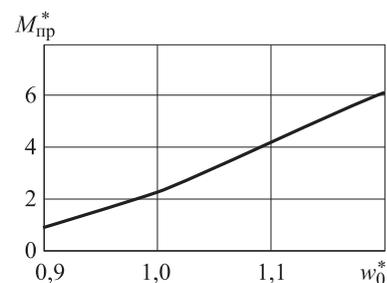


Рис. 1. Зависимость относительного предельного момента $M_{пр}^*$ от относительной радиальной деформации ГК w_0^*

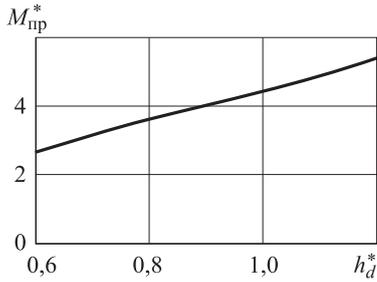


Рис. 2. Зависимость относительного предельного момента $M_{пр}^*$ от относительной глубины захода зубьев h_d^*

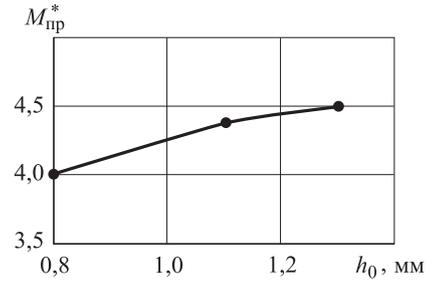


Рис. 3. Зависимость относительного предельного момента $M_{пр}^*$ от толщины оболочки ГК h_0

тельный предельный момент ВЗП $M_{пр}^*$. Увеличение h_d с 0,6 до 1,2 мм выполняются путем соответствующего изменения радиуса окружности вершин ГК. С ростом глубины захода зубьев предельный момент увеличивается почти по линейному закону.

Для выявления зависимости предельного момента от толщины оболочки ГК h_0 рассмотрены три варианта расчета с различными значениями h_0 и толщины зубчатого венца во впадине ГК h_1 : 1) $h_0 = 0,8$ мм, $h_1 = 1,1$ мм; 2) $h_0 = 1,1$ мм; $h_1 = 1,3$ мм; 3) $h_0 = 1,3$ мм; $h_1 = 1,5$ мм. Как видно из рис. 3, с ростом толщины оболочки ГК предельный момент повышается незначительно. Увеличение h_0 на 0,4 мм приводит к росту предельного момента всего на 12 %, который объясняется повышением крутильной и радиальной жесткости ГК. Это приводит к уменьшению угла закрутки ГК и, следовательно, к увеличению момента сопротивления, при котором наступает интерференция зубьев.

На рис. 4 приведены зависимости относительного предельного момента $M_{пр}^*$ от относительной толщины ЖК $h_b^* = h_b/m$, радиального зазора в ГП G_r и угла главного профиля исходного контура α .

Увеличение толщины ЖК h_b уменьшает его радиальную деформацию, что, в свою очередь

приводит к росту предельного момента (см. рис. 4, а). Толщина ЖК оказывает существенное влияние на предельный момент только при $h_b < 30m$. При $h_b > 30m$ деформация ЖК невелика, поэтому h_b незначительно влияет на $M_{пр}$.

В результате износа в ГП увеличивается радиальный зазор. Изменение зазора G_r с 26 до 78 мкм уменьшает предельный момент по линейному закону (см. рис. 4, б), что объясняется уменьшением радиальной деформации ГК.

Большое влияние на предельный момент $M_{пр}$ оказывает угол главного профиля исходного контура (см. рис. 4, в). Увеличение угла α с 20 до 28° приводит к росту $M_{пр}$ в 1,7 раза. Это связано с изменением деформации ГК под нагрузкой, происходящей вследствие увеличения угла наклона сил взаимодействия зубьев.

Исследование влияния длины оболочки гибкого колеса L на предельный момент $M_{пр}$ проводили при различных значениях относительной длины оболочки ГК: $L^* = L/D_n = 1,0; 0,75; 0,5$. Расчеты показали, что уменьшение L^* в указанных пределах снижает $M_{пр}$ приблизительно на 20 %.

Исследование влияния начального зазора в зубчатом зацеплении δ_0 на предельный момент $M_{пр}$ выполняли путем изменения коэффициента ширины впадины ГК. Расчеты про-

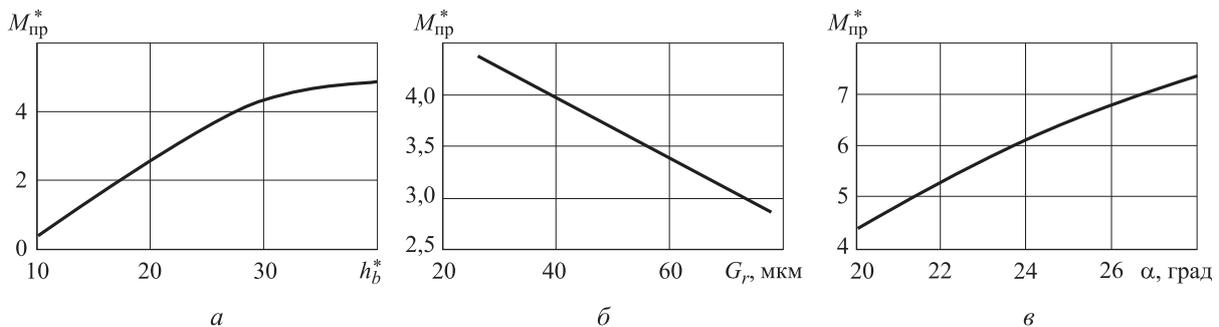


Рис. 4. Зависимости относительного предельного момента $M_{пр}^*$ от относительной толщины ЖК h_b^* (а), радиального зазора в ГП G_r (б) и угла главного профиля исходного контура α (в)

водили при $\delta_0 = 0,1m$; 0 ; $-0,1m$. Отрицательное значение δ_0 соответствует предварительному натягу. Результаты исследования показали отсутствие влияния начального зазора или натяга в зубчатом зацеплении на предельный момент $M_{пр}$.

Выводы

1. Результаты теоретических исследований, приведенные в статье, и экспериментальные данные, представленные в работе [3], показывают, что на предельный момент ВЗП существенное влияние оказывают радиальная деформация ГК, глубина захода зубьев и толщина оболочки ГК.

2. Установлено незначительное влияние длины оболочки ГК и предварительного натяга в зубчатом зацеплении на предельный момент

ВЗП, что не согласуется с данными, приведенными в работе [3].

3. Расчетным путем получены ранее неисследованные зависимости предельного момента от толщины ЖК, радиального зазора в ГП, угла главного профиля исходного контура и формы деформирования ГК.

4. Установлено, что форма деформирования ГК и толщина ЖК при толщине ЖК $h_b > 30t$ незначительно влияют на предельный момент.

5. В представленной работе предельный момент определен из условия отсутствия проскока генератора волн. Для рассматриваемой передачи предельный момент может превышать номинальный в 6–8 раз. Такие большие значения момента сопротивления могут вызывать пластические деформации элементов ВЗП, поэтому при определении предельного момента необходимо проводить расчет на статическую прочность.

Литература

- [1] Шувалов С.А. Основные критерии работоспособности волновых передач. *Вестник машиностроения*, 1976, № 11, с. 17–20.
- [2] Шувалов С.А., Полетучий А.И. Предельный крутящий момент, передаваемый волновой зубчатой передачей. *Вестник машиностроения*, 1976, № 11, с. 16–19.
- [3] Полетучий А.И. *Теория и конструирование высокоэффективных волновых зубчатых механизмов*. Харьков, НАКУ «ХАИ» им. М. Жуковского, 2005. 675 с.
- [4] Полетучий А.И., Стеценко Я.А. Оптимизация параметров волновой зубчатой передачи по предельному вращающему моменту. *Открытые информационные и компьютерные интегрированные технологии. Сб. науч. тр.* 2007, № 37, с. 73–79.
- [5] Flavius A. Ardelean. 3D modeling of the harmonic drive using «CATIA». *Annals of the Oradea University. Fascicle of Management and Technological Engineering*, 2007, vol. VI(XVI), pp. 882–885.
- [6] Тимофеев Г.А. *Разработка методов расчета и проектирования волновых зубчатых передач для приводов следящих систем*. Дис. ... д-ра техн. наук. Москва, МГТУ им. Н.Э. Баумана, 1997. 358 с.
- [7] Люминарский И.Е., Люминарский С.Е. Математическое моделирование предельного режима работы волновой зубчатой передачи. *Известия высших учебных заведений. Машиностроение*, 2015, № 12, с. 17–26.
- [8] Люминарский С.Е., Люминарский И.Е. Математическая модель волновой зубчатой передачи с дисковым генератором волн. *Машиностроение и инженерное образование*, 2012, № 2, с. 45–52.
- [9] Люминарский И.Е. *Расчет упругих систем с односторонними связями*. Москва, МГИУ, 2006, с. 38–99.
- [10] Люминарский И.Е., Люминарский С.Е. Расчет сил взаимодействия элементов волновой зубчатой передачи. *Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Машиностроение*, 2011, спец. вып. Энергетическое и транспортное машиностроение, с. 230–240.
- [11] Марчук Г.И. *Методы вычислительной математики*. Москва, Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит., 1989, с. 122–126.

References

- [1] Shuvalov S.A. Osnovnye kriterii rabotosposobnosti volnovykh peredach [The main criteria for performance of the wave gear]. *Vestnik mashinostroeniia* [Russian Engineering Research]. 1976, no. 11, pp. 17–20.

- [2] Shuvalov S.A., Poletuchii A.I. Predel'nyi krutiashchii moment, peredavaemyi volnovoii zubchatoi peredachei [The maximum torque transmitted wave gear]. *Vestnik mashinostroeniia* [Russian Engineering Research]. 1976, no. 11, pp. 16–19.
- [3] Poletuchii A.I. *Teoriia i konstruirovaniie vysokoeffektivnykh volnovykh zubchatykh mekhanizmov* [The theory and design of high-performance wave gear mechanisms]. Khar'kov, NAKU «KhAI» im. M. Zhukovskogo publ., 2005. 675 p.
- [4] Poletuchii A.I., Stetsenko Ia.A. Optimizatsiia parametrov volnovoii zubchatoi peredachi po predel'nomu vrashchaisushchemu momentu [Optimization of the parameters for the wave gear torque limit]. *Otkrytye informatsionnye i komp'yuternye integrirovannye tekhnologii: sb. nauch. trudov* [Public information and computer integrated technologies: collection of scientific works]. 2007, no. 37, pp. 73–79.
- [5] Ardelean F.A. 3D modeling of the harmonic drive using «CATIA». *Annals of the Oradea University. Fascicle of Management and Technological Engineering*, 2007, vol. 6 (16), pp. 882–885.
- [6] Timofeev G.A. *Razrabotka metodov rascheta i proektirovaniia volnovykh zubchatykh peredach dlia privodov slediashchikh sistem*. Diss. dokt. tekhn. nauk [Development of methods of calculation and design of wave gear drives for servo systems. Dr. tech. sci. diss.]. Moscow, Bauman Press, 1997. 358 p.
- [7] Liuminarskii I.E., Liuminarskii S.E. Matematicheskoe modelirovaniie predel'nogo rezhima raboty volnovoii zubchatoi peredachi [Mathematical Modelling of the Limit Working Capacity of a Harmonic Drive]. *Izvestiia vysshikh uchebnykh zavedenii. Mashinostroenie* [Proceedings of Higher Educational Institutions. Machine Building]. 2015, no. 12, pp. 17–26.
- [8] Liuminarskii S.E., Liuminarskii I.E. Matematicheskaiia model' volnovoii zubchatoi peredachi s diskovym generatorom voln [Mathematical model of a harmonic drive with the disk wave generator]. *Mashinostroenie i inzhenernoe obrazovanie* [Mechanical Engineering and Engineering Education]. 2012, no. 2, pp. 45–52.
- [9] Liuminarskii I.E. *Raschet uprugikh sistem s odnostoronnimi sviaziami* [Calculation of elastic systems with unilateral constraints]. Moscow, MGIU publ., 2006, pp. 38–99.
- [10] Liuminarskii I.E., Liuminarskii S.E. Raschet sil vzaimodeistviia elementov volnovoii zubchatoi peredachi [The calculation of the forces of interaction of elements of the wave gear]. *Vestnik MGTU im. N.E. Baumana. Ser. Mashinostroenie* [Herald of the Bauman Moscow State Technical University. Series Mechanical Engineering]. 2011, special is. Energeticheskoe i transportnoe mashinostroenie, pp. 230–240.
- [11] Marchuk G.I. *Metody vychislitel'noi matematiki* [Methods of Computational Mathematics]. Moscow, Nauka, Gl. red. fiz.-mat. lit. publ., 1989, pp. 122–126.

Статья поступила в редакцию 22.04.2016

Информация об авторах

ЛЮМИНАРСКИЙ Станислав Евгеньевич (Москва) — кандидат технических наук, доцент кафедры «Теория механизмов и машин». МГТУ им. Н.Э. Баумана (105005, Москва, Российская Федерация, 2-я Бауманская ул., д. 5, стр. 1, e-mail: katjstas@mail.ru).

ЛЮМИНАРСКИЙ Игорь Евгеньевич (Москва) — доктор технических наук, профессор кафедры «Теория механизмов и машин». МГТУ им. Н.Э. Баумана (105005, Москва, Российская Федерация, 2-я Бауманская ул., д. 5, стр. 1, e-mail: lie260@mail.ru).

Information about the authors

LYUMINARSKIY Stanislav Evgenievich (Moscow) — Candidate of Science (Eng.), Associate Professor, Theory of Mechanisms and Machines Department. Bauman Moscow State Technical University (105005, Moscow, Russian Federation, 2nd Baumanskaya St., Bldg. 5, Block 1, e-mail: katjstas@mail.ru).

LYUMINARSKIY Igor Evgenievich (Moscow) — Doctor of Science (Eng.), Professor, Theory of Mechanisms and Machines Department. Bauman Moscow State Technical University (105005, Moscow, Russian Federation, 2nd Bauman-skaya St., Bldg. 5, Block 1, e-mail: lie260@mail.ru).