

# Авиационная и ракетно-космическая техника

УДК 531.382

DOI 10.18698/0536-1044-2016-12-97-105

## Управляемый поворот космического аппарата с упругими панелями солнечных батарей\*

**С.В. Русских**

Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет), 125993, Москва, Российская Федерация, ГСП-3, А-80, Волоколамское шоссе, д. 4

## Controlled Turning of a Space Vehicle with Elastic Solar Panels

**S. V. Russkikh**

Moscow Aviation Institute (Nation Research University), 125993, Moscow, Russian Federation, GSP-3, A-80, Volokolamskoe Hwy., Bldg. 4



e-mail: sergey.russkikh@rambler.ru



Рассмотрена задача управляемого поворота модели симметричного космического аппарата с двумя одинаковыми упругими панелями солнечных батарей, каждая из которых состоит из нескольких плоских недеформируемых секций, соединенных упругими шарнирами, по крену с одновременным гашением в момент завершения поворота колебаний по нескольким низшим собственным антисимметричным формам. Предложен общий подход к решению задачи для произвольной трехмерной упругой системы, совершающей конечный поворот относительно некоторой неподвижной оси и нестационарные колебания. Сформулирована следующая задача: определить управляющую функцию, при которой линейная система поворачивается за определенное конечное время из одного состояния покоя в другое на заданный конечный угол с одновременным гашением в момент остановки упругих колебаний по нескольким низшим собственным формам. Предложен подход к решению сформулированной обратной задачи динамики пассивного управления системой, в котором получены решения для управляющей функции рассматриваемого класса в виде ряда по синусам и ряда по косинусам. В качестве примера для сравнения и анализа точности результатов, полученных с помощью предложенного подхода, выполнены расчеты для модели космического аппарата с двумя панелями солнечных батарей, состоящих из четырех плоских секций. Рассмотрен конечный поворот системы по крену с гашением в момент завершения поворота нескольких (от одной до трех) низших собственных форм колебаний с анализом влияния геометрических нелинейностей системы.

**Ключевые слова:** космический аппарат, управляемый поворот, гашение колебаний, управляющая функция, обратная задача динамики, поворот по крену.

\* Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 15-08-06259а).

**i** This work presents the problem of controlled roll turning of a symmetric space vehicle model with two identical solar panels, each consisting of several flat nondeformable sections connected by elastic hinges, with simultaneous damping of vibrations at several lower antisymmetric modes at the end of the turn. A general approach is proposed to the solution of the problem of an arbitrary three-dimensional elastic system undergoing a finite turning about a fixed axis, and nonstationary vibrations. The following problem is formulated: to determine a control function when the linear system turns during a finite time from one state of equilibrium to another by a predetermined angle, with simultaneous damping of elastic vibrations at the stopping time with regards to several lower eigenmodes. The author proposes an approach to solving the formulated inverse problem of dynamics of passive control of the system where solutions for the control function of the considered class are obtained as a series of sines and cosines. Calculations for a space vehicle model with two solar panels consisting of four flat sections are performed in order to compare and analyze the accuracy of the results obtained using the proposed method. A finite roll turning of the system with damping of several (from one to three) lower vibrational eigenmodes at the final moment of turning is considered. The influence of geometrical nonlinearities of the system is analyzed.

**Keywords:** space vehicle, controlled turning, vibration damping, control function, inverse problem of dynamics, roll turning.

При конечных поворотах манипуляционных роботов [1], космических аппаратов [2, 3] и других упругих систем возникают нестационарные колебания, которые необходимо быстро погасить по завершении поворота. Для этого часто используют различные активные или полупассивные системы управления [2]. Более простым является пассивное управление поворотом системы с гашением ее упругих колебаний, для чего требуется решить обратную задачу динамики системы и определить необходимый для конечного поворота и гашения колебаний управляющий момент.

Задача оптимального управления поворотом упругого стержня с одним и двумя твердыми телами на концах рассмотрена в статьях [4, 5]. В работах [6, 7] сформулирована обратная задача динамики при конечных перемещениях и поворотах произвольной упругой системы с гашением ее упругих колебаний и предложен

метод решения этой задачи путем согласования частот устранимых собственных форм колебаний с заданным силовым или кинематическим управляющим воздействием.

Цель работы — рассмотрение общих подходов к определению управляющих функций, позволяющих повернуть за определенное время на конечный угол линейную механическую систему с одновременным гашением в момент остановки упругих колебаний по нескольким низшим собственным формам, и проверка этих подходов на конкретных примерах расчета.

**Общий подход к решению задачи управления поворотом произвольной трехмерной упругой системы.** Рассмотрим систему, которая под действием нестационарной нагрузки совершает вращательное движение относительно некоторой неподвижной оси, сопровождаемое упругими колебаниями (рис. 1). Движение упругого тела описывается во вращающейся с угловой скоростью  $\omega_z = \dot{\theta}$  относительно оси  $z$  системе координат  $0xyz$ , угол поворота  $\theta(t)$  которой считается конечным (может быть большим), а относительные упругие перемещения — малыми. Упругое тело является свободным по углу поворота (вариация  $\delta\theta$  произвольна) и упругим перемещениям. Если система свободна по всем степеням свободы твердого тела, то ось  $z$  должна совпадать с одной из главных центральных осей такого тела, а главный вектор и проекции главного момента нагрузки на оси  $x$ ,  $y$  должны равняться нулю.

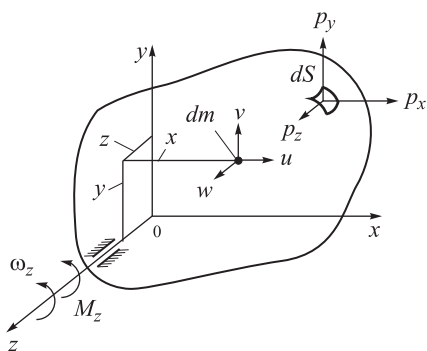


Рис. 1. Произвольная трехмерная упругая система

Кинетическая энергия вращающейся относительно оси  $z$  системы определяется выражением

$$T = \frac{1}{2} \int_V [(-\omega_z(y+v) + \dot{u})^2 + (\omega_z(x+u) + \dot{v})^2 + \dot{w}^2] dm.$$

При малых упругих колебаниях, полагая  $x+u \approx x$ ,  $y+v \approx y$ , т. е. пренебрегая нелинейными членами третьего и четвертого порядка, представляющими центробежные и кориолисовы силы в относительном движении, кинетическую энергию можно представить в виде

$$T = \frac{1}{2} \int_V [\omega_z^2(x^2 + y^2) + 2\omega_z(x\dot{v} - y\dot{u}) + (\dot{u}^2 + \dot{v}^2 + \dot{w}^2)] dm, \quad (1)$$

где  $dm = \rho dV$  ( $\rho$  и  $V$  — плотность и объем всех элементов системы).

Упругие перемещения системы, имеющей в относительном движении конечное число  $s$  степеней свободы, в обобщенных координатах  $q_i(t)$ ,  $i = 1, 2, \dots, s$  записываются как

$$u = \sum_{i=1}^s q_i U_i; \quad v = \sum_{i=1}^s q_i V_i; \quad w = \sum_{i=1}^s q_i W_i, \quad (2)$$

где  $U_i(x, y, z)$ ,  $V_i(x, y, z)$ ,  $W_i(x, y, z)$  — известные (или заданные) функции, представляющие собой возможные перемещения системы, т. е. удовлетворяющие условиям непрерывности перемещений элементов, согласно принятой модели их деформирования, и геометрическим условиям их соединения (связям). Для приведения системы, имеющей распределенные характеристики упругости, к системе с конечным числом степеней свободы можно использовать метод Ритца или метод конечных элементов.

Угол поворота системы  $\theta$ , являющийся циклической обобщенной координатой (от которой потенциальная энергия не зависит), обозначим как  $\theta = q_0(t)$ . С учетом выражения (2) и  $\omega_z = \dot{q}_0$  запишем кинетическую энергию (1) в обобщенных координатах:

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=0}^s \sum_{j=0}^s m_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j, \quad (3)$$

В выражении (3)

$$m_{00} = J_z = \int_V (x^2 + y^2) dm;$$

$$m_{0i} = m_{i0} = \int_V (xV_i - yU_i) dm;$$

$$m_{ij} = \int_V (U_i U_j + V_i V_j + W_i W_j) dm; \quad i, j = 1, 2, \dots, s,$$

где  $J_z$  — момент инерции системы относительно оси  $z$ .

Малые упругие деформации элементов системы линейно зависят от их перемещений и, следовательно, от обобщенных координат. Поэтому потенциальную энергию деформации системы можно записать в виде квадратичной формы обобщенных координат:

$$\Pi = \frac{1}{2} \sum_{i=0}^s \sum_{j=0}^s k_{ij} q_i q_j, \quad (4)$$

где  $k_{ij} = k_{ji}$  — коэффициенты жесткости;  $k_{00} = 0$ ,  $k_{0i} = 0$  при  $i = 1, 2, \dots, s$ .

Потенциальной энергией гравитации, зависящей от упругих перемещений и угла поворота  $\theta$  системы, будем пренебрегать.

Вариация работы действующих на систему поверхностных нагрузок  $p_x(x, y, z, t)$ ,  $p_y(x, y, z, t)$ ,  $p_z(x, y, z, t)$  при допущениях  $x+u \approx x$ ,  $y+v \approx y$  имеет вид

$$\begin{aligned} \delta A_p &= \int_S [p_x(-y\delta\theta + \delta u) + p_y(x\delta\theta + \delta v) + p_z\delta w] dS = \\ &= \sum_{i=0}^s Q_i \delta q_i, \end{aligned} \quad (5)$$

где

$$Q_0 = M_z = \int_S (p_y x - p_x y) dS;$$

$$Q_i = \int_S (p_x U_i + p_y V_i + p_z W_i) dS; \quad i = 1, 2, \dots, s,$$

где  $M_z$  — управляющий момент;  $\delta u$ ,  $\delta v$ ,  $\delta w$  и  $\delta q_i$  — вариации упругих перемещений системы и обобщенных координат соответственно.

С учетом выражений (3)–(5) уравнения движения системы в обобщенных координатах

$$\sum_{j=0}^s [m_{ij} \ddot{q}_j + k_{ij} q_j] = Q_i; \quad i = 0, 1, 2, \dots, s,$$

запишем в матричной форме:

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{K} \mathbf{q} = \mathbf{Q}, \quad (6)$$

где  $\mathbf{M} = [m_{ij}]$ ,  $\mathbf{K} = [k_{ij}]$  и  $\mathbf{q} = \{q_i\}$ ,  $\mathbf{Q} = \{Q_i\}$  — соответственно матрицы и векторы порядка  $s+1$  при  $i, j = 0, 1, 2, \dots, s$ .

Преобразуем уравнение (6) к нормальным координатам. Положим  $\mathbf{Q} \equiv 0$ ,  $\mathbf{q} = \mathbf{X} \sin \omega t$  и

решим задачу о собственных колебаниях свободной по углу  $\theta$  упругой системы

$$[\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M}]\mathbf{X} = 0 \rightarrow \omega_n, \mathbf{X}_n; \quad n = 0, 1, 2, \dots, s.$$

Вектор  $\mathbf{q}$  представим в виде разложения по собственным формам колебаний

$$\mathbf{q} = \sum_{0 \leq n \leq s} f_n \mathbf{X}_n.$$

С учетом условий ортогональности собственных векторов  $\mathbf{X}_m^T \mathbf{M} \mathbf{X}_n = 0$ ,  $\mathbf{X}_m^T \mathbf{K} \mathbf{X}_n = 0$  при  $m \neq n$  получим уравнения для нормальных координат  $f_n(t)$ :

$$m_n(\ddot{f}_n + \omega_n^2 f_n) = F_n; \quad n = 0, 1, 2, \dots, s, \quad (7)$$

где  $m_n = \mathbf{X}_n^T \mathbf{M} \mathbf{X}_n$ ;  $m_n \omega_n^2 = \mathbf{X}_n^T \mathbf{K} \mathbf{X}_n$ ;  $F_n = \mathbf{X}_n^T \mathbf{Q}$ .

При  $n=0$ :  $\omega_0 = 0$ ;  $\mathbf{X}_0 = [1 \ 0 \ 0 \ \dots \ 0]^T$ ;  $m_0 = J_z$ ;  $f_0 = \theta$ ;  $F_0 = M_z$ . Уравнение (7) при  $n=0$  представляет собой уравнение вращательного движения системы как абсолютно твердого тела:

$$J_z \ddot{\theta} = M_z(t). \quad (8)$$

Далее при решении обратной задачи динамики пассивного управления поворотом системы и ее упругих колебаний будем считать, что все нагрузки изменяются по времени пропорционально одной безразмерной управляющей функции  $\mu(t)$ :

$$F_n(t) = F_n^0 \mu(t); \quad M_z(t) = M_z^0 \mu(t), \quad (9)$$

где  $F_n^0$  и  $M_z^0$  — постоянные амплитудные значения нагрузок, имеющие размерность силы и момента соответственно.

С учетом выражения (9) при нулевых начальных условиях  $\dot{\theta}(0) = 0$ ,  $\theta(0) = 0$  решение уравнения (8) имеет вид

$$\dot{\theta} = \frac{M_z^0}{J_z} \int_0^t \mu(\tau) d\tau; \quad \theta = \frac{M_z^0}{J_z} \int_0^t \mu(\tau)(t - \tau) d\tau. \quad (10)$$

**Постановка обратной задачи динамики пассивного управления системой и подход к ее решению.** Сформулируем следующую задачу: найти такие управляющие функции  $\mu(t)$ , при которых система за время  $T$  поворачивается на конечный угол  $\theta_T$  из одного состояния покоя ( $\dot{\theta}(0) = 0$ ;  $\theta(0) = 0$ ;  $\dot{f}_n(0) = 0$ ;  $f_n(0) = 0$ ,  $n = 1, 2, \dots, s$ ) в другое с одновременным гашением в момент остановки  $p \leq s$  собственных упругих колебаний ( $\dot{\theta}(T) = 0$ ;  $\theta(T) = \theta_T$ ;  $\dot{f}_n(T) = 0$ ;  $f_n(T) = 0$ ,  $n = 1, 2, \dots, p$ ).

При  $\dot{\theta}(T) = 0$  и  $\theta(T) = \theta_T$  из решения уравнения (10) следуют условия

$$\int_0^T \mu(\tau) d\tau = 0; \quad (11)$$

$$\theta_T = -\frac{M_z^0}{J_z} \int_0^T \mu(\tau) \tau d\tau. \quad (12)$$

Функцию  $\mu(t)$  будем искать в классе антисимметричных относительно  $t = T/2$  функций  $\mu(t) = -\mu(T - t)$ , удовлетворяющих условию (11) и обеспечивающих разгон системы при  $0 \leq t < T/2$  и торможение при  $T/2 < t \leq T$ .

Используя ряды тригонометрических функций, получим решение задачи гашения упругих колебаний системы при конечном повороте.

Сначала представим функцию  $\mu(t)$  в виде ряда синусов:

$$\mu(t) = \sum_k b_k \sin k\Omega t; \quad \Omega = 2\pi/T; \quad k = 1, 2, 3, \dots \quad (13)$$

Здесь  $b_k$  — безразмерный коэффициент при каждом члене ряда разложения функции  $\mu(t)$  по синусам, подлежащий дальнейшему определению.

С учетом выражения (13) угол поворота системы (10) изменяется как

$$\theta(t) = \frac{M_z^0}{J_z} \sum_k b_k \frac{1}{k\Omega} \left( t - \frac{1}{k\Omega} \sin k\Omega t \right)$$

и при  $t = T$  с учетом условия (12) будет равен

$$\theta_T = \frac{M_z^0}{J_z} \frac{T}{\Omega} \sum_k \frac{1}{k} b_k. \quad (14)$$

Решение уравнений (7) с учетом выражений (9) и (13) при  $n = 1, 2, 3, \dots$ ,  $\omega_n \neq k\Omega$  и начальных условиях  $\dot{f}_n(0) = 0$ ,  $f_n(0) = 0$  имеет вид

$$\dot{f}_n = \frac{F_n^0}{m_n} \sum_k b_k \frac{k\Omega}{\omega_n^2 - k^2\Omega^2} (\cos k\Omega t - \cos \omega_n t);$$

$$f_n = \frac{F_n^0}{m_n} \sum_k b_k \frac{1}{\omega_n^2 - k^2\Omega^2} \left( \sin k\Omega t - \frac{k\Omega}{\omega_n} \sin \omega_n t \right).$$

Конечные условия  $\dot{f}_n(T) = 0$ ,  $f_n(T) = 0$  определяются выражениями

$$(1 - \cos \omega_n T) \sum_k b_k \frac{k\Omega}{\omega_n^2 - k^2\Omega^2} = 0; \quad (15)$$

$$-\frac{1}{\omega_n} \sin \omega_n T \sum_k b_k \frac{k\Omega}{\omega_n^2 - k^2\Omega^2} = 0$$

и удовлетворяются при одном условии:

$$\sum_k b_k \frac{k\Omega}{\omega_n^2 - k^2\Omega^2} = 0; \quad k = 1, 2, 3, \dots \quad (16)$$

Из уравнений (14), (16) следует, что для поворота системы из состояния покоя на угол  $\theta_T$  при  $\dot{\theta}(T) = 0$  за время  $T$  с одновременным устранением в момент  $t = T$  упругих колебаний по  $N$  низшим собственным формам ( $n = 1, 2, \dots, N$ ) с помощью управляющего момента  $M_z(t) = M_z^0 \mu(t)$  в разложении (13) необходимо взять  $N + 1$  членов при  $k = 1, 2, \dots, N + 1$ . Для определения коэффициентов  $b_1, b_2, \dots, b_{N+1}$  при  $\omega_n \neq k\Omega$  используем систему  $N + 1$  уравнений (14) и (16):

$$\sum_{k=1}^{N+1} \frac{1}{k} b_k = \frac{2\pi}{T^2} \frac{J_z}{M_z^0} \theta_T;$$

$$\sum_{k=1}^{N+1} \frac{k\Omega}{\omega_n^2 - k^2\Omega^2} b_k = 0; \quad n = 1, 2, \dots, N.$$

Из выражений (15) следует, что колебания по  $n$ -й форме могут быть устранены при одновременном выполнении условий

$$1 - \cos \omega_n T = 0; \quad \sin \omega_n T = 0; \quad \omega_n \neq k\Omega.$$

В этом случае для гашения колебаний, например, при  $k = 1$ ,  $\mu(t) = b_1 \sin \Omega t$ , одновременно по нескольким собственным формам ( $n = 1, 2, 3, \dots$ ) необходимо, чтобы их собственные частоты  $\omega_n > \omega_{n-1}$  удовлетворяли соотношениям  $\omega_n T = 2\pi\psi_n$  ( $\psi_n$  — одно из чисел последовательности 2, 3, 4, ...) [7].

Далее представим функцию  $\mu(t)$  в виде ряда косинусов:

$$\mu(t) = \sum_k a_k \cos \frac{k\Omega}{2} t; \quad \Omega = 2\pi/T; \quad k = 1, 3, 5, \dots \quad (17)$$

Здесь  $a_k$  — безразмерный коэффициент при каждом члене ряда разложения функции  $\mu(t)$  по косинусам, подлежащий дальнейшему определению.

Угол поворота (10) изменяется как

$$\theta(t) = \frac{M_z^0}{J_z} \frac{4}{\Omega^2} \sum_k a_k \frac{1}{k^2} (1 - \cos \frac{k\Omega}{2} t)$$

и при  $t = T$  будет равен

$$\theta_T = \frac{M_z^0}{J_z} \frac{8}{\Omega^2} \sum_k \frac{1}{k^2} a_k. \quad (18)$$

Решение уравнений (7) с учетом выражений (9), (17) при  $n = 1, 2, 3, \dots$ ,  $\omega_n \neq k\Omega/2$  и начальных условиях  $f_n(0) = 0$ ,  $\dot{f}_n(0) = 0$  имеет вид

$$\dot{f}_n = \frac{F_n^0}{m_n} \sum_k \frac{a_k}{\omega_n^2 - k^2\Omega^2/4} \left( \omega_n \sin \omega_n t - \frac{k\Omega}{2} \sin \frac{k\Omega}{2} t \right);$$

$$f_n = \frac{F_n^0}{m_n} \sum_k \frac{a_k}{\omega_n^2 - k^2\Omega^2/4} \left( \cos \frac{k\Omega}{2} t - \cos \omega_n t \right).$$

Конечные условия при  $t = T$  определяются выражениями

$$\omega_n \sin \omega_n T \sum_k \frac{a_k}{\omega_n^2 - k^2\Omega^2/4} = 0;$$

$$-(1 + \cos \omega_n T) \sum_k \frac{a_k}{\omega_n^2 - k^2\Omega^2/4} = 0 \quad (19)$$

и удовлетворяются при одном условии:

$$\sum_k \frac{a_k}{\omega_n^2 - k^2\Omega^2/4} = 0; \quad k = 1, 3, 5, \dots \quad (20)$$

Для гашения упругих колебаний по  $N$  низшим собственным формам ( $n = 1, 2, \dots, N$ ) в момент  $t = T$  необходимо определить  $N + 1$  коэффициентов  $a_k$  при  $k = 1, 3, 5, \dots, 2N + 1$  из  $N + 1$  уравнений (18) и (20):

$$\sum_k \frac{a_k}{k^2} = \frac{\pi^2}{2T^2} \frac{J_z}{M_z^0} \theta_T;$$

$$\sum_k \frac{a_k}{\omega_n^2 - k^2\Omega^2/4} = 0; \quad n = 1, 2, \dots, N.$$

Кроме того, например, при  $k = 1$ ,  $\mu(t) = a_1 \cos(\Omega t/2)$  уравнения (19) удовлетворяются при одновременном выполнении условий

$$\sin \omega_n T = 0; \quad 1 + \cos \omega_n T = 0; \quad \omega_n T \neq \pi.$$

В этом случае колебания по нескольким собственным формам ( $n = 1, 2, 3, \dots$ ) при  $\omega_n > \omega_{n-1}$  устраняются, если выполняются условия  $\omega_n T = 2\pi\psi_n$  ( $\psi_n$  — выбранное для каждого  $\omega_n$  число из последовательности 3/2, 5/2, 7/2, ...) [7]. Этого можно добиться так же, как и в случае действия управляющего момента в виде волны синусоиды, путем специальной настройки собственных частот исследуемой системы.

**Пример расчета.** Рассмотрим плоское движение по крену модели симметричного относительно плоскости  $y = 0$  космического аппарата (КА) с двумя одинаковыми плоскими панелями солнечных батарей (СБ), каждая из которых состоит из недеформируемых секций, соединенных между собой и с недеформируемым центральным телом упругими шарнирами (рис. 2).

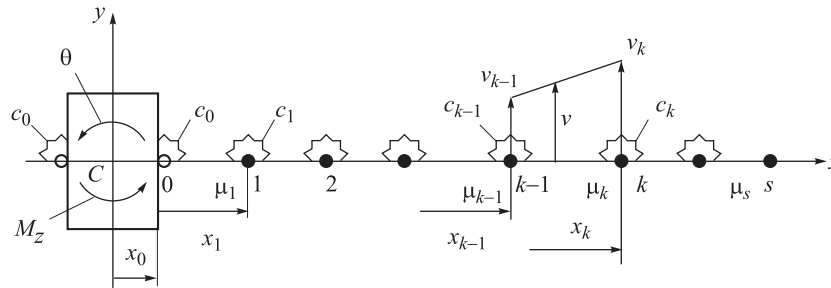


Рис. 2. Космический аппарат с панелями солнечных батарей

При повороте системы на конечный угол  $\theta(t)$  под действием управляющего момента  $M_z(t)$  ее центр масс  $C$  остается неподвижным. Поперечное перемещение  $v$  и угол поворота  $k$ -й секции  $\varphi_k$  правой панели СБ в относительном движении при малых колебаниях ( $\sin \varphi_k \approx \varphi_k$ ,  $\cos \varphi_k \approx 1$ ) определяются выражениями

$$v = v_{k-1} + \varphi_k \xi; \quad \varphi_k = \frac{1}{a_k}(v_k - v_{k-1}); \quad k = 1, 2, \dots, s;$$

$$a_k = x_k - x_{k-1}; \quad \xi = x - x_{k-1}; \quad 0 \leq \xi \leq a_k;$$

$$v_0 = 0; \quad \varphi_0 = 0,$$

где  $v_0$  и  $\varphi_0$  — поперечное перемещение и угол поворота, задающие граничные условия стыковки КА и первой секции панели СБ.

Кинетическая энергия КА с двумя панелями СБ, совершающими при конечном повороте малые антисимметричные колебания согласно выражению (1), при  $\omega_z = \dot{\theta}$ ,  $u \approx 0$ ,  $w \approx 0$  имеет вид

$$T = \frac{1}{2} J_0 \dot{\theta}^2 + \sum_{k=1}^s \left[ \mu_k \dot{v}_k^2 + \frac{m_k a_k}{3} (\dot{v}_{k-1}^2 + \dot{v}_{k-1} \dot{v}_k + \dot{v}_k^2) \right] + 2\dot{\theta} \sum_{k=1}^s \left\{ \mu_k x_k \dot{v}_k + \frac{m_k a_k}{3} \left[ \left( x_{k-1} + \frac{1}{2} x_k \right) \dot{v}_{k-1} + \left( \frac{1}{2} x_{k-1} + x_k \right) \dot{v}_k \right] \right\},$$

где момент инерции определяется выражением

$$J_z = J_0 + 2 \sum_{k=1}^s \left[ \mu_k x_k^2 + \frac{m_k a_k}{3} (x_{k-1}^2 + x_{k-1} x_k + x_k^2) \right].$$

Здесь  $\mu_k$  — сосредоточенная масса в  $k$ -м шарнирном узле;  $m_k$  — погонная вдоль оси  $x$  масса  $k$ -й секции;  $J_0$  — момент инерции центрального тела КА.

Потенциальная энергия деформации пружин в упругих шарнирных узлах двух панелей СБ и вариация работы управляющего момента

определяются по соответствующим выражениям:

$$\Pi = \sum_{k=0}^{s-1} c_k (\varphi_{k+1} - \varphi_k)^2; \quad \delta A_p = M_z \delta \theta,$$

где  $c_k$  — жесткость пружины по углу поворота в  $k$ -м узле.

Уравнения колебаний системы получаем как уравнения Лагранжа в обобщенных координатах  $\theta, v_1, v_2, \dots, v_s$  и записываем в матричном виде (6) для вектора  $\mathbf{q} = [\theta \ v_1 \ v_2 \ \dots \ v_s]^T$ . Уравнения колебаний КА в нелинейной постановке получены в работе [8].

Расчеты выполнены для системы со следующими исходными данными:  $J_0 = 83,33 \text{ кг}\cdot\text{м}^2$ ;  $x_0 = 0,5 \text{ м}$ ;  $s = 4$ ;  $a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = 1 \text{ м}$ ;  $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \mu_4 = 1 \text{ кг}$ ;  $m_1 = m_2 = m_3 = m_4 = 1,5 \text{ кг}\cdot\text{м}^{-1}$ ;  $c_0 = 1500 \text{ Н}\cdot\text{м}$ ,  $c_1 = c_2 = c_3 = 1000 \text{ Н}\cdot\text{м}$ . Собственные частоты колебаний исходной системы:  $\omega_0 = 0$ ;  $\omega_1 = 6,067 \text{ рад}\cdot\text{с}^{-1}$ ;  $\omega_2 = 21,978 \text{ рад}\cdot\text{с}^{-1}$ ;  $\omega_3 = 54,177 \text{ рад}\cdot\text{с}^{-1}$ ;  $\omega_4 = 88,019 \text{ рад}\cdot\text{с}^{-1}$ .

На рис. 3 слева приведены результаты решения в рядах по синусам (13) задачи управляемого поворота системы за время  $T = 3 \text{ с}$  на угол  $\theta_T = \pi/2$  с гашением упругих колебаний при  $t = T$  одновременно по  $N$  низшим собственным формам. Результаты решения той же самой задачи в рядах по косинусам (17) показаны на рис. 3 справа. Время  $T = 3 \text{ с}$  выбрано таким образом, чтобы колебания для такой системы не выходили за пределы линейной теории ( $\sin \varphi_k \approx \varphi_k$ ,  $\cos \varphi_k \approx 1$ ,  $|\varphi_k| < 0,5 \text{ рад}$ ). В этом случае решения задачи в данной постановке по линейной и нелинейной теории практически совпадают.

Оценка колебаний при  $t > T$ , представляющих колебания по непогашенным высшим собственным формам ( $n > N$ ), показала, что в обоих рассмотренных случаях эти «остаточные» колебания пренебрежимо малы (даже при  $N = 1$ , что видно из рис. 3).

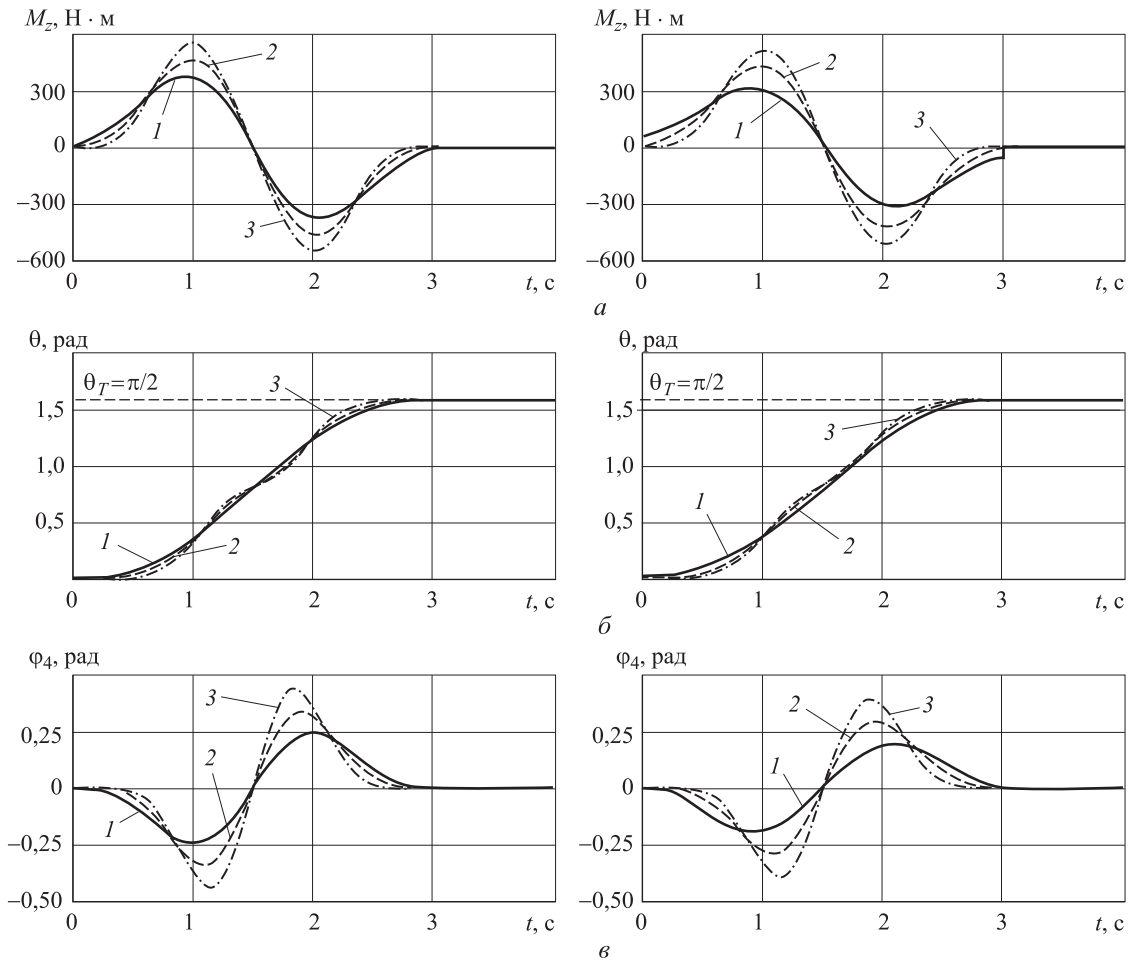


Рис. 3. Зависимости управляющего момента  $M_z$  (а), углов  $\theta$  (б) и  $\phi_4$  (в) от времени  $t$ , полученные при решении задачи в рядах по синусам (слева) и косинусам (справа) с гашением собственных форм колебаний:  
1 —  $N=1$ ; 2 —  $N=2$ ; 3 —  $N=3$

Численные значения размахов остаточных колебаний по углу  $\phi_4$  приведены в таблице.

Рассмотрим поворот данной системы на тот же самый угол  $\theta_T = \pi/2$  за время  $T = 2$  с. В этом случае колебания системы выходят за пределы применимости линейной теории ( $|\phi_k| > 0,5$  рад). На рис. 4 показано решение задачи в рядах по синусам и косинусам с гашением колебаний по трем нижшим собственным

формам. Из графиков видно, что в этом случае остаточные колебания как по углу  $\theta$ , так и по углу  $\phi_4$  за счет нелинейности достаточно велики, что говорит о неприменимости линейной теории для решения задачи гашения колебаний.

### Выводы

1. Представлен подход для решения обратной задачи динамики конечного поворота за определенное время упругой системы из одного состояния покоя в другое с гашением колебаний по нескольким нижшим собственным формам в момент остановки системы. Управляющая функция времени для исходной системы представлена в виде ряда по синусам и ряда по косинусам. Получены уравнения для определения коэффициентов этих рядов.

2. Результаты расчета динамической реакции при конечном повороте по крену КА с

Таблица

Значения размахов, рад

Вид решения	$N = 1$	$N = 2$	$N = 3$
Ряд по синусам	$1,181 \cdot 10^{-3}$	$9,393 \cdot 10^{-6}$	$6,589 \cdot 10^{-6}$
Ряд по косинусам	$5,761 \cdot 10^{-4}$	$2,866 \cdot 10^{-5}$	$6,982 \cdot 10^{-6}$

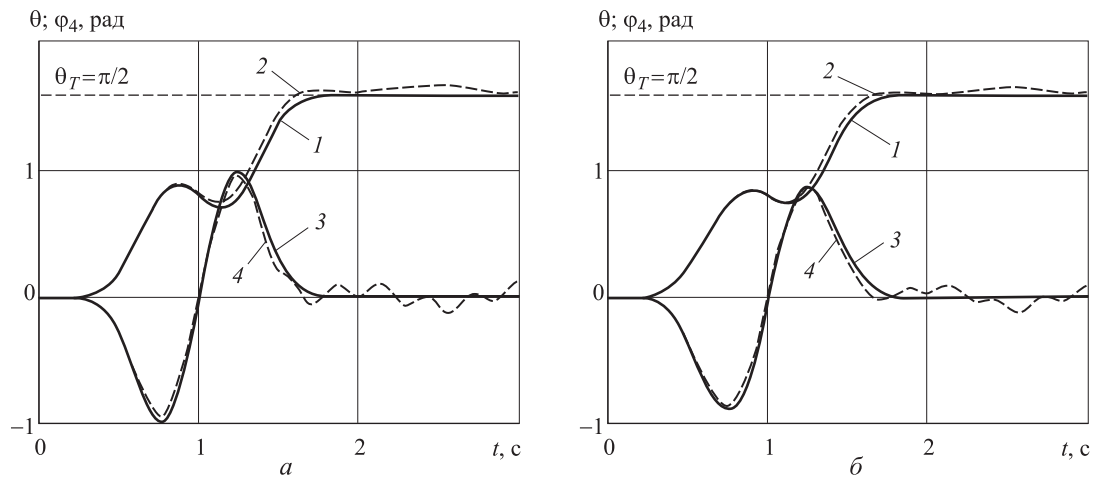


Рис. 4. Зависимости углов  $\theta$  (1, 2) и  $\varphi_4$  (3, 4) от времени  $t$  для линейного (—) и нелинейного (----) решений задачи в рядах по синусам (а) и косинусам (б) при гашении трех собственных форм колебаний

двумя панелями СБ в линейной постановке показали, что при гашении колебаний двух или трех низших собственных форм остаточ-

ные колебания после завершения поворота по высшим формам являются пренебрежимо малыми.

## Литература

- [1] Черноушко Ф.Л., Болотник Н.Н., Градецкий В.Г. *Манипуляционные роботы: динамика, управление, оптимизация*. Москва, Наука, 1989. 363 с.
- [2] Разыграев А.П. *Основы управления полетом космических аппаратов*. Москва, Машиностроение, 1990. 480 с.
- [3] Vainum P.M., Li F. Optimal large angle maneuvers of a flexible spacecraft. *Acta Astronautica*, 1991, vol. 25, no. 3, pp. 141–148.
- [4] Кубышкин Е.П. Оптимальное управление поворотом твердого тела с гибким стержнем. *Прикладная математика и механика*, 1992, т. 56, вып. 2, с. 240–249.
- [5] Кубышкин Е.П. Оптимальное управление поворотом системы двух тел, соединенных упругим стержнем. *Прикладная математика и механика*, 2014, т. 78, вып. 5, с. 656–670.
- [6] Гришанина Т.В. Динамика управляемого движения упругих систем при конечных перемещениях и поворотах. *Известия РАН. Механика твердого тела*, 2004, № 6, с. 171–186.
- [7] Гришанина Т.В., Шклярчук Ф.Н. *Динамика упругих управляемых конструкций*. Москва, Изд-во МАИ, 2007. 328 с.
- [8] Русских С.В., Шклярчук Ф.Н. Нелинейные колебания панелей солнечных батарей при больших углах поворота космического аппарата. *Механика и математическое моделирование в технике. Сб. тез. Всерос. науч.-техн. конф., Москва, 17–19 мая 2016 г.* Москва, Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2016. 364 с.

## References

- [1] Chernous'ko F.L., Bolotnik N.N., Gradetskii V.G. *Manipulatsionnye roboty: dinamika, upravlenie, optimizatsiia* [Manipulation Robots: dynamics, control, optimization]. Moscow, Nauka publ., 1989. 363 p.
- [2] Razygraev A.P. *Osnovy upravleniia poletom kosmicheskikh apparatov* [Spacecraft Mission Control Basics]. Moscow, Mashinostroenie publ., 1990. 480 p.
- [3] Vainum P.M., Li F. Optimal large angle maneuvers of a flexible spacecraft. *Acta Astronautica*, 1991, vol. 25, no. 3, pp. 141–148.
- [4] Kubyshekin E.P. Optimal'noe upravlenie povоротom tverdogo tela s gibkim sterzhnem [Optimal control of a rigid body rotating with a flexible rod]. *Prikladnaia matematika i mekhanika* [Journal of Applied Mathematics and Mechanics]. 1992, vol. 56, is. 2, pp. 240–249.



- [5] Kubyshkin E.P. Optimal'noe upravlenie povоротом системы dvukh tel, soedinennykh uprugim sterzhnem [Optimal control of rotation of a system of two objects connected by elastic rod]. *Prikladnaia matematika i mekhanika* [Journal of Applied Mathematics and Mechanics]. 2014, vol. 78, is. 5, pp. 656–670.
- [6] Grishanina T.V. Dinamika upravliaemogo dvizheniia uprugikh sistem pri konechnykh peremeshcheniiakh i povorotakh [Dynamics of controlled motion of elastic systems under finite displacements and rotations]. *Izvestiia RAN. Mekhanika tverdogo tela* [Mechanics of Solids]. 2004, no. 6, pp. 171–186.
- [7] Grishanina T.V., Shkliarchuk F.N. *Dinamika uprugikh upravliaemykh konstruksii* [Dynamics of elastic-driven designs]. Moscow, MAI publ., 2007. 328 p.
- [8] Russkikh S.V., Shkliarchuk F.N. Nelineinye kolebaniia panelei solnechnykh batarei pri bol'shikh uglakh povorota kosmicheskogo apparata [Nonlinear oscillations of solar panels at large angles of rotation of the spacecraft]. *Mekhanika i matematicheskoe modelirovanie v tekhnike. Sbor. tez. Vseros. nauch.-tekh. konf., Moskva, 17–19 maia 2016 g.* [Abstracts of the All-Russian scientific and technical conference, Moscow, 17–19 May 2016]. Moscow, Bauman Press, 2016. 364 p.

Статья поступила в редакцию 31.08.2016

## Информация об авторе

**РУССКИХ Сергей Владимирович** (Москва) — кандидат физико-математических наук, доцент кафедры «Прочность авиационных и ракетно-космических конструкций». Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет) (125993, Москва, Российская Федерация, ГСП-3, А-80, Волоколамское шоссе, д. 4, e-mail: sergey.russkih@rambler.ru).

## Information about the author

**RUSSKIKH Sergey Vladimirovich** (Moscow) — Candidate of Science (Physics and Math), Associate Professor, Strength of Aeronautic and Astronautic Constructions Department. Moscow Aviation Institute (Nation Research University) (125993, Moscow, Russian Federation, A-80, GSP-3 Volokolamskoe Hwy., Bldg. 4, e-mail: sergey.russkih@rambler.ru).



В Издательстве МГТУ им. Н.Э. Баумана  
вышло в свет учебное пособие  
**В.А. Одинцова, С.В. Ладова, Д.П. Левина**  
**«Оружие и системы вооружения»**

В систематизированном виде изложены сведения об оружии и системах вооружения как объектах, обеспечивающих поражение целей с помощью различных боеприпасов. Приведен краткий обзор истории развития вооружения. Даны определения понятий «оружие», «комплекс вооружения», «система вооружения». Рассмотрены состав, структура, основные свойства и боекомплекты комплексов вооружения.

Содержание учебного пособия соответствует курсу лекций, читаемых авторами в МГТУ им. Н.Э. Баумана.

**По вопросам приобретения обращайтесь:**

105005, Москва, 2-я Бауманская ул., д. 5, стр. 1.  
Тел.: +7 499 263-60-45, факс: +7 499 261-45-97;  
press@bmstu.ru; www.baumanpress.ru