# Расчет и конструирование машин

УДК 621.01/.03

## Использование методов математической статистики при контроле точности изготовления валов редуктора

***С.В. Албул, Л.В. Седых***

*Проанализирована точность изготовления валов редуктора методами математической статистики. Расчет базируется на предположении, что диаметр данного участка вала — нормально распределенная случайная величина. По выборке из партии деталей вычисляются оценки для среднего квадратического отклонения и проверяется соответствие теоретического поля допуска с расчетным. Приведена проверка того, что рассматриваемая выборка является случайной.*

**Ключевые слова:** контроль качества, поле допуска, нормальное распределение, оценки параметров, критерий Колмогорова.

## Use of Mathematical Statistics Methods for the Precision Control of the Gear Shaft Production

***S.V. Albul, L.V. Sedykh***

*The precision of the gear shaft production has been analysed by the mathematical statistics methods. Calculations are based on the assumption that the diameter of a given part of the shaft is a normally distributed random variable. Using a sample from a given set of machine parts the estimations for the standard deviation are calculated and the correspondence of the theoretical tolerance is checked against the calculated one. In the conclusion a considered sample is checked to be random.*

**Keywords**: quality control, tolerance, normal distribution, parameter estimations, Kolmogorov test.

**АЛБУЛ**
**Сергей Валерьевич**
аспирант
(Национальный исследовательский технологический университет МИСиС)
**ALBUL**
**Sergey Valerievich**
Post-Graduate
(National University of Science and Technology «MISIS»)

**СЕДЫХ**
**Лариса Владимировна**
доцент
(Национальный исследовательский технологический университет МИСиС)
**SEDYKH**
**Larisa Vladimirovna**
Assoc. Prof.
(National University of Science and Technology «MISIS»)

Важнейшим этапом производства является контроль качества выпускаемой продукции. В крупносерийном производстве измерить каждое изделие невозможно, поэтому для анализа качества продукции используют методы математической статистики [1].

В математической статистике изучают свойства и количественные характеристики случайных величин по небольшим выборкам их значений. Применительно к практическим задачам технологии машиностроения, это означает, что для анализа конкретной числовой характеристики деталей большой партии необходимо измерить эту характеристику у небольшой их случайной выборки. По полученным результатам можно сделать заключение о точности изготовления деталей всей партии [2].

Продемонстрируем применение методов математической статистики на примере анализа точности изготовления деталей типа вала редуктора. Диаметр вала в идеале должен быть равен заданной величине $a$. Истинный же диаметр $X$ вала отличается от номинального значения $a$. Величина $X$ является случайной и наша задача изучить свойства этой величины по выборке ее значений $x_1,\ldots,x_n$ небольшого объема $n$.

Пусть необходимо произвести контроль 1 500 валов редуктора. Выберем случайным образом 50 тихоходных валов и измерим диаметр консольного участка вала, мм (табл. 1).

Для удобства дальнейших вычислений составим табл. 2 выборочных значений $x_i$ в порядке возрастания и с указанием их кратностей $k_i$.

Диаметр $X$ является непрерывной случайной величиной, которая обычно распределена по нормальному закону (закону Гаусса). Этот закон полностью определяется двумя числовыми характеристиками: математическим ожиданием $M(X)$ и дисперсией $D(X)$ (или средним квадратическим отклонением $\sigma(X)=\sqrt{D(X)}$).

*Таблица 1*

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 49,973 | 49,978 | 49,980 | 49,983 | 49,994 | 49,985 | 49,988 | 49,986 | 49,987 |
| 49,977 | 49,979 | 49,982 | 49,984 | 49,991 | 49,987 | 49,987 | 49,987 | 49,986 |
| 49,981 | 49,980 | 49,993 | 49,994 | 49,981 | 49,986 | 49,985 | 49,988 | 49,990 |
| 49,997 | 49,984 | 49,983 | 49,988 | 49,995 | 49,991 | 49,986 | 49,991 | 49,989 |
| 49,978 | 49,998 | 49,995 | 49,989 | 49,992 | 49,985 | 49,987 | 49,985 | 49,987 |
| 49,987 | 49,986 | 49,985 | 49,984 | 49,989 | | | | |

*Таблица 2*

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x_i$ | 49,973 | 49,977 | 49,978 | 49,979 | 49,980 | 49,981 | 49,982 | 49,983 |
| $k_i$ | 1 | 1 | 2 | 1 | 2 | 2 | 1 | 2 |
| $x_i$ | 49,984 | 49,985 | 49,986 | 49,987 | 49,988 | 49,989 | 49,990 | 49,991 |
| $k_i$ | 3 | 5 | 5 | 7 | 3 | 3 | 1 | 3 |
| $x_i$ | 49,992 | 49,993 | 49,994 | 49,995 | 49,997 | 49,998 | | |
| $k_i$ | 1 | 1 | 2 | 2 | 1 | 1 | | |

Пусть задан диаметр вала с допуском 50$h$7. Тогда $M(X)=a=49{,}985$. Далее определена оценка для $\sigma(X)$.

Выборочной средней $\overline{X_n}$ выборки называется среднее арифметическое выборочных значений

$$\overline{X_n}=\frac{x_1+\ldots+x_n}{n}.$$

В нашем случае

Выборочной дисперсией $\overline{D_n}$ выборки $x_i,\ldots,x_n$ называется среднее арифметическое квадратов отклонений выборочных значений от выборочного среднего:

$$\overline{X_n} = \frac{49{,}973 + 49{,}977 + 49{,}978 \cdot 2 + 49{,}979 + 49{,}980 \cdot 2 + 49{,}981 \cdot 2 + 49{,}982 + 49{,}983 \cdot 2 +}{50} +$$

$$+ \frac{49{,}984 \cdot 3 + 49{,}985 \cdot 5 + 49{,}986 \cdot 5 + 49{,}987 \cdot 7 + 49{,}988 \cdot 3 + 49{,}989 \cdot 3 + 49{,}990 + 49{,}991 \cdot 3}{50} +$$

$$+ \frac{49{,}992 + 49{,}993 + 49{,}994 \cdot 2 + 49{,}995 \cdot 2 + 49{,}997 + 49{,}998}{50} = 49{,}98646 \text{ мм.}$$

$$\overline{D_n} = \frac{(x_1 - \overline{X_n})^2 + \ldots + (x_n - \overline{X_n})^2}{n}.$$

Выборочную дисперсию удобнее считать по формуле

$$\overline{D_n} = \frac{x_1^2 + \ldots + x_n^2}{n} - (\overline{X_n})^2.$$

В нашем случае

$$\overline{D_n} = \frac{x_1^2 + \ldots + x_n^2}{n} - (\overline{X_n})^2 =$$

$$= \frac{49{,}973^2 + 49{,}977^2 + 49{,}978^2 \cdot 2 + 49{,}979^2}{50} +$$

$$+ \frac{49{,}980^2 \cdot 2 + 49{,}981^2 \cdot 2 + 49{,}982^2}{50} +$$

$$+ \frac{49{,}983^2 \cdot 2 + 49{,}984^2 \cdot 3 + 49{,}985^2 \cdot 5}{} +$$

$$+ \frac{49{,}986^2 \cdot 5 + 49{,}987^2 \cdot 7 + 49{,}988^2 \cdot 3}{50} +$$

$$+ \frac{49{,}989^2 \cdot 3 + 49{,}990^2 + 49{,}991^2 \cdot 3}{} +$$

$$+ \frac{49{,}992^2 + 49{,}993^2 + 49{,}994^2 \cdot 2}{50} +$$

$$+ \frac{49{,}995^2 \cdot 2 + 49{,}997^2 + 49{,}998^2}{} - 49{,}98646^2 =$$

$$= 0{,}0000273284 \text{ мм.}$$

Выборочная дисперсия является смещенной оценкой дисперсии $D(X)$ случайной величины $X$. Поэтому обычно используют исправленную выборочную дисперсию

$$S_n^2 = \frac{n}{n-1}\overline{D_n} = \frac{(x_1 - \overline{X_n})^2 + \ldots + (x_n - \overline{X_n})^2}{n-1},$$

которая является несмещенной оценкой для $D(X)$.

Хорошей оценкой среднего квадратического отклонения $\sigma(X)$ случайной величины $X$ является так называемое исправленное выборочное среднее квадратическое отклонение выборки $x_1, \ldots, x_n$:

$$S_n = \sqrt{\frac{(x_1 - \overline{X_n})^2 + \ldots + (x_n - \overline{X_n})^2}{n-1}} = \sqrt{\frac{1}{n-1}\left[\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2\right]}.$$

В нашем случае

$$S_n^2 = \frac{50}{49} \cdot 0{,}0000273284 \approx 0{,}0000278861;$$

$$S_n \approx \sqrt{0{,}0000278861} \approx 0{,}00528.$$

Целесообразно также найти доверительный интервал для среднего квадратического отклонения $\sigma(X)$ величины $X$.

Напомним, что интервал $(x_n^-, x_n^+)$ вещественной оси $x$ называется $100\gamma\%$-ным доверительным интервалом для количественной характеристики $x_0$ заданной случайной величины, если вероятность случайного события $\{x_n^- < x_0 < x_n^+\}$ равна $\gamma$. Наиболее часто полагают $\gamma = 0{,}95$, $\gamma = 0{,}99$ и $\gamma = 0{,}999$.

Поскольку наша случайная величина $X$ распределена нормально, то интервал

$$\left(S_n(1 - q_\gamma(n-1)), S_n(1 + q_\gamma(n-1))\right)$$

является $100\gamma\%$-ным доверительным интервалом для среднего квадратического отклонения случайной величины $X$. Число $q_\gamma(k)$ можно определить по специальным таблицам в Интернете (например, http://math.immf.ru/ lections/207.html). Некоторые значения приведены в табл. 3.

*Таблица 3*

| $\gamma$ | 0,95 | 0,99 | 0,999 |
|---|---|---|---|
| $q_\gamma(49)$ | 0,21 | 0,30 | 0,43 |

Если $q_\gamma(n-1)>1$, то рассматривают интервал

$$\left(0, S_n(1+q_\gamma(n-1))\right).$$

Например, интервал

$$\left(0{,}00528(1-0{,}3),\ \ 0{,}00528(1+0{,}3)\right)\approx$$
$$\approx(0{,}03696, 0{,}06864)$$

является 99%-ным доверительным интервалом для среднего квадратического отклонения величины $X$.

Проверим гипотезу $H$ о том, что дисперсию $\sigma^2(X)$ величины $X$ можно считать равной $\sigma^2=0{,}005^2=0{,}000025$. В качестве статистического критерия возьмем случайную величину

$$Y=\frac{S_n^2}{\sigma^2}(n-1),$$

которая распределена по закону $\chi$-квадрат с $k=n-1$ степенями свободы.

Пусть $Y_n$ — значение критерия $Y$ на выборке $x_1,\ldots,x_n$. Зададим уровень значимости $\alpha$ и выберем конкурирующую гипотезу $H_c$: $\sigma^2(X)\neq\sigma^2$. Если

$$\chi^2_{\alpha/2}(n-1)<Y_n<\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1),$$

то нет оснований отвергать гипотезу $H$. Если же $Y_n<\chi^2_{\alpha/2}(n-1)$ или $Y_n>\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)$, то гипотеза $H$ отвергается. Здесь $\chi^2_\alpha(k)$ — квантили распределения $\chi$-квадрат, их можно определить по таблицам в Интернете (например, http://ru.wikipedia.org/wiki). Некоторые значения приведены в табл. 4.

*Таблица 4*

| $\alpha$ | 0,005 | 0,01 | 0,025 | 0,05 |
|---|---|---|---|---|
| $\chi^2_\alpha(49)$ | 27,249 | 28,941 | 31,555 | 33,930 |
| $\alpha$ | 0,95 | 0,975 | 0,99 | 0,995 |
| $\chi^2_\alpha(49)$ | 66,339 | 70,222 | 74,920 | 78,231 |

В нашем случае

$$Y_n\approx\frac{0{,}00528^2}{0{,}005^2}\cdot 49\approx 54{,}642.$$

Следовательно, если $\alpha=1\%$, то справедливы неравенства:

$$\chi^2_{0,005}(49)\approx 27{,}249<Y_n<\chi^2_{0,995}(49)\approx 78{,}231,$$

поэтому можно принять гипотезу $H$: $\sigma(X)=\sigma=0{,}005$ с вероятностью ошибки 1%.

Теперь, согласно правилу трех сигм, можно определить поле допуска для анализируемой партии деталей. Поскольку $\sigma=0{,}005$, то расчетное поле допуска $6\sigma=6\cdot 0{,}005=0{,}03$ соответствует заданному $50h7^{0}_{-0,03}$. Поэтому можно сделать вывод, что вся партия деталей изготовлена фактически без брака.

Все приведенные выше расчеты основаны на предположении, что выборка $x_1,\ldots,x_n$ случайная. Справедливость этого предположения проверяется с помощью критерия Колмогорова [3].

Пусть $x$ — вещественное число. Обозначим $\nu_x$ число выборочных значений $x_1,\ldots,x_n$, меньших $x$. Тогда функция

$$F_n(x)=\frac{\nu_x}{n}$$

называется эмпирической функцией распределения случайной величины $X$. Эмпирическая функция распределения $F_n(x)$ нашей величины $X$ задается табл. 5.

*Таблица 5*

| $x$ | $x\le 49{,}973$ | $49{,}973<x\le$ $\le 49{,}977$ | $49{,}977<x\le$ $\le 49{,}978$ |
|---|---|---|---|
| $F_n(x)$ | 0 | 1 / 50 | 2 / 50 |
| $x$ | $49{,}978<x\le$ $\le 49{,}979$ | $49{,}979<x\le$ $\le 49{,}980$ | $49{,}980<x\le$ $\le 49{,}981$ |
| $F_n(x)$ | 4 / 50 | 5 / 50 | 7 / 50 |
| $x$ | $49{,}981<x\le$ $\le 49{,}982$ | $49{,}982<x\le$ $\le 49{,}983$ | $49{,}983<x\le$ $\le 49{,}984$ |
| $F_n(x)$ | 9 / 50 | 10 / 50 | 12 / 50 |
| $x$ | $49{,}984<x\le$ $\le 49{,}985$ | $49{,}985<x\le$ $\le 49{,}986$ | $49{,}986<x\le$ $\le 49{,}987$ |
| $F_n(x)$ | 15 / 50 | 20 / 50 | 25 / 50 |

| | | | |
|---|---|---|---|
| $x$ | $49{,}987 < x \le$ $\le 49{,}988$ | $49{,}988 < x \le$ $\le 49{,}989$ | $49{,}989 < x \le$ $\le 49{,}990$ |
| $F_n(x)$ | 32 / 50 | 35 / 50 | 38 / 50 |
| $x$ | $49{,}990 < x \le$ $\le 49{,}991$ | $49{,}991 < x \le$ $\le 49{,}992$ | $49{,}992 < x \le$ $\le 49{,}993$ |
| $F_n(x)$ | 39 / 50 | 42 / 50 | 43 / 50 |
| $x$ | $49{,}993 < x \le$ $\le 49{,}994$ | $49{,}994 < x \le$ $\le 49{,}995$ | $49{,}995 < x \le$ $\le 49{,}997$ |
| $F_n(x)$ | 44 / 50 | 46 / 50 | 48 / 50 |
| $x$ | $49{,}997 < x \le$ $\le 49{,}998$ | $x > 49{,}998$ | |
| $F_n(x)$ | 49 / 50 | 1 | |

Пусть $F(x)$ — истинная функция распределения величины $X$. Рассмотрим случайную величину

$$Y = \sqrt{n} \max_{i=1,\ldots,n} \left(\max\left(|F_n(x_i) - F(x_i)|,\right.\right.$$
$$\left.\left.|F_n(x_i+0) - F(x_i)|\right)\right),$$

где $F_n(x_i+0)$ — предел справа функции $F_n(x)$ в точке $x_i$. При достаточно больших $n$ функция распределения этой случайной величины приблизительно равна функции распределения Колмогорова $K(x)$.

Проверим гипотезу $H$о том, что выборка $x_1,\ldots,x_n$ является набором независимых значений случайной величины $X$.

Пусть $Y_n$ — значение величины $Y$ на выборке $x_1,\ldots,x_n$. Зададим уровень значимости $\alpha$. Если

$$K^{-1}(\alpha/2) < Y_n < K^{-1}(1-\alpha/2),$$

то нет оснований отвергать гипотезу $H$. Если же $Y_n < K^{-1}(\alpha/2)$ или $Y_n > K^{-1}(1-\alpha/2)$, то гипотеза $H$ отвергается. Здесь $K^{-1}(x)$ — значения обратной функции распределения Колмогорова. Они определяются по таблицам из Интернета (например, http://helpstat.ru/2012/09/raspredelenie-statistiki-kolmogorova/). Некоторые значения приведены в табл. 6.

*Таблица 6*

| $x$ | 0,0025 | 0,005 | 0,01 | 0,5 | 0,99 | 0,995 | 0,9975 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $K^{-1}(x)$ | 0,40 | 0,42 | 0,44 | 0,83 | 1,63 | 1,73 | 1,83 |

В нашем случае

$$F(x) = \frac{1}{2} + \Phi\left(\frac{x - 49{,}985}{0{,}005}\right),$$

где $\Phi(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}} d\,t$ — функция Лапласа. Значения функций $F(x)$ и $F_n(x)$ в точках $x_1,\ldots,x_n$ указаны в табл. 7.

*Таблица 7*

| $x_i$ | 49,973 | 49,977 | 49,978 | 49,979 | 49,980 | 49,981 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $F(x_i)$ | 0,0082 | 0,0548 | 0,08076 | 0,11507 | 0,15866 | 0,21186 |
| $F_n(x_i)$ | 0 | 0,02 | 0,04 | 0,08 | 0,1 | 0,14 |
| $F_n(x_i+0)$ | 0,02 | 0,04 | 0,08 | 0,1 | 0,14 | 0,18 |

| $x_i$ | 49,982 | 49,983 | 49,984 | 49,985 | 49,986 | 49,987 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $F(x_i)$ | 0,27425 | 0,34458 | 0,42074 | 0,5 | 0,57926 | 0,65542 |
| $F_n(x_i)$ | 0,18 | 0,2 | 0,24 | 0,3 | 0,4 | 0,5 |
| $F_n(x_i+0)$ | 0,2 | 0,24 | 0,3 | 0,4 | 0,5 | 0,64 |

| $x_i$ | 49,988 | 49,989 | 49,990 | 49,991 | 49,992 | 49,993 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $F(x_i)$ | 0,72575 | 0,78814 | 0,84134 | 0,88493 | 0,91924 | 0,94521 |
| $F_n(x_i)$ | 0,64 | 0,7 | 0,76 | 0,78 | 0,84 | 0,86 |
| $F_n(x_i+0)$ | 0,7 | 0,76 | 0,78 | 0,84 | 0,86 | 0,88 |

| $x_i$ | 49,994 | 49,995 | 49,997 | 49,998 |
|---|---|---|---|---|
| $F(x_i)$ | 0,96407 | 0,97725 | 0,99180 | 0,99534 |
| $F_n(x_i)$ | 0,88 | 0,92 | 0,96 | 0,98 |
| $F_n(x_i+0)$ | 0,92 | 0,96 | 0,98 | 1 |

Из этих данных следует, что значение критерия Колмогорова на выборке $x_1,\ldots,x_n$

$$Y_n \approx 1{,}28.$$

Поскольку $0{,}42 < Y_n < 1{,}73$, то можно принять гипотезу о независимости данных с вероятностью ошибки $\alpha = 1\%$.

В заключение следует отметить то, что использование методов математической статистики в различных областях производства основано на предположении о случайности рассматриваемой выборки из партии готовой продукции. Поэтому проверка этого предположения при помощи критерия Колмогорова является необходимым элементом для уверенности в законности полученных выводов о качестве всей партии.

Отметим, что проведенные нами расчеты основаны на предположении о нормальности распределения диаметра вала, как случайной величины. Однако при использовании современных станков с ЧПУ, допускающих адаптивный контроль за размером детали, это не всегда так. Поэтому, если проверка на случайность выборки дает отрицательный результат, то это может также сигнализировать о не нормальности распределения изучаемой случайной величины.

В случае серьезных оснований считать закон распределения рассматриваемой случайной величины не нормальным, необходимо проверить гипотезу о другом типе распределения, а затем вновь воспользоваться критерием Колмогорова для проверки случайности выборки.

**Литература**

1. *Гмурман В.Е.* Теория вероятностей и математическая статистика. М.: Высшая школа, 2004. 479 с.

2. Технология машиностроения. Бурцев В.М., Васильев А.С., Дальский А.М. и др.; Под ред. А.М. Дальского. В 2 т. Т. 1. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 1999. 564 с.

3. *Колмогоров А.Н.* Теория вероятностей и математическая статистика. М.: Наука, 1986. 534 с.

**References**

1. Gmurman V.E. *Teoriia veroiatnostei i matematicheskaia statistika* [Probability theory and mathematical statistics]. Moscow, Vysshaia shkola publ., 2004. 479 p.

2. Burtsev V.M., Vasil'ev A.S., Dal'skii A.M. *Tekhnologiia mashinostroeniia: v 2 vol. Osnovy tekhnologii mashinostroeniia* [Manufacturing engineering: in 2 vol. Fundamentals of Mechanical Engineering]. Moscow, MSTU named after N.E. Bauman publ., 1999. 564 p.

3. Kolmogorov A.N. *Teoriia veroiatnostei i matematicheskaia statistika* [Probability theory and mathematical statistics]. Moscow, Nauka publ., 1986. 534 p.

Статья поступила в редакцию 19.11.2012

**Информация об авторах**

**АЛБУЛ Сергей Валерьевич** (Москва) — аспирант кафедры «Инжиниринг технологического оборудования». Национальный исследовательский технологический университет МИСиС (119049, Москва, Ленинский пр., д. 4).

**СЕДЫХ Лариса Владимировна** (Москва) — доцент кафедры «Инжиниринг технологического оборудования». Национальный исследовательский технологический университет МИСиС (119049, Москва, Ленинский пр., д. 4, e-mail: lvsedykh@mail.ru).

**Information about the authors**

**ALBUL Sergey Valerievich** (Moscow) — Post-Graduate of «Engineering for Technical Equipment» Department. National University of Science and Technology «MISIS» (4, Leninsky prospect, B-49, Moscow, 119049, RF).

**SEDYKH Larisa Vladimirovna** (Moscow) — Assoc. Prof. of «Engineering for Technical Equipment» Department. National University of Science and Technology «MISIS» (4, Leninsky prospect, B-49, Moscow, 119049, RF, e-mail: lvsedykh@mail.ru).