

УДК 539.375

DOI: 10.18698/0536-1044-2018-5-28-35

# Применение конечно-элементной модели нелинейной сплошной среды для анализа напряженно-деформированного состояния элементов конструкций

М.И. Раенко<sup>1</sup>, Н.Д. Чайнов<sup>2</sup>

<sup>1</sup> ОАО «Коломенский завод», 140408, Коломна, Московская область, Российская Федерация, ул. Партизан, д. 42

<sup>2</sup> МГТУ им. Н.Э. Баумана, 105005, Москва, Российская Федерация, 2-я Бауманская ул., д. 5, стр. 1

## The Application of a Finite Element Model of Nonlinear Continuous Medium in the Analysis of the Stress-Strain State of Structure Members

M.I. Raenko<sup>1</sup>, N.D. Chainov<sup>2</sup>

<sup>1</sup> OAO Kolomenskiy Zavod, 140408, Moscow region, Kolomna, Partizan St., Bldg. 42

<sup>2</sup> BMSTU, 105005, Moscow, Russian Federation, 2<sup>nd</sup> Baumanskaya St., Bldg. 5, Block 1



e-mail: ns.raenko.43@mail.ru, ndchainov@yandex.ru



Рассмотрено применение конечно-элементной модели при решении задачи о сплошной среде с геометрическими и физическими нелинейностями. Математическое описание нелинейной среды выполнено с помощью инкрементальных методов. Построение модели основано на подходе Лагранжа, в котором использованы материальные координаты точек, второй тензор напряжений Пиола–Кирхгофа и тензор деформаций Грина. Решение пластической задачи базируется на ассоциированной теории течения. Функция течения выбрана из условий пластичности Мизеса–Генки, удовлетворительно описывающих пластическое состояние изотропных материалов в качестве примера. Задачи решены методом конечных элементов в программном комплексе MSC.MARC.

**Ключевые слова:** тензоры деформаций Грина, геометрические и физические нелинейности, подход Лагранжа, тензоры напряжений Пиола–Кирхгофа, ассоциированная теория течения, критерий Мизеса–Генки



The application of a finite element model for solving the problem of continuous medium with geometrical and physical nonlinearities is considered in this work. The nonlinear medium is mathematically described using incremental methods. The model construction is based on the Lagrangian approach, where material coordinates of points, Piola-Kirchhoff second stress tensor and Green strain tensor are used. The solution of the plastic problem is based on the associate theory of flow. The flow function is derived from the Mises–Hencky criterion of plasticity that satisfactorily describes the plastic state of isotropic materials. As an example, problems are solved using the finite element method in the MSC.MARC software environment.

**Keywords:** Green strain tensors, geometric and physical nonlinearities, Lagrangian approach, Piola–Kirchhoff stress tensors, associate theory of flow, Mises–Hencky criterion

Рассмотрим задачу определения напряженно-деформированного состояния твердого тела с геометрическими и физическими нелинейностями. Геометрическая нелинейность означает, что перемещения конструкции настолько велики, что необходимо применять теорию упругости при конечных перемещениях [1, 2]. Физическая нелинейность предполагает, что материал испытывает не только упругие, но и пластические необратимые деформации с возможным неупругим последствием в виде ползучести и релаксации напряжений во времени [1, 3].

Для математического описания геометрической нелинейности обычно используют методы последовательных приближений, а для описания неупругого поведения материала — деформационную теорию и теорию пластического течения. По современным воззрениям, первая из теорий непригодна для полного описания пластического поведения материалов.

Сформулируем математическую постановку теории пластического течения. Предполагаем, что выполняются следующие условия:

1) уравнение равновесия (без учета массовых сил)

$$\frac{\partial \Delta \sigma_{ij}}{\partial x_j} = 0;$$

2) соотношение деформации–перемещения

$$2\Delta \epsilon_{ij} = \frac{\partial \Delta u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \Delta u_j}{\partial x_i};$$

3) между приращениями напряжений  $\Delta \sigma_{ij}$  и деформаций  $\Delta \epsilon_{ij}$  существуют линейные соотношения;

4) на границе области (поверхности)  $S$  заданы граничные условия в напряжениях или перемещениях.

Здесь  $x_j, x_i$  — координаты точки в прямоугольной декартовой системе координат;  $i, j$  — целочисленные индексы, принимающие значения 1, 2, 3;  $\Delta u_i$  — приращения перемещений.

Указанная формулировка задачи принадлежит Прагеру [1].

Сравнение постановок задач о геометрической и физической нелинейностях показало, что они аналогичны, за исключением того, что при геометрической нелинейности рассматривается нелинейная связь между параметрами, входящими в состав выражений, приведенных в первом и втором условиях, а при физической нелинейности — линейная связь между прира-

щениями этих параметров. В соотношении, описанном в третьем условии, при геометрической нелинейности постулировано существование функциональной связи между напряжениями и деформациями и возможность ее линеаризации, а при физической нелинейности — линейная связь между их приращениями. Таким образом, для решения задачи о нелинейной сплошной среде можно использовать пошаговые (инкрементальные) соотношения между напряжениями и деформациями. Наша задача состоит в том, чтобы выразить приращения напряжений  $\Delta \sigma_{ij}$  и деформаций  $\Delta \epsilon_{ij}$  через приращения перемещений  $\Delta u_{ij}$  в предположении, что все они достаточно малы.

Цель работы — линеаризовать уравнения сплошной нелинейной среды, построить инкрементальную матрицу жесткости с помощью метода конечных элементов и рассмотреть применение созданной модели для решения конкретных задач с геометрическими и физическими нелинейностями.

Дальнейшая разработка модели нелинейной среды основана на подходе Лагранжа [1, 4], где модель строится в материальных координатах, которые жестко привязаны к деформируемой среде и деформируются вместе с ней. В связи с этим при больших деформациях после каждого расчетного шага конечно-элементная сетка может сильно искажаться и ее приходится периодически перестраивать. Напряженно-деформированное состояние конструкции описывается вторыми тензорами напряжений Пиолы–Кирхгофа  $s_{ij}$  и тензорами деформаций Грина  $e_{ij}$ .

Представим путь деформирования в виде последовательности равновесных состояний

$$Q^{(0)}, Q^{(1)}, \dots, Q^{(N)}, Q^{(N+1)}, \dots, Q^{(R)},$$

где  $Q^{(0)}$  и  $Q^{(R)}$  — начальное и конечное состояния деформирования (рис. 1).

Предположим, что все переменные состояний (напряжения, деформации и перемещения) известны на протяжении всей истории деформирования. Обозначим радиусы-векторы произвольной материальной точки в состояниях  $Q^{(0)}, Q^{(N)}, Q^{(N+1)}$  как  $\mathbf{r}^{(0)}, \mathbf{r}^{(N)}, \mathbf{r}^{(N+1)}$  соответственно (см. рис. 1).

Тогда

$$\mathbf{r}^{(0)} = x_i \mathbf{i}_i;$$

$$\mathbf{r}^{(N)} = \mathbf{r}^{(0)} + \mathbf{u} = X_i \mathbf{i}_i = (x_i + u_i) \mathbf{i}_i;$$

$$\mathbf{r}^{(N+1)} = \mathbf{r}^{(0)} + \mathbf{u} + \Delta\mathbf{u} = (X_i + \Delta u_i) \mathbf{i}_i = (x_i + u_i + \Delta u_i) \mathbf{i}_i,$$

где  $\mathbf{i}_i$  — базисные векторы прямоугольной декартовой системы координат,  $i = 1, 2, 3$ ;  $\mathbf{u}$ ,  $\mathbf{u} + \Delta\mathbf{u}$  и  $u_i$ ,  $u_i + \Delta u_i$  — векторы перемещений и их компоненты в состояниях  $Q^{(N)}$  и  $Q^{(N+1)}$  соответственно;  $X_i$  — координата точки в сопутствующей системе прямоугольных декартовых координат, связанной с основной системой координат соотношением  $X_i = x_i + u_i$ .

Здесь и далее использовано правило суммирования по повторяющемуся (немому) индексу [5].

Тензоры деформаций Грина в состояниях  $Q^{(N)}$  и  $Q^{(N+1)}$  имеют вид

$$2\mathbf{e}_{ij} = \frac{\partial \mathbf{r}^{(N)}}{\partial x_i} \frac{\partial \mathbf{r}^{(N)}}{\partial x_j} - \frac{\partial \mathbf{r}^{(0)}}{\partial x_i} \frac{\partial \mathbf{r}^{(0)}}{\partial x_j} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_p}{\partial x_i} \frac{\partial u_p}{\partial x_j}; \quad (1)$$

$$2(\mathbf{e}_{ij} + \Delta \mathbf{e}_{ij}) = \frac{\partial \mathbf{r}^{(N+1)}}{\partial x_i} \frac{\partial \mathbf{r}^{(N+1)}}{\partial x_j} - \frac{\partial \mathbf{r}^{(0)}}{\partial x_i} \frac{\partial \mathbf{r}^{(0)}}{\partial x_j} = \frac{\partial (u_i + \Delta u_i)}{\partial x_j} + \frac{\partial (u_j + \Delta u_j)}{\partial x_i} + \frac{\partial (u_p + \Delta u_p)}{\partial x_i} \frac{\partial (u_p + \Delta u_p)}{\partial x_j}, \quad (2)$$

где  $\Delta \mathbf{e}_{ij}$  — тензор приращений деформаций Грина;  $p$  — целочисленный индекс, принимающий значения 1, 2, 3.

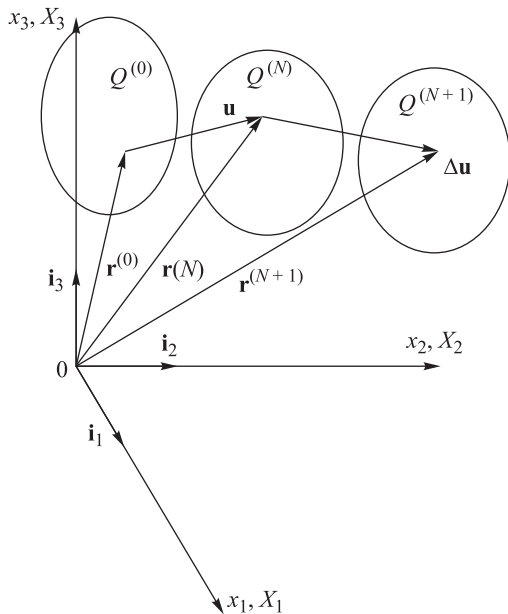


Рис. 1. Последовательность переменных равновесных состояний

Из выражений (1) и (2) найдем тензор приращений деформаций Грина

$$2\Delta \mathbf{e}_{ij} = \left( \delta_{pj} + \frac{\partial u_p}{\partial x_j} \right) \frac{\partial \Delta u_p}{\partial x_i} + \left( \delta_{pi} + \frac{\partial u_p}{\partial x_i} \right) \frac{\partial \Delta u_p}{\partial x_j} + \frac{\partial \Delta u_p}{\partial x_i} \frac{\partial \Delta u_p}{\partial x_j}, \quad (3)$$

где  $\delta_{pj}$ ,  $\delta_{pi}$  — символы Кронекера.

После линеаризации тензоров по приращению перемещений  $\Delta u_p$  имеем

$$2\Delta \mathbf{e}_{ij} = \left( \delta_{pj} + \frac{\partial u_p}{\partial x_j} \right) \frac{\partial \Delta u_p}{\partial x_i} + \left( \delta_{pi} + \frac{\partial u_p}{\partial x_i} \right) \frac{\partial \Delta u_p}{\partial x_j}. \quad (4)$$

Принцип виртуальных перемещений для состояния  $Q^{(N+1)}$  можно записать в виде

$$\iiint_V [(\mathbf{s}_{ij} + \Delta \mathbf{s}_{ij}) \delta(\mathbf{e}_{ij} + \Delta \mathbf{e}_{ij}) - (\tilde{P}_i + \Delta \tilde{P}_i) \delta \Delta u_i] dV - \iint_S (\tilde{F}_i + \Delta \tilde{F}_i) \delta \Delta u_i dS = 0, \quad (5)$$

где  $\mathbf{s}_{ij}$  и  $\Delta \mathbf{s}_{ij}$  — вторые тензоры напряжений Пиолы–Кирхгофа и их приращений;  $\delta$  — символ вариации;  $\tilde{P}_i$  и  $\tilde{F}_i$  — заданные массовые и поверхностные силы, отнесенные к единичному объему и единичной площади недеформируемого тела в состоянии  $Q^{(0)}$ ;  $V$  — объем тела.

Подставляя соотношения (2)–(4) в выражение (5) и используя уравнения равновесия в состоянии  $Q^{(N)}$ , получаем

$$\iiint_V (\mathbf{s}_{ij} \delta \Delta \mathbf{e}_{ij} - \tilde{P}_i \delta \Delta u_i) dV - \iint_S \tilde{F}_i \delta \Delta u_i dS = 0.$$

Пренебрегая членами высшего порядка малости, после некоторых преобразований запишем

$$\iiint_V \left( \Delta \mathbf{s}_{ij} \delta \Delta \mathbf{e}_{ij} + \frac{1}{2} \mathbf{s}_{ij} \delta \frac{\partial \Delta u_p}{\partial x_i} \frac{\partial \Delta u_p}{\partial x_j} - \Delta \tilde{P}_i \delta \Delta u_i \right) dV - \iint_S \Delta \tilde{F}_i \delta \Delta u_i dS = 0.$$

Будем считать, что между приращениями напряжений и деформаций существует линейная связь:

$$\Delta \mathbf{s}_{kl} = \mathbf{C}_{klmn} \Delta \mathbf{e}_{mn},$$

где  $\mathbf{C}_{klmn} = \mathbf{C}_{lkmn} = \mathbf{C}_{klmn} = \mathbf{C}_{mnlk}$  — тензор коэффициентов упругости [6, 7];  $k, l, m, n$  — целочисленные индексы, принимающие значения 1, 2, 3.

В этом случае принцип возможных перемещений имеет вид

$$\delta \left[ \frac{1}{2} \iiint_V \left( C_{klmn} \Delta \epsilon_{kl} \Delta \epsilon_{mn} + s_{kl} \frac{\partial \Delta u_p}{\partial x_k} \frac{\partial \Delta u_p}{\partial x_l} \right) dV - \right. \\ \left. - \iiint_V \Delta \tilde{P}_k \Delta u_k dV - \iint_S \Delta \tilde{F}_k \Delta u_k dS \right] = 0. \quad (6)$$

Используя выражение (4) и выделяя в первом слагаемом соотношения (6) члены, содержащие только приращения перемещений, получаем

$$\iiint_V C_{klmn} \frac{\partial \Delta u_m}{\partial x_n} \delta \frac{\partial \Delta u_k}{\partial x_l} dV + \\ + \iiint_V C_{klmn} \left( \delta_{pm} \frac{\partial u_q}{\partial x_k} + \delta_{qk} \frac{\partial u_p}{\partial x_m} + \frac{\partial u_q}{\partial x_k} \frac{\partial u_p}{\partial x_m} \right) \times \\ \times \frac{\partial \Delta u_p}{\partial x_n} \delta \frac{\partial \Delta u_q}{\partial x_l} dV + \iiint_V s_{kl} \frac{\partial \Delta u_p}{\partial x_k} \delta \frac{\partial \Delta u_p}{\partial x_l} dV - \\ - \iiint_V \Delta \tilde{P}_k \delta \Delta u_k dV - \iint_S \Delta \tilde{F}_k \delta \Delta u_k dS = 0. \quad (7)$$

Рассмотрим произвольный конечный элемент (КЭ), имеющий  $r$  узлов с номерами  $i_1, i_2, \dots, i_t, \dots, i_r$  [8]. Без ограничения общности можно считать, что  $i_t = t$ , в противном случае всегда можно осуществить перенумерацию узлов КЭ. Аппроксимируем приращения перемещений  $\Delta u_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) в КЭ следующим образом:

$$\Delta u_i = \sum_{t=1}^r \delta_{ip} \varphi_{pt} \Delta q_{pt}, \quad (8)$$

где  $\varphi_{pt}$  — базисные функции, равные единице в узле с номером  $t$  и нулю в остальных узлах;  $\Delta q_{pt}$  — приращения узловых перемещений.

После подстановки выражения (8) в формулу (7) для рассматриваемого КЭ принцип возможных перемещений можно представить в виде

$$\sum_{s=1}^r \left[ \sum_{t=1}^r \left( K_{st}^{(0)} + K_{st}^{(1)} + K_{st}^{(2)} \right) \Delta q_t - \Delta \tilde{Q}_s \right] \delta \Delta q_s = 0,$$

где  $K_{st}^{(0)}$  — жесткость КЭ;  $K_{st}^{(1)}$  и  $K_{st}^{(2)}$  — начальные перемещения и напряжения КЭ;  $\Delta \tilde{Q}_s$  — внешние нагрузки.

Переходя к матричной формулировке задачи, получим:

$$\left( [K]^{(0)} + [K]^{(1)} + [K]^{(2)} \right) \{\Delta q\} = \{\Delta \tilde{Q}\}, \quad (9)$$

где  $[K]^{(0)}$  — блочная инкрементальная матрица жесткости КЭ размером  $r \times r$ ;  $[K]^{(1)}$  и  $[K]^{(2)}$  — блочные матрицы начальных перемещений и напряжений КЭ;  $\{\Delta q\}$  — вектор узловых перемещений;  $\{\Delta \tilde{Q}\}$  — вектор внешних нагрузок.

Каждая из подматриц блочных матриц (9) имеет размер  $3 \times 3$ , и ее элементы определяются по следующим зависимостям:

$$k_{ij}^{(0)} = \iiint_V \delta_{ik} C_{klmn} \frac{\partial \varphi_{ks}}{\partial x_l} \frac{\partial \varphi_{mt}}{\partial x_n} \delta_{jm} dV; \quad (10)$$

$$k_{ij}^{(1)} = \iiint_V \delta_{ip} C_{klmn} \left( \delta_{qm} \frac{\partial u_p}{\partial x_k} + \delta_{pk} \frac{\partial u_q}{\partial x_m} + \frac{\partial u_p}{\partial x_k} \frac{\partial u_q}{\partial x_m} \right) \times \\ \times \frac{\partial \varphi_{ps}}{\partial x_l} \frac{\partial \varphi_{qt}}{\partial x_n} \delta_{jq} dV; \quad (11)$$

$$k_{ij}^{(2)} = \iiint_V \delta_{ij} s_{kl} \frac{\partial \varphi_{is}}{\partial x_k} \frac{\partial \varphi_{jt}}{\partial x_l} dV; \quad (12)$$

$$\Delta \tilde{Q}_i = \iiint_V \delta_{ik} \Delta \tilde{P}_k \varphi_{ks} dV + \iint_S \delta_{ik} \Delta \tilde{F}_k \varphi_{ks} dS. \quad (13)$$

Интегрирование ведется по объему и поверхности рассматриваемого КЭ. Построение глобальной матрицы жесткости конструкции осуществляется на основе стандартной процедуры суммирования по всем элементам, содержащим общие узлы. В результате получается система линейных уравнений равновесия конструкции, из которой определяются переменные состояния на  $(N + 1)$ -м шаге, такие как  $\Delta u_i$ ,  $\Delta \epsilon_{ij}$ ,  $\Delta s_{ij}$  и др. После каждого последующего шага полные перемещения вычисляются добавлением полученных инкрементальных узловых перемещений к текущим координатам узловых точек. Учитывая, что материальная (лагранжевая) система координат жестко связана с деформируемым телом, это приводит к необходимости перестроения конечно-элементной сетки и матриц (10)–(13) на каждом шаге расчета. В современных программах расчета, в частности в MARC, Nastran, Abacus, ANSYS, этот процесс выполняется автоматически при задании соответствующих опций [9].

В теории пластического течения часто постулирована связь между тензором приращения напряжений Коши–Эйлера  $\sigma_{ij}$  и модифицированным тензором деформаций Грина  $\Delta^* e_{ij}$ . В этом случае модифицированный тензор приращений деформаций Грина можно получить, принимая за начальное состояние  $Q^{(N)}$  и используя прямоугольные декартовы координаты  $X_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ):

$$2\Delta^* e_{ij} = \frac{\partial \mathbf{r}^{(N+1)}}{\partial X_i} \frac{\partial \mathbf{r}^{(N+1)}}{\partial X_j} - \frac{\partial \mathbf{r}^{(N)}}{\partial X_i} \frac{\partial \mathbf{r}^{(N)}}{\partial X_j} = \\ = \frac{\partial \Delta u_i}{\partial X_j} + \frac{\partial \Delta u_j}{\partial X_i} + \frac{\partial \Delta u_k}{\partial X_i} \frac{\partial \Delta u_k}{\partial X_j};$$

$$2\Delta^* \varepsilon_{ij} = \frac{\partial \Delta u_i}{\partial X_j} + \frac{\partial \Delta u_j}{\partial X_i}.$$

В результате имеем

$$\Delta^* \varepsilon_{ij} = \frac{\partial x_k}{\partial X_i} \frac{\partial x_l}{\partial X_j} \Delta \varepsilon_{kl}.$$

Переход от тензоров напряжений Коши-Эйлера к тензорам Пиолы-Кирхгофа осуществляется с помощью формулы [1]

$$\sigma_{ij} = \left( \frac{1}{D^{(N)}} \right) \frac{\partial X_i}{\partial x_k} \frac{\partial X_j}{\partial x_l} s_{kl},$$

где  $D^{(N)}$  — якобиан преобразования,

$$D^{(N)} = \frac{\partial (X_1, X_2, X_3)}{\partial (x_1, x_2, x_3)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial X_1}{\partial x_1} & \frac{\partial X_1}{\partial x_2} & \frac{\partial X_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial X_2}{\partial x_1} & \frac{\partial X_2}{\partial x_2} & \frac{\partial X_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial X_3}{\partial x_1} & \frac{\partial X_3}{\partial x_2} & \frac{\partial X_3}{\partial x_3} \end{vmatrix}.$$

**В качестве первого примера** рассмотрена физически нелинейная задача определения остаточных напряжений в крышке цилиндра транспортного дизельного двигателя, подробно описанная в работе [10]. После проведения приемо-сдаточных испытаний этого дизеля по требованию заказчика были замерены остаточные напряжения в семи крышках цилиндров. В результате имеются экспериментальные данные по уровню остаточных напряжений в крышках цилиндров после работы дизеля при вполне определенных и известных режимах нагружения, что позволяет оценить адекватность расчетной методики. Сопоставление расчетных и экспериментальных данных показало, что вычисленные значения остаточных напряжений в наиболее напряженных элементах огневого днища лежат в области, ограниченной 90%-ным доверительным интервалом. Таким образом, подтверждена адекватность принятой математической модели.

**В качестве второго примера** рассмотрим задачу формирования профиля прокладки для уплотнения газового стыка дизельного двигателя транспортного назначения. В этой задаче перемещения прокладки соизмеримы с ее размерами, а процесс формирования профиля происходит за счет пластического деформирования материала, т. е. геометрическая нелинейность сочетается с физической.

Втулка и крышка цилиндра, соединенные через уплотнительную прокладку с помощью собственных небольших шпилек, образуют газовый стык [11]. Верхний пояс втулки имеет относительную свободу для радиальных перемещений от максимального давления газов  $p_{\max}$  и тепловых деформаций, которые ограничены только силовой связью с крышкой цилиндра через уплотнительную прокладку.

В результате на прокладку действуют радиальные сдвигающие усилия, которые оказывают существенное влияние на герметичность газового стыка. Гарантией герметичности стыковых поверхностей прокладки должно быть отсутствие сдвигов. Однако при повышенном уровне форсирования по максимальному давлению газов в цилиндре для выполнения этого условия недостаточно одних сил трения от начальной затяжки соединения. В этом случае применяют конструкцию газового стыка замкового типа, схема которой приведена на рис. 2.

В таком соединении повышенное сопротивление сдвиговым деформациям создается не только за счет сил трения на поверхностях крышки  $t_{кр}$  и втулки  $t_{вт}$ , но и с помощью сил  $P$  сопротивления срезу материала выступов на поверхностях стыка. Более полное заполнение профиля стыка металлом прокладки позволяет существенно нарастить его силовую замкнутость и сопротивление сдвиговым нагрузкам в первую очередь путем увеличения сил  $P$ , которые играют главную роль в обеспечении неподвижности соединения.

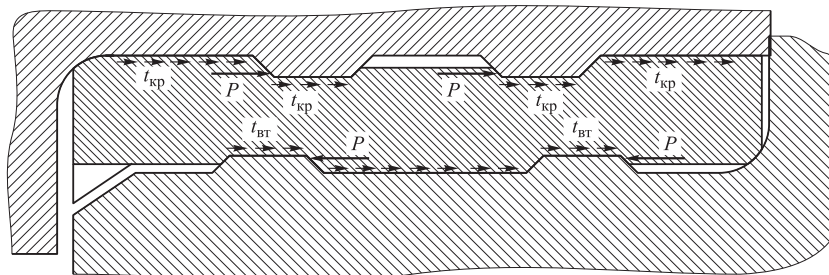


Рис. 2. Схема нагружения газового стыка

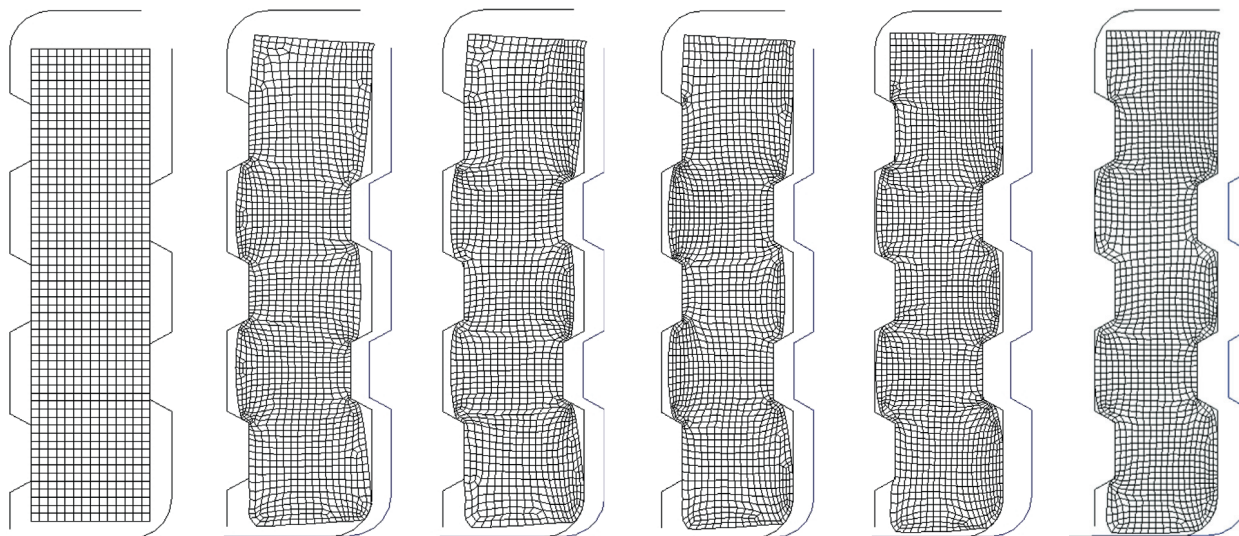


Рис. 3. Последовательные этапы деформирования прокладки при формировании профиля газового стыка

С этой целью при формировании профиля прокладки проводят предварительное обжатие стыка в специальных приспособлениях [12]. Усилие обжатия подбирают таким, чтобы в прокладке возникали пластические деформации. При пластическом течении материал прокладки заполняет профиль стыка на поверхностях крышки и втулки. Обычно прокладку изготавливают из стали, обладающей повышенной пластичностью (предел прочности  $\sigma_b$  и условный предел текучести  $\sigma_{0,2}$  примерно равны 0,5...0,65, относительное сужение  $\psi \geq 40\%$ ).

Далее рассмотрим задачу выбора оптимального профиля газового стыка по критерию наибольшего заполнения стыка материалом прокладки. Последовательные этапы деформирования прокладки, полученные в результате расчета, показаны на рис. 3.

Пластическая задача решалась на основе ассоциированной теории течения. В качестве условия возникновения пластичности использовался критерий Мизеса–Генки [13]. Материал прокладки — сталь 08кп — принимался изотропным упругопластичным. При задании физико-механических характеристик материала в расчете применялась экспериментальная зависимость  $\sigma$ – $\epsilon$ . Решение задачи выполнялось с автоматическим перестроением конеч-

но-элементной сетки и матрицы жесткости на каждом этапе расчета. Более подробно постановка задачи и результаты ее решения описаны в работе [11].

Рассмотренные задачи решались методом конечных элементов в трехмерной постановке в программном комплексе MSC.MARC.

В полученном профиле газового стыка заполнение материалом прокладки составило более 90%. Проведенный анализ показал, что внедрение указанного профиля будет обеспечивать герметичность газового стыка при повышении давления в камере сгорания до самых высоких пределов, достигнутых в современном дизелестроении.

## Выводы

1. На основе инкрементальных методов построена конечно-элементная модель сплошной среды с геометрическими и физическими нелинейностями.

2. Приведены задачи определения остаточных напряжений в крышке цилиндра транспортного дизельного двигателя и высадки прокладки его газового стыка, подтверждающие адекватность принятой математической модели.

## Литература

- [1] Васидзу К. *Вариационные методы в теории упругости и пластичности*. Москва, Мир, 1987. 542 с.
- [2] McMeeking R.M., Rice J.R. Finite Element Formulation for Problems of Large Elastic – Plastic Deformation. *International Journal of Solids and Structures*, 1975, vol. 11, is. 5, pp. 601–616.

- [3] Yoon J.W., Yang D.Y., Chung K. Elasto-plastic finite element method based on incremental deformation theory and continuum based shell elements for planar anisotropic sheet materials. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 1999, vol. 174, is. 1–2, pp. 23–56.
- [4] Ju J.W., Taylor R.L. A Perturbed Lagrangian Formulation for the Finite Element Solution of Nonlinear Frictional Contact Problems. *Journal de Mecanique Theorique et Appliquee*, 1988, vol. 7, supplement no. 1, pp. 1–14.
- [5] Димитриенко Ю.И. *Тензорный анализ*. В 4 т. Т. 1. Москва, Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2011. 463 с.
- [6] Микляев П.Г., Фридман Я.Б. *Анизотропия механических свойств металлов*. Москва, Металлургия, 1986. 224 с.
- [7] Димитриенко Ю.И. *Механика сплошной среды*. В 4 т. Т. 4: *Основы механики твердых сред*. Москва, Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2013. 623 с.
- [8] Zienkiewicz O.C., Taylor R.L. *The finite element method*. Butterworth-Heinemann, 2000. 706 p.
- [9] Temam R. *Mathematical modelling in continuum mechanics*. Cambridge University Press, 2005. 354 p.
- [10] Раенко М.И., Рыжов В.А. Оценка прочностной надежности крышек цилиндров транспортных дизелей по критерию долговечности. *Двигателестроение*, 2012, № 1, с. 7–17.
- [11] Чайнов Н.Д., Раенко М.И., Рыжов В.А. *Прочность теплонапряженных базовых деталей среднеоборотных двигателей внутреннего сгорания*. Москва, Машиностроение, 2015. 360 с.
- [12] Hosford W., Caddell R. *Metal Forming: Mechanics and Metallurgy*. Cambridge University Press, 2007. 312 p.
- [13] Вафин Р.К., Покровский А.М., Лешковцев В.Г. *Прочность термообрабатываемых прокатных валков*. Москва, Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2004. 262 с.

## References

- [1] Vasilidzu K. *Variatsionnye metody v teorii uprugosti i plastichnosti* [Variation methods in the theory of elasticity and plasticity]. Moscow, Mir publ., 1987. 542 p.
- [2] McMeeking R.M., Rice J.R. Finite Element Formulation for Problems of Large Elastic — Plastic Deformation. *International Journal of Solids and Structures*, 1975, vol. 11, is. 5, pp. 601–616.
- [3] Yoon J.W., Yang D.Y., Chung K. Elasto-plastic finite element method based on incremental deformation theory and continuum based shell elements for planar anisotropic sheet materials. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 1999, vol. 174, is. 1–2, pp. 23–56.
- [4] Ju J.-W., Taylor R.L. A Perturbed Lagrangian Formulation for the Finite Element Solution of Nonlinear Frictional Contact Problems. *Journal of Mechanics Theoretical and Applied*, 1988, vol. 7, supplement no. 1, pp. 1–14.
- [5] Dimitrienko Iu.I. *Tenzornyi analiz* [Tensor analysis]. Moscow, Bauman Press, 2011. 463 p.
- [6] Mikliaev P.G., Fridman Ia.B. *Anizotropiia mekhanicheskikh svoistv metallov* [Anisotropy of mechanical properties of metals]. Moscow, Metallurgii publ., 1986. 224 p.
- [7] Dimitrenko Iu.I. *Mehanika sploshnoi sredy. V 4 t. T. 4. Osnovy mekhaniki tverdykh sred* [Continuum mechanics. In 4 vol. Vol. 4. Fundamentals of mechanics of solids]. Moscow, Bauman Press, 2013. 623 p.
- [8] Zienkiewicz O.C., Taylor R.L. *The finite element method*. Butterworth-Heinemann, 2000. 706 p.
- [9] Temam R. *Mathematical modelling in continuum mechanics*. Cambridge University Press, 2005. 354 p.
- [10] Raenko M.I., Ryzhov V.A. Otsenka prochnostnoi nadezhnosti kryshek tsilindrov transportnykh dizelei po kriteriiu dolgovechnosti [Assessment of the strength reliability of the cylinder covers of transport diesel engines by the criterion of durability]. *Dvigatellestroenie* [Engine building]. 2012, no. 1, pp. 7–17.

- [11] Chainov N.D., Raenko M.I., Ryzhov V.A. *Prochnost' teplonapriazhennykh bazovykh detalei sredneoborotnykh dvigatelei vnutrennego sgoraniia* [The strength of heat-stressed basic components of medium-speed internal combustion engines]. Moscow, Mashinostroenie publ., 2015. 360 p.
- [12] Hosford W., Caddell R. *Metal Forming: Mechanics and Metallurgy*. Cambridge University Press, 2007. 312 p.
- [13] Vafin R.K., Pokrovskii A.M., Leshkovtsev V.G. *Prochnost' termoobrabatyvaemykh produktov valkov* [Strength of heat-treated rolls]. Moscow, Bauman Press, 2004. 262 p.

Статья поступила в редакцию 07.03.2018

## Информация об авторах

**РАЕНКО Мстислав Иванович** (Коломна) — кандидат технических наук, начальник отдела прочности. ОАО «Коломенский завод» (140408, Коломна, Московская область, Российская Федерация, ул. Партизан, д. 42, e-mail: ns.raenko.43@mail.ru).

**ЧАЙНОВ Николай Дмитриевич** (Москва) — доктор технических наук, профессор кафедры «Поршневые двигатели». МГТУ им. Н.Э. Баумана (105005, Москва, Российская Федерация, 2-я Бауманская ул., д. 5, стр. 1, e-mail: ndchainov@yandex.ru).

## Information about the authors

**RAENKO Mstislav Ivanovich** (Kolomna) — Candidate of Science (Eng.), Head of Mechanical Strength Department, ОАО Kolomenskiy Zavod (140408, Moscow region, Kolomna, Partizan St., Bldg. 42, e-mail: Ugkm@kolomna.ru).

**CHAINOV Nikolai Dmitrievich** (Moscow) — Doctor of Science (Eng.), Professor, Piston Engines Department. Bauman Moscow State Technical University (105005, Moscow, Russian Federation, 2<sup>nd</sup> Baumanskaya St., Bldg. 5, Block 1, e-mail: ndchainov@yandex.ru).

### Просьба ссылаться на эту статью следующим образом:

Раенко М.И., Чайнов Н.Д. Применение конечно-элементной модели нелинейной сплошной среды для анализа напряженно-деформированного состояния элементов конструкций. *Известия высших учебных заведений. Машиностроение*, 2018, № 5, с. 28–35, doi: 10.18698/0536-1044-2018-5-28-35.

### Please cite this article in English as:

Raenko M.I., Chainov N.D. The Application of a Finite Element Model of Nonlinear Continuous Medium in the Analysis of the Stress-Strain State of Structure Members. *Proceedings of Higher Educational Institutions. Machine Building*, 2018, no. 5, pp. 28–35, doi: 10.18698/0536-1044-2018-5-28-35.



## В Издательстве МГТУ им. Н.Э. Баумана вышло в свет учебное пособие **Ж.М. Кокуевой** «Управление проектами»

Проектная деятельность сегодня характерна для экономик всех стран. Производственные предприятия внедряют методы проектного управления как наиболее эффективные способы управления. В издании изложена методология управления проектами в соответствии с Международным стандартом ISO 21500:2012, даны комментарии, разъяснения, приведены примеры из практики.

Для студентов инженерных факультетов, обучающихся по направлению подготовки 270407 «Наукоемкие технологии и экономика инноваций».

### По вопросам приобретения обращайтесь:

105005, Москва, 2-я Бауманская ул., д. 5, стр. 1.  
Тел.: +7 499 263-60-45, факс: +7 499 261-45-97;  
press@bmstu.ru; www.baumanpress.ru