ПОЖБЕЛКО
Владимир Иванович
заслуженный работник высшей школы РФ, доктор технических наук, профессор (Южно-Уральский государственный университет)

POZHBELKO
Vladimir Ivanovich
Dr. Sc. Techn., Professor
(South Ural State University)

ЕРМОШИНА
Екатерина Николаевна
магистр прикладных математики и физики
(Южно-Уральский государственный университет)

ERMOSHINA
Ekaterina Nikolaevna
Master of Applied Mathematics and Physies
(South Ural State University)

УДК 621. 01

Направленный структурный синтез многоконтурных механических систем взаимосвязанных твердых тел

В.И. Пожбелко, Е.Н. Ермошина

Рассматривается методика и примеры построения двух-, трех- и четырехконтурных структур замкнутых механических систем, реализующих весь расчетный диапазон многократных соединений их звеньев в виде различных совмещенных шарниров. Синтез выполнен на основе всех 23 полученных целочисленных решений исходного структурного уравнения таких систем и может быть использован в разных областях машиностроения (механизмы, приводы машин, роботы, фермы).

Ключевые слова: механическая система, структурный синтез, кинематические цепи, изменяемые замкнутые контуры.

Directed Structural Synthesis of Multiple Loop Mechanical Systems of Interrelated Solid Elements

V.I. Pozhbelko, E.N. Ermoshina

The paper presents the structural synthesis of multiloop mechanical systems used in engineering (linkage mechanisms, drives, robots, frameworks). The synthesis has been carried out based on the obtained 23 integral solutions of the initial structural equation.

Keywords: mechanical systems, structural synthesis, kinematic chains, changeable closed loops.

Общая постановка задачи и предлагаемый путь ее решения. Рассматриваемые механические системы представляют собой простейшие одноконтурные или более сложные многоконтурные замкнутые системы взаимосвязанных твердых тел, в которых замкнутые контуры, образующиеся в процессе сборки между собой отдельных звеньев, могут быть расположены в одной плоскости (возникают плоские механические системы) или в разных плоскостях (возникают пространственные механические системы). Подобные разнообразные шарнирно-рычажные одноконтурные и многоконтурные технические устройства благодаря простоте конструкции, технологичности изготовления и надежности работы нашли широкое применение в разных областях машиностроения (механизмы, одно- и многоподвижные приводы машин, роботы и манипуляторы, фермы мостов и стартовых комплексов и др.) [1, 2].

Структурный синтез замкнутых многозвенных (и особенно многоконтурных) механических систем разного технического назначения является первичным и самым ответственным этапом при их создании.

В механике машин структурный синтез, как искусство их построения [1], представляет собой достаточно сложную задачу, которая обычно имеет многовариантное решение и поэтому требует применения математических моделей строения различных механических систем (для охвата всех их возможных структурных вариантов).

Математические выражения (уравнения, неравенства и другие зависимости переменных величин) являются основным средством формализации и познания при моделировании физических явлений и строения окружающего мира, представляющего собой различные механические системы [1—4], состоящие из целого числа взаимосвязанных твердых тел (рис. 1). Таким образом, в механике возникает проблема решения уравнений прикладной математики именно в целых числах, относящаяся к достаточно сложным задачам аналитической теории чисел [5—7] и получившая название «диофантов анализ уравнений» (по имени впервые занимавшегося ею древнегреческого математика Диофанта).

В работах [5—7] отмечено, что в первую очередь такие проблемы возникают, когда требуется найти целочисленные решения уравнений, где число неизвестных *превышает* число уравнений (например, два и более неизвестных в одном уравнении) и содержат:

а) более простую задачу — установление существования конечного (или бесконечного) количества целочисленных решений данного уравнения или системы исходных уравнений (или полного отсутствия таких решений в целых числах);

б) более сложную задачу — определение расчетным путем точного количества этих целочисленных решений при увеличенном (два и более) числе неизвестных в рассматриваемом уравнении;

в) рассматриваемую в данной работе предельно сложную задачу — нахождение всех этих решений в целых числах для количественного описания, а также последующего моделирования и целенаправленного создания (на основе этих решений) возможных структур механических систем взаимосвязанных твердых тел:

- как уже существующих (образовавшихся в природе окружающего мира в виде различных химических соединений и живых биологических объектов);
- так и искусственно создаваемых человеком разнообразных подвижных и неподвижных механических устройств (например, движущиеся механизмы машин и неподвижные шарнирно-рычажные фермы).

Отметим, что разнообразные механические системы взаимосвязанных твердых тел могут содержать как только простые (simple joints) соединения между собой двух отдельных компонентов (звеньев) системы (это будет частный случай — обозначим его $\nu = 0$), так и совмещенные многократные (complex many-sided) шарнирные соединения между собой трех и более отдельных компонентов (звеньев) системы

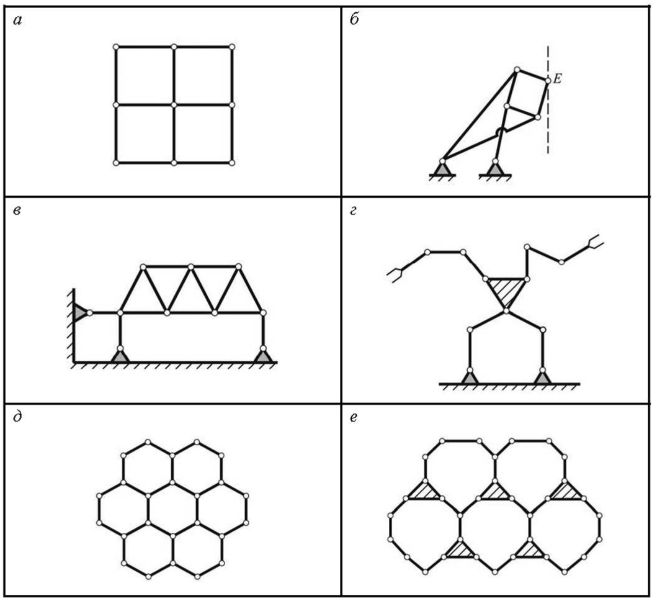

Рис. 1. Примеры механических систем с многократными связями, созданных природой и изобретенных человеком (на основе познания закономерностей окружающего мира):

а — кристаллическая решетка твердых веществ [3]; *б* — шарнирный прямолинейно-направляющий механизм [1]; *в* — стержневая ферма однопролетного моста [1]; *г* — человекоподобный робот-манипулятор; *д* — сотовые конструкции пчелиных ульев (с ячейками шестигранной формы); *е* — сотовые конструкции решеток охлаждения современных ядерных реакторов (с ячейками девятигранной формы) [4] (этот более общий случай ее строения обозначим $\nu \neq 0$) [2]. Некоторые примеры возможных подвижных соединений (связей) звеньев между собой в различных замкнутых механических системах изображены на рис. 2 (где кратность j образующихся совмещенных шарниров будет на единицу меньше числа сходящихся в узле звеньев механической системы).

Для формализации строения многозвенных механических систем используем полученное в работе [2] уравнение многократных связей замкнутых механических систем (исходное структурное уравнение механики), которое в общем случае ($\nu \neq 0$) имеет вид

$$\nu_2 + 2\nu_3 + 3\nu_4 + 4\nu_5 + \ldots + (k-1)\nu_k = \nu;\\ \nu \leq C = 2(K-1), \tag{1}$$

где ν_j — число j-кратных соединений звеньев замкнутой механической системы ($j_{\max} = K$); K — число образуемых звеньями системы взаимно независимых изменяемых замкнутых контуров ($K \geq 1$); ν — приведенное число совмещенных многократных шарниров в составе механической системы; параметр k в последнем слагаемом данного уравнения зависит от величины K и равен $k = K + 1$ при $C \leq K$ в области $K \leq 2$ или равен $k = K$ при $C > K$ в области $K > 2$.

Решение исходного уравнения (1) заключается в определении всех целочисленных значений неизвестных $(\nu_2, \nu_3, \ldots, \nu_k)$ при заданной целой величине K = 1; 2; 3;... и соответствующей ей целой константе $C = 2(K-1)$, задающей диапазон изменения $\nu \leq C$. Примеры разнообразных механических систем, структура которых удовлетворяет граничному условию $\nu = C$, представлены на рис. 3.

С математической точки зрения исходная зависимость (1) представляет собой линейное алгебраическое уравнение 1-й степени с целой константой C и постоянными целыми коэффициентами c_i, образующих арифметическую прогрессию (число слагаемых которой зависит от задаваемой величины K = 1; 2; 3;...):

$$(c_0 y_1 + c_1 y_2 + c_2 y_3 + c_3 y_4 + \\ + c_4 y_5 \ldots + c_i y_i) - C = 0, \tag{2}$$

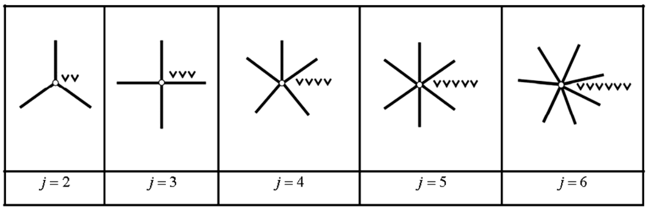

Рис. 2. Варианты многократных связей элементов механических систем (в виде совмещенных шарниров кратностью $j \geq 2$)

где

$$c_0 = 0,\ c_1 = 1,\ c_2 = 2,\ c_3 = 3,\ c_4 = 4, \ldots,\ c_i = (k-1);$$

$$y_2 = \nu_2,\ y_3 = \nu_3,\ y_4 = \nu_4,\ y_5 = \nu_5, \ldots,\ y_i = \nu_k.$$

Предлагаемый алгоритм поиска всех решений уравнения (1) состоит из трех этапов:

I этап — определение диапазона возможных целочисленных значений неизвестных;

II этап — составление аналитической зависимости между неизвестными;

III этап — определение всех решений искомого уравнения в целых числах — из совместного рассмотрения I и II этапов.

Решение структурного уравнения механики в целых числах. Применим предлагаемый трехэтапный алгоритм для решения в целых числах исходного структурного уравнения механики (1) при K = 1, K = 2, K = 3.

I этап. K = 1. Исходное структурное уравнение механики (1) при K = 1 вырождается ($\nu = \nu_2$, $C = 0$) и имеет единственное решение

$$\nu_2 = \nu = 0,$$

которое представлено на рис. 4 в виде одноконтурной замкнутой механической системы.

II этап. K = 2. Исходное структурное уравнение механики (1) при K = 2 имеет вид

$$\nu_2 + 2\nu_3 = \nu;\ \nu \leq 2(K-1) = 2$$

и в диапазоне возможных целочисленных значений неизвестных $0 \leq \nu_2 \leq 2$, $0 \leq \nu_3 \leq 1$ имеет следующие четыре решения в четных и нечетных числах:

$$\nu_2 = 0,\ \nu_3 = 0;\ \nu_2 = 1,\ \nu_3 = 0;\\ \nu_2 = 2,\ \nu_3 = 0;\ \nu_2 = 0,\ \nu_3 = 1,$$

представленных на рис. 4 в виде различных двухконтурных механических систем.

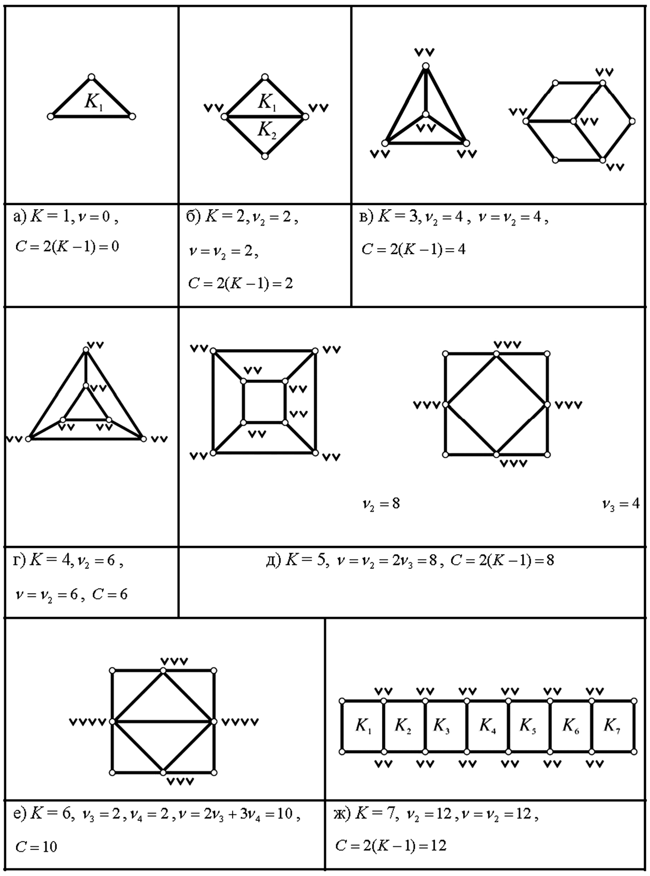

Рис. 3. Моделирование строения замкнутых одноконтурных ($K=1$) и многоконтурных ($K \geq 2$) шарнирно-рычажных структур (выполнение граничного условия структурного уравнения механики (1) вида $\nu = C$)

III этап. $K=3$. Исходное структурное уравнение механики (1) при $K=3$ имеет вид

$$\nu_2 + 2\nu_3 = \nu; \quad \nu \leq 2(K-1) = 4$$

и в пределах $\nu \leq 4$ может иметь только пять значений величины ν:

$$\nu = C_1 = 0; \ \nu = C_2 = 1; \ \nu = C_3 = 2; \ \nu = C_4 = 3; \ \nu = C_5 = 4,$$

приводящих к следующей совокупности целочисленных решений уравнения (1), определяющих возможные варианты структуры трехконтурных механических систем:

а) $C_1 = 0$:

$\nu_2 + 2\nu_3 = 0 \Rightarrow \nu_2 = 0, \ \nu_3 = 0$ (первое решение);

б) $C_2 = 1$:

$\nu_2 + 2\nu_3 = 1 \Rightarrow \nu_3 = \dfrac{1-\nu_2}{2} \Rightarrow$ из условия $\nu_3 \geq 0$ величина ν_2 может быть только *нечетной* и равной: $\nu_2 = 1, \ \nu_3 = 0$ (второе решение);

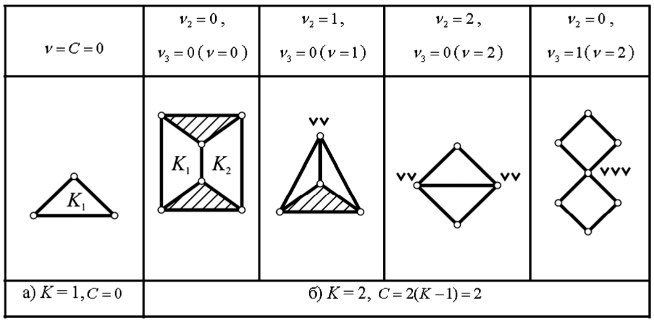

Рис. 4. Создание одноконтурных ($K=1$) и двухконтурных ($K=2$) замкнутых механических систем (на основе решений в целых числах структурного уравнения механики (1) в случае $C \leq K$)

в) $C_3 = 2$:

$\nu_2 + 2\nu_3 = 2 \Rightarrow \nu_3 = 1 - \dfrac{\nu_2}{2} \Rightarrow$ из условия $\nu_3 \geq 0$ величина ν_2 может быть только *четной* и в пределах $\nu_2 \leq 2$ таких четных цифр только две: $\nu_2 = 0, \ \nu_3 = 1$ (третье решение); $\nu_2 = 2, \ \nu_3 = 0$ (четвертое решение);

г) $C_4 = 3$:

$\nu_2 + 2\nu_3 = 3 \Rightarrow \nu_3 = \dfrac{3-\nu_2}{2} \Rightarrow$ из условия $\nu_3 \geq 0$ величина ν_2 может быть только *нечетной* и в пределах $\nu_2 \leq 3$ таких нечетных цифр только две (1;3): $\nu_2 = 1, \ \nu_3 = 1$ (пятое решение); $\nu_2 = 3, \ \nu_3 = 0$ (шестое решение);

д) $C_5 = 4$:

$\nu_2 + 2\nu_3 = 4 \Rightarrow \nu_3 = 2 - \dfrac{\nu_2}{2} \Rightarrow$ из условия $\nu_3 \geq 0$ величина ν_2 может быть только *четной* и в пределах $\nu_2 \leq 4$ таких четных цифр только три (это 0; 2; 4): $\nu_2 = 0, \ \nu_3 = 2$ (седьмое решение); $\nu_2 = 2, \ \nu_3 = 1$ (восьмое решение); $\nu_2 = 4, \ \nu_3 = 0$ (девятое решение).

Таким образом, исходное уравнение механики (1) при $K=3$ содержит два неизвестных (ν_2, ν_3) и имеет только девять решений в целых числах, представленных на рис. 5 в виде трехконтурных замкнутых механических систем.

Теорема о конечном множестве целочисленных решений структурного уравнения механики с несколькими неизвестными. Анализ полученных выше целочисленных решений линейного структурного уравнения механики (1) позволяет предположить, что их различное число предопределено разными наборами четных и не-

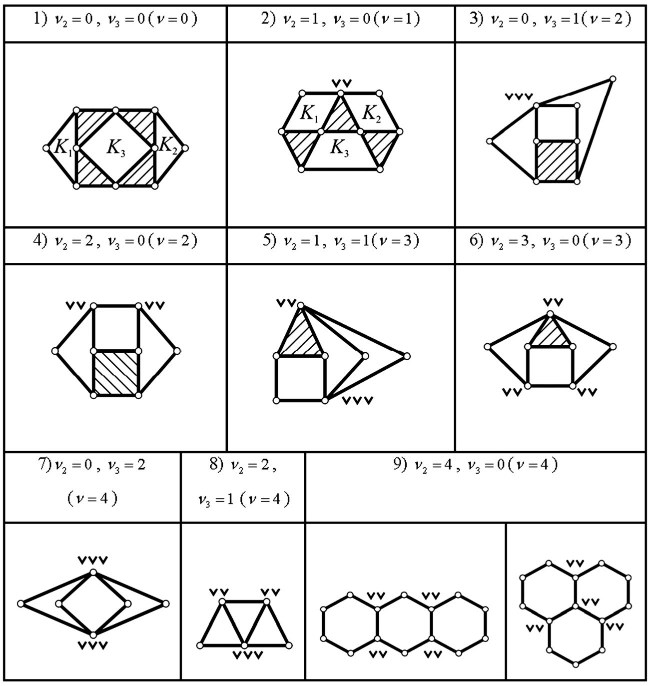

Рис. 5. Создание трехконтурных (K = 3, C = 2(K – 1) = 4) замкнутых механических систем (на основе решений в целых числах структурного уравнения механики (1) в случае $C > K$)

четных цифр согласно предлагаемой ниже теореме.

Теорема. Линейное структурное уравнение механики вида

$$\nu_2+2\nu_3+3\nu_4+4\nu_5+\ldots+(k-1)\nu_k=\nu;$$
$$\nu\le C=2(K-1)\Rightarrow \nu_2+2\nu_3\le C_0 \qquad (3)$$

при любых $K\ge 1$ (т. е. с любым числом неизвестных) имеет конечное множество Z целочисленных решений $(\nu_2,\nu_3,\nu_4,\ldots)$, определяемое набором четных и/или нечетных взаимно простых целых чисел в составе константы C_0 и рассчитываемое по формуле

$$Z=\sum N_i,$$
$$N_i=\left(\frac{m_0}{2}+k_0\right)+\left(\frac{m_1+k_1}{2}\right); \qquad (4)$$

$$C_0=2(K-1)-[3\nu_4+4\nu_5+\ldots+(k-1)\nu_k],$$
$$C_0\le C=2(K-1), \qquad (5)$$

где N_i — число целочисленных решений в пределах данного значения C_0; m_0, k_0— сумма четных цифр (m_0) и их количество с учетом нуля (k_0) в цифровом диапазоне от нуля до предела, равного C_0 (включительно); m_1, k_1— сумма нечетных цифр (m_1) и их количество (k_1) в цифровом диапазоне от нуля до предела, равного C_0 (включительно).

Пример № 1. Исходные данные: $K = 2$; $\nu_2+2\nu_3=2(K-1)=2$; $C_0=C=2$; $N_i=N$.

Результаты расчета: $m_0=0+2=2$, $k_0=2$; $m_1=1$, $k_1=1\Rightarrow N=(2/2+2)+(1)=4$; $Z=N=4$.

Пример № 2. Исходные данные: $K = 3$; $\nu_2+2\nu_3=4$; $C_0=C=4$; $N_i=N$.

Результаты расчета: $m_0=0+2+4=6$, $k_0=3$; $m_1=1+3=4$, $k_1=2$ $\Rightarrow$ $N=(3+3)+(3)=9$; $Z=N=9$. (Совпадают с представленными на рис. 4 и 5 для случаев $K=2$ и $K=3$).

Примечание. В работе [6] рассмотрен метод поиска целочисленных решений линейного уравнения с двумя неизвестными вида

$$ax+by+E=0,$$

решение которого представлено в виде $x=x_0-bt$, $y=y_0+at$, где t — параметр $t=0,\ \pm1,\ \pm2,\ldots$, (x_0,y_0) — некоторое решение данного уравнения, в указанном уравнении *a, b* — целые числа отличные от нуля и взаимно простые, E — целое.

Применительно к рассматриваемой механической системе с $K=2$ (см. рис. 4) на *a, b, E* необходимо наложить дополнительные условия: $x\ge 0$, $y\ge 0$; a = 1, b = 2; $E\le 0$; ($x_0=E$, $y_0=-E$) — одно из решений; $E\in[-2{,}0]$.

С учетом данных условий получаем следующую систему неравенств:

$$\begin{cases} x=E-2t\ge 0\\ y=-E+t\ge 0,\end{cases}$$

из которой определяем интервал изменения параметра t (с учетом отрицательной величины E): $t\le\dfrac{E}{2}$; $t\ge E$ и получаем следующий набор целочисленных решений:

$$x_1=0,\ y_1=0;\ x_2=1,\ y_2=0;\ x_3=2,$$
$$y_3=0;\ x_4=0,\ y_4=1.$$

Сравнительный анализ полученного множества из четырех решений показывает, что данный результат (пары чисел x и y) полностью согласуется как с целочисленными решениями при $K=2$ (см. II этап на с. 24), так и с определением числа решений по аналитической зависимости (4) теоремы, предложенной выше.

Постановка многошаговой задачи и предлагаемый алгоритм ее целочисленного решения. Рассматриваемая в данной работе проблема структурного синтеза многоконтурных механических систем для разных областей техники (механизмы, фермы, замкнутые приводы роботов и манипуляторов) [1] связана с поиском всех вариантов целочисленных значений разных проектных параметров $(\nu_2, \nu_3, \nu_4, \nu_5, \ldots, \nu_K)$, число которых три и более, а структурное уравнение механики для их определения только одно [2] и имеет следующий вид линейного алгебраического уравнения:

$$\nu_2 + 2\nu_3 + 3\nu_4 + 4\nu_5 + \ldots + (K-1)\nu_K = \nu; \quad \nu \le C = 2(K-1), \tag{6}$$

где K — задаваемое число взаимно независимых изменяемых замкнутых контуров, образуемых между собой звеньями механической системы; $\nu_2, \nu_3, \nu_4, \nu_5, \ldots$ — искомые структурные параметры, указывающие необходимое число двухкратных (ν_2), трехкратных (ν_3), четырехкратных (ν_4) и т. д. многократных соединений звеньев в узлах синтезируемой механической системы в виде совмещенных шарниров см. рис. 2.

В связи с этим возникает решаемая в данной работе многошаговая задача, относящаяся к аналитической теории чисел [7]:

1) установление существования конечного или бесконечного множества $Z \neq 0$ решений в целых числах (или их полного отсутствия — случай $Z = 0$) исходного структурного уравнения механики (6) для данной величины C;

2) точное определения величины Z для заданного числа неизвестных в одном исходном уравнении (6); в рассматриваемых многоконтурных механических системах это три и более разных проектных параметра $(\nu_2, \nu_3, \nu_4, \nu_5, \ldots, \nu_K)$;

3) определение каждого из целочисленных решений (в виде наборов искомых структурных параметров) во всей области Z;

4) структурный синтез разнообразных замкнутых механических систем на основе полученных целочисленных решений уравнения (6) с тремя неизвестными структурными параметрами (ν_2, ν_3, ν_4).

Предлагаемый алгоритм решения в целых числах исходного структурного уравнения механики (1) с числом неизвестных параметров три и более $(\nu_2, \nu_3, \nu_4, \nu_5, \ldots)$ состоит из пяти этапов:

1) исходное структурное уравнение механики (6) с числом неизвестных три и более (при $K \ge 4$) вида

$$\nu_2 + 2\nu_3 + 3\nu_4 + 4\nu_5 + \ldots = \nu; \; \nu \le C = 2(K-1)$$

заменяется на *порождающее* линейное алгебраическое уравнения вида

$$\nu_2 + 2\nu_3 = \nu^*; \; \nu^* \le C_0 = C - (3\nu_4 + 4\nu_5 + \ldots). \tag{7}$$

Данная операция замены производится путем переноса всех неизвестных более двух (а именно: ν_4, ν_5, и т. д.) в правую часть исходного уравнения (6) и замены при этом постоянной целой константы C на переменную величину $C_0 = C - (3\nu_4 + 4\nu_5 + \ldots)$. Величина C_0 принимает различные значения в пределах $0 \le C_0 \le C$ в зависимости от значений $\nu_4, \nu_5, \ldots$ и т. д. в рассмотренных ниже целочисленных диапазонах (8);

2) определяется возможный целочисленный диапазон изменения каждого из неизвестных параметров из условия их положительных значений $\nu_2 \ge 0, \nu_3 \ge 0, \nu_4 \ge 0$ и т. д.:

$$0 \le \nu_2 \le C_0; \quad 0 \le \nu_3 \le \frac{C_0}{2}; \quad 0 \le \nu_4 \le \frac{C_0}{3}; \; 0 \le \nu_5 \le \frac{C_0}{4} \ldots; \tag{8}$$

3) определяются допустимые в этих диапазонах целые значения всех неизвестных $(\nu_2, \nu_3, \nu_4, \nu_5, \ldots$ и т. д.);

4) для всех допустимых целых значений параметров (например, для ν_4 и ν_5) определяются все значения переменной константы C_0 и из порождающего уравнения (7) с двумя неизвестными (ν_2 и ν_3) для каждого значения C_0 определяется все множество N_i пар (ν_2, ν_3) решений в целых числах;

5) составляется массив полученного множества

$$Z = \sum_{C_0=C}^{C_0=0} N_i \tag{9}$$

целочисленных решений исходного структурного уравнения механики $(\nu_2, \nu_3, \nu_4, \nu_5, ...)$ — для последующего структурного синтеза по ним разнообразных многоконтурных замкнутых механических систем взаимосвязанных твердых тел.

Расчет конечного множества целочисленных решений линейного алгебраического уравнения с тремя неизвестными. Расчет производится по формулам (6) — (9) на основе предложенной выше теоремы о существовании конечного множества Z таких решений в замкнутых механических системах (4) и в соответствии с указанным выше алгоритмом.

Для этого исходное уравнение (6) в многоконтурных механических системах (в данном случае при $K=4$) принимает вид

$$\nu_2 + 2\nu_3 + 3\nu_4 = \nu; \ \nu \le C = 6 \Rightarrow \nu_2 \le 6; \\ \nu_3 \le 3; \ \nu_4 \le 2$$

и заменяется порождающим алгебраическим уравнением:

$$\nu_2 + 2\nu_3 = \nu^*; \ \nu^* \le C_0 = 6 - 3\nu_4 \quad (\nu_4 = 0; 1; 2).$$

В данном порождающем уравнении каждому из трех возможных значений C_0:

$$C_0 = 6 \text{ при } \nu_4 = 0; \ C_0 = 3 \text{ при } \nu_4 = 1; \\ C_0 = 0 \text{ при } \nu_4 = 2$$

согласно указанной теореме соответствует различное конечное множество (N_1, N_2, N_3) решений в целых числах, определяемое по формуле

$$Z = \sum N_i = N_1 + N_2 + N_3, \\ N_i = \left(\frac{m_0}{2} + k_0\right) + \left(\frac{m_1 + k_1}{2}\right),$$

где N_i — число целочисленных решений в пределах данного значения C_0, зависящее от суммы и количества четных чисел (m_0, k_0) и нечетных чисел (m_1, k_1) в цифровом диапазоне от 0 до C_0 (включительно).

Пример расчета Z для случая K = 4:

1) $C_0 = 6 \ (0, 1, 2, 3, 4, 5, 6) \Rightarrow m_0 = 0 + 2 + 4 + 6 = 12, k_0 = 4; m_1 = 1 + 3 + 5 = 9, k_1 = 3 \Rightarrow N_1 = 10 + 6 = 16;$

2) $C_0 = 3 \ (0, 1, 2, 3) \Rightarrow m_0 = 0 + 2 = 2, \ k_0 = 2; m_1 = 1 + 3 = 4, \ k_1 = 2 \Rightarrow N_2 = 3 + 3 = 6;$

3) $C_0 = 0 \Rightarrow m_0 = 0, k_0 = 1; m_1 = 0, k_1 = 0 \Rightarrow N_3 = 1;$

4) $Z = N_1 + N_2 + N_3 = 16 + 6 + 1 = 23.$

Решение в целых числах структурного уравнения механики с тремя неизвестными. Найдем все целые неотрицательные решения структурного уравнения механики (6) при $K=4$ (т. е. при $C=6$).

Приведем уравнение (6) к виду $\nu_2 + 2\nu_3 + 3\nu_4 - 6 = 0$ и введем $E = 3\nu_4 - 6$. В результате получим уравнение вида $\nu_2 + 2\nu_3 + E = 0$, решение которого можно представить в виде $\nu_2 = (\nu_2)_0 - 2t$, $\nu_3 = (\nu_3)_0 + t$, где t — параметр $(t = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$; $(\nu_2)_0, (\nu_3)_0$ — некоторое решение данного уравнения, которое соответствует определенному значению E, $x \ge 0$, $y \ge 0$.

Заметим, что в качестве одного из решений уравнения $\nu_2 + 2\nu_3 + (3\nu_4 - 6) = 0$ при фиксированном ν_4 можно принять $(\nu_2)_0 = -\nu_4 + 2$, $(\nu_3)_0 = -\nu_4 + 2$. Следовательно, все остальные решения можно представить в виде

$$\begin{cases} \nu_2 = (-\nu_4 + 2) - 2t; \\ \nu_3 = (-\nu_4 + 2) + t; \\ \nu_4 - \text{целое}. \end{cases}$$

Для удобства перепишем эту систему в другом виде

$$\begin{cases} \nu_2 = p - 2t; \\ \nu_3 = p + t. \end{cases}$$

где $p = -\nu_4 + 2$, p, t— целые числа.

Далее необходимо выбрать такие пары чисел (p,t), которые соответствуют неотрицательным значениям ν_2, ν_3, ν_4. С учетом данного условия, получим: $p - 2t \ge 0, p + t \ge 0, -p + 2 \ge 0 \Rightarrow p \ge 2t$, $p \ge -t$, $p \le 2$. Исходя из этого, находим пары чисел (p,t): (−2,2); (−1,2); (0,2); (1,2); (−1,1); (0,1); (0,0). Таким образом, получаем следующий набор целочисленных решений (семь решений при $C=6$):

$$\nu_2 = 6, \ \nu_3 = 0, \ \nu_4 = 0; \ \nu_2 = 4, \ \nu_3 = 1, \ \nu_4 = 0; \\ \nu_2 = 2, \ \nu_3 = 2, \ \nu_4 = 0; \ \nu_2 = 0, \ \nu_3 = 3, \ \nu_4 = 0; \\ \nu_2 = 3, \ \nu_3 = 0, \ \nu_4 = 1; \ \nu_2 = 1, \ \nu_3 = 1, \\ \nu_4 = 1; \ \nu_2 = 0, \ \nu_3 = 0, \ \nu_4 = 2.$$

Решая уравнение механики (6) аналогичным методом при $K=4$ получим:

а) при $C=5$ — пять целочисленных решений вида:

$$\nu_2=5,\ \nu_3=0,\ \nu_4=0;\ \nu_2=0,\ \nu_3=1,\ \nu_4=1;$$
$$\nu_2=1,\ \nu_3=2,\ \nu_4=0;$$
$$\nu_2=2,\ \nu_3=0,\ \nu_4=1;\ \nu_2=3,\ \nu_3=1,\ \nu_4=0;$$

б) при $C=4$ — четыре целочисленных решений вида:

$$\nu_2=0,\ \nu_3=2,\ \nu_4=0;\ \nu_2=2,\ \nu_3=1,\ \nu_4=0;$$
$$\nu_2=1,\ \nu_3=0,\ \nu_4=1;\ \nu_2=4,\ \nu_3=0,\ \nu_4=0;$$

в) при $C=3$ — три целочисленных решений вида:

$$\nu_2=0,\ \nu_3=0,\ \nu_4=1;\ \nu_2=1,\ \nu_3=1,\ \nu_4=0;$$
$$\nu_2=3,\ \nu_3=0,\ \nu_4=0;$$

г) при $C=2$ — два целочисленных решений вида:

$$\nu_2=2,\ \nu_3=0,\ \nu_4=0; \nu_2=0,\ \nu_3=1,\ \nu_4=0$$

д) при $C=1$ — одно целочисленное решение вида:

$$\nu_2=1,\ \nu_3=0,\ \nu_4=0;$$

е) при $C=0$ — одно целочисленное решение вида:

$$\nu_2=0,\ \nu_3=0,\ \nu_4=0.$$

Полученное данным методом множество целочисленных решений (23 решения) линейного алгебраического уравнения (6) с тремя неизвестными при $K=4$ подтверждает метод определения числа решений по аналитической зависимости, представленный в данной работе выше.

Синтез и анализ возможных структур четырехконтурных механических систем. Структурный синтез разнообразных замкнутых механических систем с $K=4$ проводится на основе реализации всех полученных выше целочисленных решений (конечное множество которых $Z=23$ полностью согласуется с предварительным определением величины Z по теореме (4)). Результаты синтеза в виде 23 структурных схем четырехконтурных механических систем различного строения во всем диапазоне от $\nu=0$ до $\nu=C=6$ представлены на рис. 6.

Для объективной количественной оценки сложности строения синтезированных механических систем по предлагаемому геометрическому признаку введем новое понятие — *индекс сложности строения* J_ν, равный сумме вершин сложных звеньев (трехвершинных количеством n_3, четырехвершинных количеством n_4, пятивершинных количеством n_5 и т. д.), используемых для построения данной механической системы:

$$J_\nu = 3n_3 + 4n_4 + 5n_5 + \ldots + (K+1)n_{K+1}. \quad (10)$$

Применение формулы (10) для всех 23 вариантов строения синтезированных структур (см. рис. 6) дает следующие результаты:

$$J_{\nu=0}=14;\ J_{\nu=1}=13;\ J_{\nu=2}=12;\ J_{\nu=3}=9;$$
$$J_{\nu=4}=6;\ J_{\nu=5}=3;\ J_{\nu=6}=0$$

и позволяет выявить общую закономерность упрощения структуры механических систем (за счет снижения *геометрической* сложности составляющих ее звеньев) при переходе от нижней границы $\nu=0$ к верхней границе $\nu=C$ их строения с многократными связями.

Выводы

1. Установлено, что, описывающее строение узлов многоконтурных механических систем, линейное структурное уравнение механики (1) с несколькими неизвестными параметрами (ν_2, ν_3, ν_4) имеет конечное множество Z решений в целых числах ($Z=4$ — для двухконтурных систем, $Z=9$ — для трехконтурных систем, $Z=23$ — для четырехконтурных систем), которые могут быть практически реализованы в виде разнообразных структур разного технического назначения для разных областей техники (механизмы, фермы, замкнутые приводы роботов и манипуляторов).

2. В синтезированных на основе полученных 23 целочисленных решений разнообразных четырехконтурных механических системах посредством нового геометрического критерия *индекс сложности строения* J_ν выявлена общая закономерность конструктивного упрощения проектируемой системы (за счет снижения сложности составляющих систему многовершинных звеньев) при переходе от нижней гра-

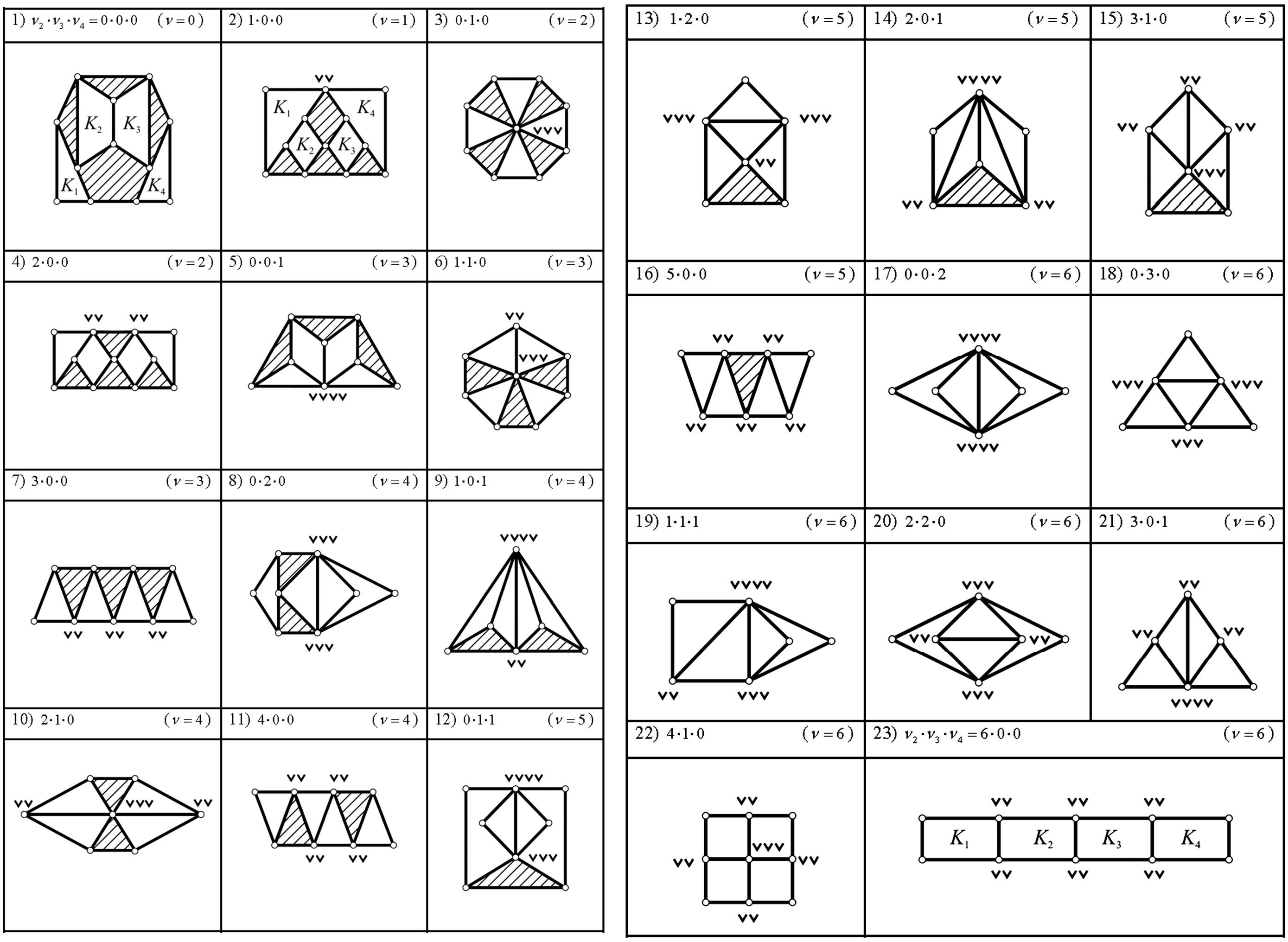

Рис. 6. Создание четырехконтурных ($K = 4$, $C = 2(K - 1) = 6$) замкнутых механических систем (на основе $Z = 23$ решений в целых числах структурного уравнения механики (6) в случае $C > K$)

ницы $\nu = 0$ ($J_{\nu=0} = 14$) к верхней границе $\nu = C = 6$ ($J_{\nu=6} = 0$) их строения, т. е. применения в разных областях техники различных более рациональных структур [2] с совмещенными шарнирами (см. рис. 6).

Литература

1. *Крайнев А.Ф.* Механика (искусство построения) машин. Фундаментальный словарь. М.: Машиностроение, 2000. 904 с.

2. *Пожбелко В.И.* Структурный анализ и синтез механизмов заданного уровня сложности по универсальной структурной таблице стандартных кодов строения // Теория механизмов и машин. 2012. Т. 10. № 1(19). С.24—45 (tmm.spbstu.ru).

3. *Глинка Н.Л.* Общая химия. Л.: Изд-во «Химия», 1986. 704 с.

4. *Крапивцев В.Г., Солонин В.И., Цирин С.И.* Организация конвективного переноса в пучке твэлов за сотовыми решетками для водо-водяных энергетических реакторов // Известия высших учебных заведений. Машиностроение. 2011. № 4. С. 7—12.

5. *Серпинский В.О.* О решении уравнений в целых числах; пер. с польс. М.: Изд-во физ-мат. литературы, 1961. 88 с.

6. *Гельфонд А.О.* Решение уравнений в целых числах. М.: Наука, 1983. 63 с.

7. Математический энциклопедический словарь / Гл. ред. Ю.В. Прохоров М.: Советская энциклопедия, 1988. 847 с.

References

1. Krainev A.F. *Mekhanika (iskusstvo postroeniia) mashin. Fundamental' slovar* [Mechanics (the art of building) machines. Fundamental words]. Moscow, Machine building publ., 2000. 904 p.

2. Pozhbelko V.I. Strukturnyi analiz i sintez mekhanizmov zadannogo urovnia slozhnosti po universal'n strukturnoi tablitse standartnykh kodov stroeniia [Structural analysis and synthesis of mechanisms for a given level of complexity in the structure of the universal standard code table structure]. *Teoriia mekhanizmov i mashin*, 2012, vol. 10, no. 1(19), pp.24—45. (tmm.spbstu.ru).

3. Glinka N.L. *Obshchaia khimiia* [General chemistry]. Lenigrad, Khimiia publ., 1986. 704 p.

4. Krapivtsev V.G., Solonin V.I., Tsirin S.I. Organizatsiia konvektivnogo perenosa v puchke tvelov za sotovymi reshetkami dlia vodo-vodianykh energeticheskikh reaktorov [Convective transfer organization (architecture) in a fuel rods bundle behind cell grids for VVER]. *Izvestiia vysshikh uchebnykh zavedenii. Mashinostroenie*. no 4, 2011, pp.7—12.
5. Serpinskii V.O. *O reshenii uravnenii v tselykh chislakh* [The solution of equations in integers]. Moscow, Physical matemticheskaya literature publ., 1961. 88 p.
6. Gel'fond A.O. *Reshenie uravnenii v tselykh chislakh* [The solution of equations in integers]. Moscow, Nauka publ., 1983. 63 p.
7. *Matematicheskii entsiklopedicheskii slovar* [Encyclopedic Dictionary of Mathematics] Moscow, On-Soviet Encyclopedia, 1988. 847 p.

Статья поступила в редакцию 27.10.2012

Информация об авторах

ПОЖБЕЛКО Владимир Иванович (Челябинск) — заслуженный работник высшей школы РФ, доктор технических наук, профессор Национального исследовательского университета. (Южно-Уральский государственный университет) (Россия, 454080, Челябинск, проспект им. В.И. Ленина, 76, e-mail: vipox@inbox.ru).

ЕРМОШИНА Екатерина Николаевна (Челябинск) — магистр прикладных математики и физики. Национального исследовательского университета (Южно-Уральский государственный университет)(Россия, 454080, Челябинск, проспект им. В.И. Ленина, 76, e-mail: ermoshina.ekaterina@rambler.ru).

Information about the authors

POZHBELKO Vladimir Ivanovich (Chelyabinsk) — Dr. Sc. Techn., Professor. South Ural State University (76, Lenina pr., Chelyabinsk, 454080, Russia, e-mail: vipox@inbox.ru).

ERMOSHINA Ekaterina Nikolaevna (Chelyabinsk) — Master of Applied Mathematics and Physics. South Ural State University (76, Lenina pr., Chelyabinsk, 454080, Russia, e-mail: ermoshina.ekaterina@rambler.ru).