



**СОРОКИНА**  
Анастасия Германовна  
старший преподаватель  
кафедры «Прикладная  
механика»  
(МГТУ им. Н.Э.Баумана)

## Расчет формы деформированной срединной поверхности геликоидально-симметричной оболочки открытого профиля при больших перемещениях на основе теории чистого изгиба

**А.Г. Сорокина**

*Из условия чистого изгиба срединной поверхности геликоидальной оболочки получены дифференциальные уравнения деформированного контура оболочки, интегрируемые в квадратурах. Приведены примеры аналитического и численного решения полученных уравнений с построением деформированной поверхности оболочки. Показано, что геометрию деформированной оболочки определяют всего два параметра.*

**Ключевые слова:** геликоидальная оболочка, чистое изгибание, большие перемещения.

*Differential equations of the deformed shell contour integrable in quadratures have been obtained under condition of pure bending of the helicoidal shell median surface. Examples of analytical and numerical solutions of the equations with construction of a deformed shell are given. It is shown that the geometry of the deformed shell is determined by only two parameters.*

**Keywords:** helicoidal shell, pure bending, large displacements.

Геликоидально-симметричные или винтовые оболочки (ГСО) применяют в качестве сильфонов (гибких шлангов, гофрированных труб), теплообменников, упругих элементов, шнеков, строительных конструкций. Множество приложений ГСО обусловлено их способностью преобразовывать одни виды нагрузок в другие (например, внутреннее давление в крутящий момент, крутящий момент в осевую силу и т. п.). Эта возможность используется в приборостроении [1, 2] и при конструировании некоторых исполнительных механизмов роботов [3].

Несмотря на широкое распространение ГСО методы анализа напряженно деформированного состояния таких оболочек разработаны недостаточно. Одна из причин этого состоит в сложности расчета ГСО. Геликоидальная симметрия приводит к уравнениям не намного более простым, чем для оболочек общего вида, что в корне отличает ее от осевой симметрии. Вероятно, этим можно объяснить сравнительно малое количество публикаций по рассматриваемой теме, особенно в части исследования больших перемещений таких оболочек.

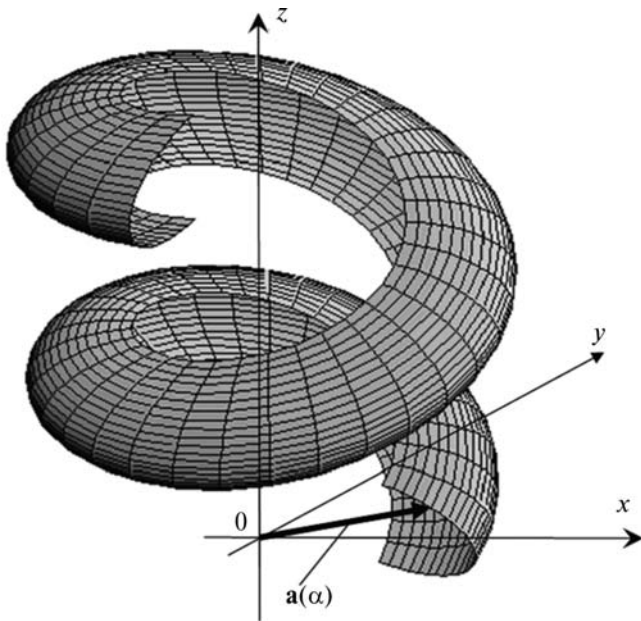


Рис. 1. ГСО открытого профиля

ГСО открытого профиля (образующий контур не замкнут) весьма податливы, что предопределяет их использование в качестве упругих элементов — пружин (рис. 1). При осевом сжатии ГСО открытого профиля ее крайние сечения не только сближаются, но и разворачиваются друг относительно друга. Этот эффект может быть использован для преобразования поступательного движения во вращательное в различных целях. В работах [4, 5] приведен пример расчета ленточной пружины, которую можно отнести к рассматриваемой разновидности ГСО.

Для ГСО с незамкнутым контуром (геликоидальные тонкостенные стержни открытого профиля) удастся построить сравнительно несложную приближенную методику расчета формы деформированной оболочки, основанную на предположении о нерастяжимости срединной поверхности (чистое изгибание). Построению такой методики посвящена данная статья.

Если оболочка плохо закреплена и имеет возможность деформироваться без растяжения и сдвигов срединной поверхности, то она будет деформироваться именно таким образом, так как это энергетически рационально. Такой вид деформации необходимо исследовать прежде всего. Учет растяжимости срединной поверхности может лишь незначительно уточнить общую картину деформирования.

Исходная срединная поверхность ГСО задается ее радиус-вектором в зависимости от Гауссовых координат:

$$\mathbf{r}(\alpha, z) = \mathbf{k}z + [\mathbf{L}(\omega z)]\mathbf{a}(\alpha), \quad (1)$$

где  $\mathbf{k}$  — орт оси  $z$ ;  $\omega = 2\pi/T$  — крутка винтовой поверхности в исходном состоянии;  $T$  — шаг винтовой поверхности;  $[\mathbf{L}(\omega z)]$  — матрица поворота вокруг оси  $z$  на угол  $\omega z$ ;  $\mathbf{a}(\alpha)$  — радиус-вектор образующего контура;  $\alpha$  — гауссова координата контура.

Для перехода к проекциям достаточно конкретизировать в формуле (1) выражение матрицы поворота и радиус-вектора контура:

$$[\mathbf{L}(\omega z)] = \begin{bmatrix} \cos(\omega z) & -\sin(\omega z) & 0 \\ \sin(\omega z) & \cos(\omega z) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad (2)$$

$$\mathbf{a}(\alpha) = \begin{bmatrix} a_x(\alpha) \\ a_y(\alpha) \\ a_z(\alpha) \end{bmatrix}. \quad (3)$$

Переход к проекциям в формуле (1) с учетом (2) и (3) приводит к трем скалярным выражениям:

$$\begin{aligned} r_x(\alpha, z) &= a_x(\alpha)\cos(\omega z) - a_y(\alpha)\sin(\omega z); \\ r_y(\alpha, z) &= a_x(\alpha)\sin(\omega z) + a_y(\alpha)\cos(\omega z); \\ r_z(\alpha, z) &= z + a_z(\alpha). \end{aligned} \quad (4)$$

В деформированном состоянии геликоидальная симметрия сохраняется, однако, оболочка может изменить шаг (растянуться вдоль оси  $z$ ), а контур деформироваться и повернуться на дополнительный угол

$$\mathbf{r}^+(\alpha, z) = \mathbf{k}(1 + \varepsilon)z + [\mathbf{L}(\omega^+ z)]\mathbf{a}^+(\alpha), \quad (5)$$

где индекс «+» обозначает величины в деформированном состоянии;  $\varepsilon$  — осевая деформация всей оболочки в целом.

Переход к проекциям в формуле (5) приводит к трем скалярным выражениям, аналогичным (4):

$$\begin{aligned} r_x^+(\alpha, z) &= a_x^+(\alpha)\cos(\omega^+ z) - a_y^+(\alpha)\sin(\omega^+ z); \\ r_y^+(\alpha, z) &= a_x^+(\alpha)\sin(\omega^+ z) + a_y^+(\alpha)\cos(\omega^+ z); \\ r_z^+(\alpha, z) &= (1 + \varepsilon)z + a_z^+(\alpha). \end{aligned} \quad (6)$$

Согласно работе [4], параметры Ламе вычисляют по следующим формулам:

$$\begin{aligned}
 A &= \sqrt{\left(\frac{\partial r_x}{\partial \alpha}\right)^2 + \left(\frac{\partial r_y}{\partial \alpha}\right)^2 + \left(\frac{\partial r_z}{\partial \alpha}\right)^2}; \\
 B &= \sqrt{\left(\frac{\partial r_x}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial r_y}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial r_z}{\partial z}\right)^2}; \\
 AB \cos \chi &= \frac{\partial r_x}{\partial \alpha} \frac{\partial r_x}{\partial z} + \frac{\partial r_y}{\partial \alpha} \frac{\partial r_y}{\partial z} + \frac{\partial r_z}{\partial \alpha} \frac{\partial r_z}{\partial z}.
 \end{aligned}
 \tag{7}$$

Подставив формулы (4) в (7), получим

$$\begin{aligned}
 A &= \sqrt{(a'_x)^2 + (a'_y)^2 + (a'_z)^2}; \\
 B &= \sqrt{\omega^2(a_x^2 + a_y^2) + 1}; \\
 AB \cos \chi &= \omega(a'_y a_x - a'_x a_y) + a'_z,
 \end{aligned}
 \tag{8}$$

где индексом «'» обозначено дифференцирование по  $\alpha$ .

Все величины формул (8) не содержат координаты  $z$ , т. е. являются функциями только контурной координаты  $\alpha$ .

Для деформированной поверхности справедливы аналогичные формулы:

$$\begin{aligned}
 A^+ &= \sqrt{((a_x^+)' )^2 + ((a_y^+)' )^2 + ((a_z^+)' )^2}; \\
 B^+ &= \sqrt{(\omega^+ a_x^+)^2 + (\omega^+ a_y^+)^2 + (1 + \varepsilon)^2}; \\
 (AB \cos \chi)^+ &= \omega^+ ((a_y^+)' a_x^+ - (a_x^+)' a_y^+) + \\
 &\quad + (1 + \varepsilon)(a_z^+)' .
 \end{aligned}
 \tag{9}$$

Нерастяжимость срединной поверхности означает, что параметры Ламе поверхности не меняются при деформировании, т. е.

$$\begin{aligned}
 A^+ &= A; \\
 B^+ &= B; \\
 (AB \cos \chi)^+ &= AB \cos \chi.
 \end{aligned}
 \tag{10}$$

С учетом формул (9) это дает три нелинейных уравнения, определяющих геометрию деформированного контура:

$$\begin{aligned}
 (\omega^+ a_x^+)^2 + (\omega^+ a_y^+)^2 + (1 + \varepsilon)^2 &= \\
 &= (\omega a_x)^2 + (\omega a_y)^2 + 1; \\
 ((a_x^+)' )^2 + ((a_y^+)' )^2 + ((a_z^+)' )^2 &= \\
 &= (a'_x)^2 + (a'_y)^2 + (a'_z)^2; \\
 \omega^+ ((a_y^+)' a_x^+ - (a_x^+)' a_y^+) + (1 + \varepsilon)(a_z^+)' &= \\
 &= \omega((a_y)' a_x - (a_x)' a_y) + (a_z)' .
 \end{aligned}
 \tag{11}$$

В общем случае решить уравнения (11) можно только численно. Но даже на этом пути существуют трудности: первое уравнение (11) является алгебраическим, второе и третье — дифференциальными. Это обстоятельство не позволяет выразить явно все производные величин  $a_x^+$ ,  $a_y^+$ ,  $a_z^+$ , т. е. (11) не удастся записать в форме Коши, необходимой для численного интегрирования. Система содержит три неизвестных функции, а порядок ее только второй. Для решения этой системы выполняют замену переменных:

$$\begin{aligned}
 a_x^+(\alpha) &= \rho(\alpha) \cos(\theta(\alpha)); \\
 a_y^+(\alpha) &= \rho(\alpha) \sin(\theta(\alpha)).
 \end{aligned}
 \tag{12}$$

Новые переменные  $\rho$  и  $\theta$  имеют смысл полярного радиуса и полярного угла деформированного контура. После подстановки (12) с учетом

$$\begin{aligned}
 (a_x^+)' &= \rho' \cos \theta - \rho \theta' \sin \theta; \\
 (a_y^+)' &= \rho' \sin \theta + \rho \theta' \cos \theta
 \end{aligned}
 \tag{13}$$

система (11) принимает следующий вид:

$$\begin{aligned}
 \rho &= \frac{1}{\omega^+} \sqrt{(\omega a_x)^2 + (\omega a_y)^2 + 1 - (1 + \varepsilon)^2}; \\
 (\rho')^2 + (\rho \theta')^2 + ((a_z^+)' )^2 &= \\
 &= (a'_x)^2 + (a'_y)^2 + (a'_z)^2; \\
 \omega^+ (\rho^2 \theta') + (1 + \varepsilon)(a_z^+)' &= \\
 &= \omega((a_y)' a_x - (a_x)' a_y) + (a_z)' .
 \end{aligned}
 \tag{14}$$

Первое уравнение (14) является алгебраическим и полностью определяет функцию  $\rho(\alpha)$ .

Второе и третье уравнения (14) представляют собой систему дифференциальных уравнений 2-го порядка для определения неизвестных  $a_z^+$  и  $\theta$ . Существенно, что искомые неизвестные входят в (14) только под знаком производной. Это значит что решение системы (14) сводится к определению квадратур. Производные искомых неизвестных удастся выразить явно, выполнив следующую цепочку преобразований. Сначала система упрощается введением вспомогательных величин  $f_0, f_1$ :

$$\begin{aligned} (\rho\theta)^2 + ((a_z^+)^{\prime})^2 &= f_0(\alpha); \\ (a_z^+)^{\prime} &= -\frac{\omega^+\rho^2}{(1+\varepsilon)}\theta + f_1(\alpha), \end{aligned} \quad (15)$$

где

$$\begin{aligned} f_0(\alpha) &= (a_x^{\prime})^2 + (a_y^{\prime})^2 + (a_z^{\prime})^2 - (\rho^{\prime})^2; \\ f_1(\alpha) &= \frac{1}{(1+\varepsilon)} \left[ \omega((a_y)^{\prime}a_x - (a_x)^{\prime}a_y) + (a_z)^{\prime} \right]; \\ \rho^{\prime} &= \left( \frac{\omega}{\omega^+} \right)^2 \frac{a_x a_x^{\prime} + a_y a_y^{\prime}}{\rho}. \end{aligned} \quad (16)$$

Исключение из выражений (15) величины  $a_z^+$  приводит к квадратному уравнению для  $\theta^{\prime}$ :

$$\begin{aligned} \left[ \rho^2 + \frac{(\omega^+)^2 \rho^4}{(1+\varepsilon)^2} \right] (\theta^{\prime})^2 - \\ - 2 \frac{\omega^+ \rho^2}{(1+\varepsilon)} f_1(\alpha) \theta^{\prime} + f_1^2(\alpha) = f_0(\alpha) \end{aligned} \quad (17)$$

или

$$\begin{aligned} (\theta^{\prime})^2 - 2 \frac{\omega^+(1+\varepsilon)f_1(\alpha)}{(1+\varepsilon)^2 + (\omega^+\rho)^2} \theta^{\prime} - \\ - \frac{(1+\varepsilon)^2 (f_0(\alpha) - f_1^2(\alpha))}{\rho^2 ((1+\varepsilon)^2 + (\omega^+\rho)^2)} = 0. \end{aligned} \quad (18)$$

Решение квадратного уравнения дает явное выражение для  $\theta^{\prime}$ :

$$\frac{d\theta}{d\alpha} = f_2(\alpha), \quad (19)$$

где

$$\begin{aligned} f_2(\alpha) &= \frac{\omega^+(1+\varepsilon)f_1(\alpha)}{(1+\varepsilon)^2 + (\omega^+\rho)^2} \pm \\ &\pm \sqrt{\left( \frac{\omega^+(1+\varepsilon)f_1(\alpha)}{(1+\varepsilon)^2 + (\omega^+\rho)^2} \right)^2 + \frac{(1+\varepsilon)^2 (f_0(\alpha) - f_1^2(\alpha))}{\rho^2 ((1+\varepsilon)^2 + (\omega^+\rho)^2)}}. \end{aligned} \quad (20)$$

Знак перед квадратным корнем в формуле (20) выбирают тот, при котором подстановка  $\omega^+ = \omega, \varepsilon = 0$  приводит к исходной геометрии.

Таким образом, решение системы (11) действительно свелось к вычислению квадратур

$$\begin{aligned} \theta &= \int f_2(\alpha) d\alpha + C_1; \\ a_z^+ &= \int \left( -\frac{\omega^+\rho^2}{(1+\varepsilon)} f_2(\alpha) + f_1(\alpha) \right) d\alpha + C_2. \end{aligned} \quad (21)$$

Постоянные интегрирования в формулах (21) имеют смысл жестких смещений ( $C_1$  — жесткий поворот вокруг оси,  $C_2$  — жесткое смещение вдоль оси), поэтому без ограничения общности эти постоянные можно отбросить, либо выбрать из соображения удобства. Из представленных выкладок следует, что геометрия деформированной геликоидальной оболочки с нерастяжимой срединной поверхностью полностью определяется двумя параметрами — круткой  $\omega^+$  и деформацией оси  $\varepsilon$ .

Разработанная методика контролировалась на рассмотренном в работе [5] частном случае ленточной пружины. Согласно [5], цилиндрическая ленточная пружина остается цилиндрической при растяжении и кручении, если не учитывать краевые эффекты у винтовых кромок. Образующей такой пружины является прямая линия, параллельная оси  $z$ :

$$\begin{cases} a_x = R; \\ a_y = 0; \\ a_z = -\alpha; \end{cases} \quad (22) \\ 0 \leq \alpha \leq 1,2R.$$

Примем, что значения крутки в исходном и деформированном состоянии и деформация оси составляют:

$$\begin{aligned} \omega &= 2 / R; \\ \omega^+ &= 4 / R; \\ \varepsilon &= 0,5, \end{aligned} \quad (23)$$

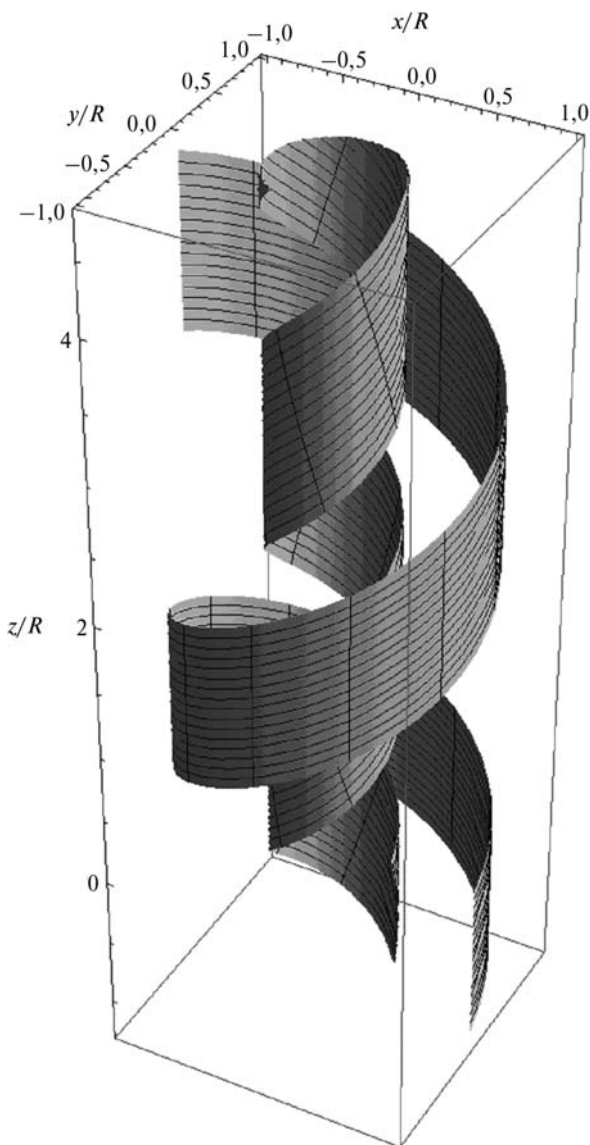


Рис. 2. Срединная поверхность ленточной пружины в исходном и деформированном состоянии

т. е., оболочка закрутилась вдоль оси, так что крутка возросла в 2 раза и, кроме того, растянулась вдоль оси  $z$  в 1,5 раза.

Подстановка формулы (22), (23) в (16)–(21) дает выражения координат контура срединной поверхности деформированной оболочки в замкнутом виде:

$$\begin{cases} a_x^+(\alpha) = 0,414578R \cos\left(\frac{0,647254\alpha}{R}\right); \\ a_y^+(\alpha) = 0,414578R \sin\left(\frac{0,647254\alpha}{R}\right); \\ a_z^+(\alpha) = -0,963325\alpha. \end{cases} \quad (24)$$

При этом перед радикалом в (20) поставлен знак «+». Из выражений (24) видно, что при деформациях контур превратился в винтовую линию, лежащую на цилиндре радиуса  $\rho = 0,414578 \cdot R$ . Исходная и деформированная поверхности с контурами (22) и (24) показаны на рис. 2. Интересно отметить, что смена знака в последней формуле (22)  $a_z = +\alpha$  приводит к необходимости поставить перед радикалом в (20) знак «-» иначе при  $\omega^+ = \omega$ ,  $\varepsilon = 0$  не получается исходная поверхность.

Рассмотренный случай ленточной пружины, для которого интегралы в формулах (21) удалось вычислить аналитически, является исключительным. Как правило, указанные интегралы приходится определять численно. Ниже приведен пример именно такой ГСО.

Образующий контур (половина окружности, лежащая в плоскости  $xOz$ ) задается уравнениями

$$\begin{cases} a_x(\alpha) = R + r_0 \sin \alpha; \\ a_y(\alpha) = 0; \\ a_z(\alpha) = r_0(1 - \cos \alpha), \end{cases} \quad (25)$$

где  $r_0 = 0,6R$  — радиус окружности.

Проверка на реализацию начального состояния при  $\omega^+ = \omega$ ,  $\varepsilon = 0$  показывает, что перед радикалом в формулах (20) необходимо ставить знак «-». Параметры кинематического нагружения задавались по (23). Вычисление квадратур (21) было заменено на математически равноценную операцию численного интегрирования дифференциальных уравнений (26) с нулевыми граничными условиями  $\theta(0)=0$ ,  $a_z^+(0) = 0$ :

$$\begin{cases} \frac{d\theta}{d\alpha} = f_2(\alpha); \\ \frac{da_z^+}{d\alpha} = f_1(\alpha) - \frac{\omega^+ \rho^2}{(1+\varepsilon)} f_2(\alpha). \end{cases} \quad (26)$$

Для численного интегрирования уравнений (26) применялась процедура NDSolve из пакета Mathematica. Форма исходной и деформированной оболочки показаны на рис. 3. На том же рисунке изображен исходный контур оболочки и проекция деформированного контура

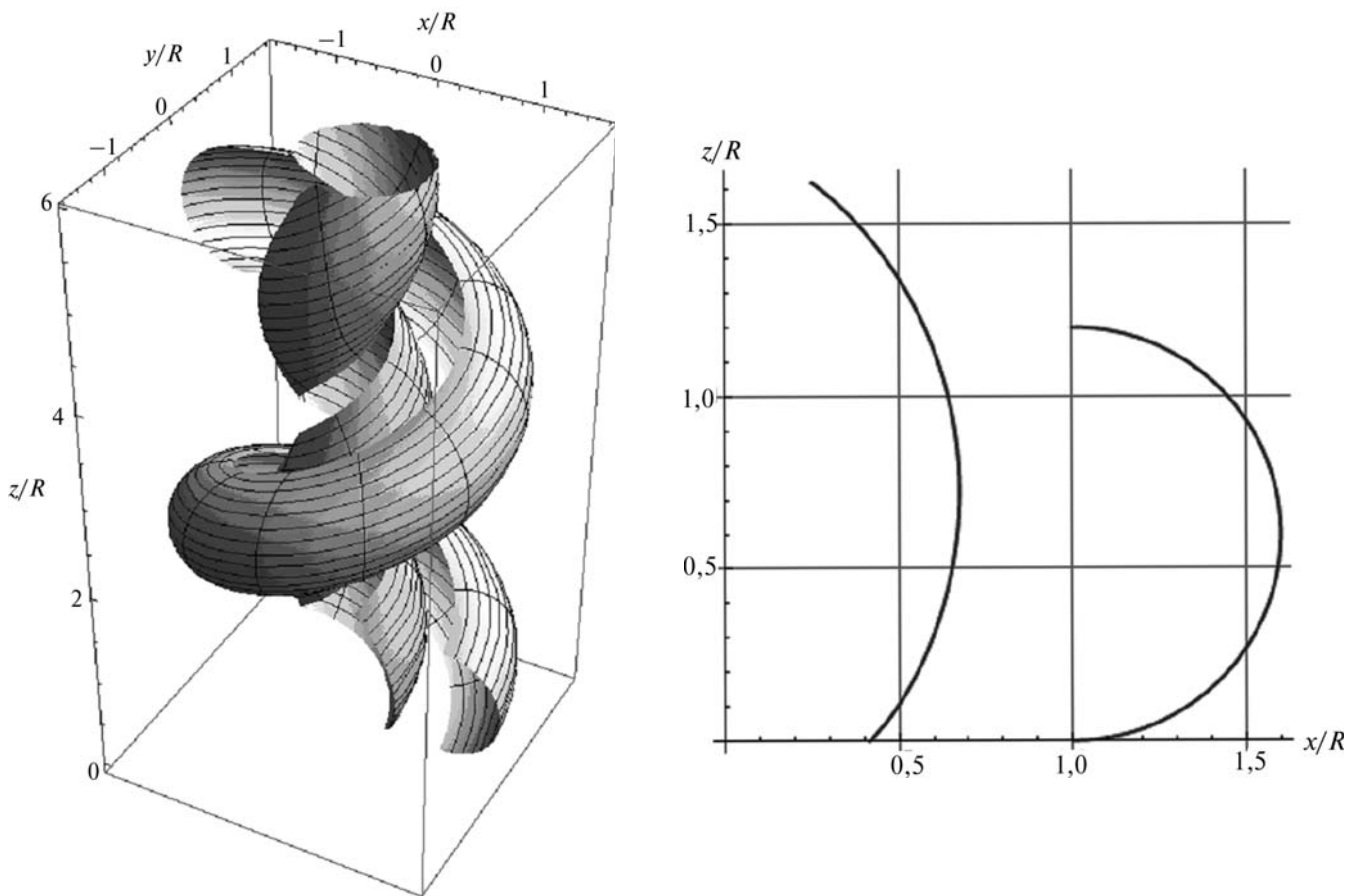


Рис. 3. Форма срединной поверхности и проекция ее контура на плоскость  $xOz$  в исходном и деформированном состоянии ГСО

на плоскость  $xOz$ . На рисунке видно, что контур оболочки заметно искажается (разгибается) при закручивании оболочки.

### Выводы

1. Форма деформированной срединной поверхности ГСО определяется всего двумя параметрами — круткой  $\omega^+$  и осевой деформацией  $\varepsilon$ .
2. Расчет деформированного контура сводится к вычислению квадратур (21) либо к численному интегрированию двух независимых дифференциальных уравнений 1-го порядка (26).
3. Приведенные примеры с аналитическим и численным расчетом координат деформиро-

ванного контура ГСО свидетельствуют о сравнительной простоте разработанной методики.

### Литература

1. Андреева Л.Е. Упругие элементы приборов. М.: Машиностроение, 1981. 392 с.
2. Пономарев С.Д., Андреева Л.Е. Расчет упругих элементов машин и приборов. М.: Машиностроение, 1980. 326 с.
3. Александрова А.Т. Новые способы передачи и формирования движения в вакууме. М.: Высшая школа, 1979. 69 с.
4. Бидерман В.Л. Механика тонкостенных конструкций. Статика. М.: Машиностроение, 1977. 488 с.
5. Бидерман В.Л., Шитиков В.Н. Растяжение и кручение ленточных цилиндрических пружин при больших перемещениях // Изв. АН СССР. МТТ. 1970. № 1. С. 137—141.

Статья поступила в редакцию 30.10.2011 г.