

УДК 621.833

doi: 10.18698/0536-1044-2020-12-34-39

# Влияние параметров исходного контура на коэффициент перекрытия эвольвентных передач

**Б.П. Тимофеев, Минь Хуан Чан**

Университет ИТМО

## The Influence of the Initial Contour Parameters on the Contact Ratio of Involute Gearing

**B.P. Timofeev, Minh Huan Tran**

ITMO University

Ранее ГОСТ 13755–81 предусматривал единый стандартный исходный контур — профиль зубьев инструментальной рейки. Для формообразования зубьев эвольвентных колес в основном применяли метод обкатки — огибания семейства поверхностей инструментом. Эффективность такой стандартизации многократно возросла вследствие широкого использования крупносерийного и массового производства. Изменение характера и технологии производства привели к существенному расширению набора возможных стандартных исходных контуров и их параметров. Во многих случаях предприятия-изготовители отказываются как от метода огибания, так и от эвольвентного зацепления. Однако параметры контура по-прежнему лежат в основе государственного стандарта «Передачи цилиндрические эвольвентные внешнего зацепления. Расчет геометрии». Таким образом, даже при полном отказе от применения исходного контура его влияние на качество зацепления (в частности на коэффициент перекрытия передачи) остается неизменным. Коэффициент торцового перекрытия — это отношение длины участка зацепления к шагу по нормали, равному таковому по основной окружности. Получены зависимости коэффициента торцового перекрытия от числа зубьев шестерни, передаточного числа, угла профиля исходного контура и коэффициента высоты головки зуба. Результаты исследования позволяют выбрать параметры исходного контура, обеспечивающие необходимый коэффициент торцового перекрытия. При этом необязательно использовать методы огибания и исходного контура (инструментальной рейки). Установлено, что оптимальный коэффициент торцового перекрытия равен двум. Однако чтобы создать необходимый запас для компенсации погрешностей изготовления и сборки, следует выбирать такие значения числа зубьев шестерни, передаточного числа, угла профиля исходного контура и коэффициента высоты головки зуба, которые бы обеспечивали коэффициент торцового перекрытия, несколько превышающий указанное значение.

**Ключевые слова:** исходный контур, основные параметры, эвольвентная передача, коэффициент торцового перекрытия

Previously, GOST 13755–81 specified a unified standard initial contour, i.e. the tool rack teeth profile. The rolling method was dominant; a family of surfaces was enveloped by tools in the process of form-generation of involute gears. The effectiveness of such standardization was enhanced by the widespread large-scale and mass production. Recently, changes in the nature and technology of production have led to a significant expansion of possible standard initial contours and their parameters. In many cases, manufacturers reject the enveloping method as well as the involute engagement in general. However, the contour parameters are still the foundation of the standard *Cylindrical Involute External Gearing*. Cal-

*culation of Geometry.* Thus, even with the complete rejection of the initial contour, its effect on the gearing quality, namely on the contact ratio, remains unchanged. The transverse contact ratio is the ratio of the length of the engagement line segment to the normal pitch equal to the pitch of the base circumference of the pinion. In this study, dependencies of the transverse contact ratio on the number of pinion teeth, speed ratio, pressure angle and addendum coefficient are obtained. The results obtained can be used to select the initial contour parameters that provide the required transverse contact ratio, making the enveloping method and the initial contour (tool rack) redundant. It is established that the optimum transverse contact ratio equals 2. However, to compensate for manufacturing and assembly errors, the values of the number of pinion teeth, speed ratio, pressure angle and addendum coefficient should be selected so as to slightly exceed the above-mentioned transverse contact ratio.

**Keywords:** initial contour, basic parameters, involute gear, transverse contact ratio

Ранее для ограничения числа типоразмеров режущего и измерительного инструмента ГОСТ 13755–81 [1] предусматривал один стандартный исходный контур — профиль зубьев инструментальной рейки. Кроме того, задавался набор параметров модификации этого контура. Применялся метод огибания (обкатки) поверхностей инструментом в процессе формообразования зубьев эвольвентных колес.

При зубофрезеровании происходит двухпараметрическое огибание поверхностей инструмента. Профиль инструментальной рейки — прямолинейный, так как прямая — вырожденная эвольвента. В настоящее время норматив-

ные документы [2, 3] предусматривают несколько стандартных контуров, различающихся значениями основных параметров. Кроме того, предполагается, что изготовитель свободен в выборе параметров модификации профиля и руководствуется только практическими рекомендациями.

Развитие технологии зубоформирования (особенно методов копирования и сканирования) существенно ограничило применение исходного контура, но его параметры по-прежнему лежат в основе государственного стандарта [4]. Таким образом, даже при полном отказе от использования исходного контура

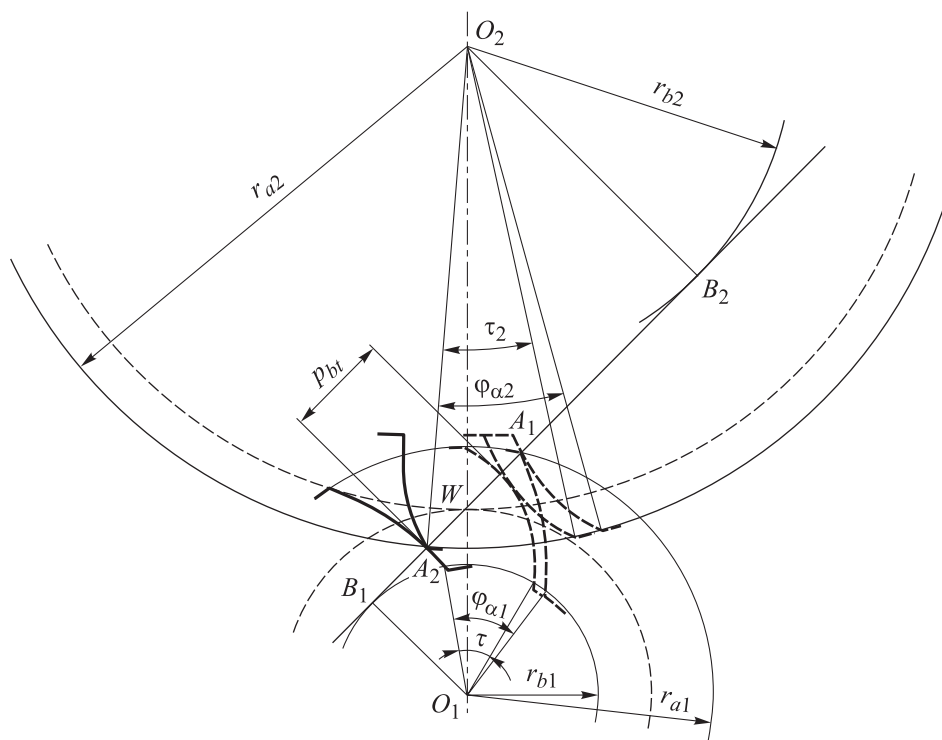


Рис. 1. Схема для определения коэффициента торцового перекрытия:  
 $O_1$  и  $O_2$  — оси шестерни и колеса

характер влияния его параметров на качество зацепления (в частности на коэффициент перекрытия передачи) остается неизменным.

Цель работы — показать возможности повышения коэффициента торцового перекрытия прямозубых эвольвентных цилиндрических передач внешнего зацепления при применении исходных контуров с различными значениями угла исходного профиля  $\alpha$ , коэффициента высоты головки зуба  $h_a^*$  с варьированием числа зубьев шестерни  $Z_1$  и передаточного числа  $u$ .

Известно, что зарубежные авторы используют термины «коэффициент контакта» (contact ratio) или «количество пар зубьев в контакте» (number of pairs of teeth in contact) [5–9], что, как и коэффициент торцового перекрытия в отечественной научно-технической литературе, соответствует отношению активного участка линии зацепления  $A_1A_2$  (рис. 1) к шагу по нормали  $p_{bt}$ , равному наружному шагу по основной окружности  $p_{bt}$ .

### Расчет коэффициента торцового перекрытия.

Рассмотрим определение коэффициента торцового перекрытия (см. рис. 1) при вращении шестерни по часовой стрелке. Контакт между парой шестерня — колесо начнется в точке  $A_2$  и закончится в точке  $A_1$ . Последняя является точкой пересечения окружности вершин зубьев шестерни радиусом  $r_{a1}$  с общей касательной к основным окружностям радиусами  $r_{b1}$  и  $r_{b2}$  (с линией зацепления). Соответственно  $A_2$  — точка пересечения окружности вершин зубьев колеса радиусом  $r_{a2}$  с общей касательной к основным окружностям.

Коэффициент торцового перекрытия

$$\varepsilon_\alpha = \frac{A_1A_2}{p_{bt}} = \frac{\varphi_{\alpha 1}}{\tau_1} = \frac{\varphi_{\alpha 2}}{\tau_2} = \frac{A_1A_2}{\pi m \cos \alpha},$$

где  $\varphi_{\alpha 1}$  и  $\varphi_{\alpha 2}$  — угол торцового перекрытия шестерни и колеса;  $\tau_1$  и  $\tau_2$  — угловой шаг зубьев шестерни и колеса;  $m$  — модуль.

Длина активного участка линии зацепления

$$\begin{aligned} A_1A_2 &= A_1W + WA_2 = \\ &= (A_1B_1 - WB_1) + (A_2B_2 - WB_2) = \\ &= \sqrt{r_{a1}^2 - (r_1 \cos \alpha)^2} + \sqrt{r_{a2}^2 - (r_2 \cos \alpha)^2} - \\ &\quad - (r_{a1} + r_{a2}) \sin \alpha, \end{aligned}$$

где  $r_1$  и  $r_2$  — делительный радиус шестерни и колеса.

Отсюда

$$\varepsilon_\alpha = \frac{1}{\pi m \cos \alpha} \left[ \sqrt{r_{a1}^2 - (r_1 \cos \alpha)^2} + \sqrt{r_{a2}^2 - (r_2 \cos \alpha)^2} - (r_{a1} + r_{a2}) \sin \alpha \right].$$

С учетом того, что  $r_{ai} = r_i + mh_a^* = m(Z_i/2 + h_a^*)$ , где  $i = 1, 2$ , имеем

$$\begin{aligned} \varepsilon_\alpha &= \frac{1}{\pi \cos \alpha} \left[ \sqrt{\left(\frac{Z_1}{2} + h_a^*\right)^2 - \left(\frac{Z_1}{2} \cos \alpha\right)^2} + \right. \\ &\quad \left. + \sqrt{\left(\frac{Z_2}{2} + h_a^*\right)^2 - \left(\frac{Z_2}{2} \cos \alpha\right)^2} - \right. \\ &\quad \left. - \left(\frac{Z_1 + Z_2}{2} + 2h_a^*\right) \sin \alpha \right] = \\ &= \frac{1}{\pi \cos \alpha} \left[ \sqrt{\left(\frac{Z_1}{2} + h_a^*\right)^2 - \left(\frac{Z_1}{2} \cos \alpha\right)^2} + \right. \\ &\quad \left. + \sqrt{\left(\frac{Z_1 u}{2} + h_a^*\right)^2 - \left(\frac{Z_1 u}{2} \cos \alpha\right)^2} - \right. \\ &\quad \left. - \left(\frac{Z_1(1+u)}{2} + 2h_a^*\right) \sin \alpha \right]. \end{aligned}$$

Таким образом, получена зависимость коэффициента торцового перекрытия  $\varepsilon_\alpha$  от числа зубьев шестерни  $Z_1$ , передаточного числа  $u$  и угла профиля исходного контура  $\alpha$ .

Рассмотрим изменение коэффициента торцового перекрытия  $\varepsilon_\alpha$  при двух значениях угла профиля исходного контура  $\alpha = 20^\circ$  и  $\alpha = 14^\circ 30'$  (которые приняты во многих зарубежных стандартах) и трех значениях коэффициента высоты головки зуба  $h_a^* = 1,0$  (нормальный зуб),  $h_a^* = 0,8$  (укороченный зуб) и  $h_a^* = 1,2$  (увеличенная высота зуба рекомендована, в частности, в работе [10]).

Кроме параметров исходного контура можно варьировать число зубьев шестерни  $Z_1$ , также существенно влияющее на коэффициент торцового перекрытия. Величина  $Z_1$  в передачах с эвольвентным зацеплением изменяется в широких пределах от  $Z_1 = 9$  (но встречаются передачи, у которых  $Z_1 < 9$ ) до  $Z_1 = 70$ .

Согласно рекомендациям [11–14], передаточное число варьировали в диапазоне  $u = 1 \dots 8$  с шагом 0,5. Безусловно, расчеты, проведенные, например для  $Z_1 = 70$  и  $u = 8$ , имеют чисто теоретические значения и приведены для полноты картины.

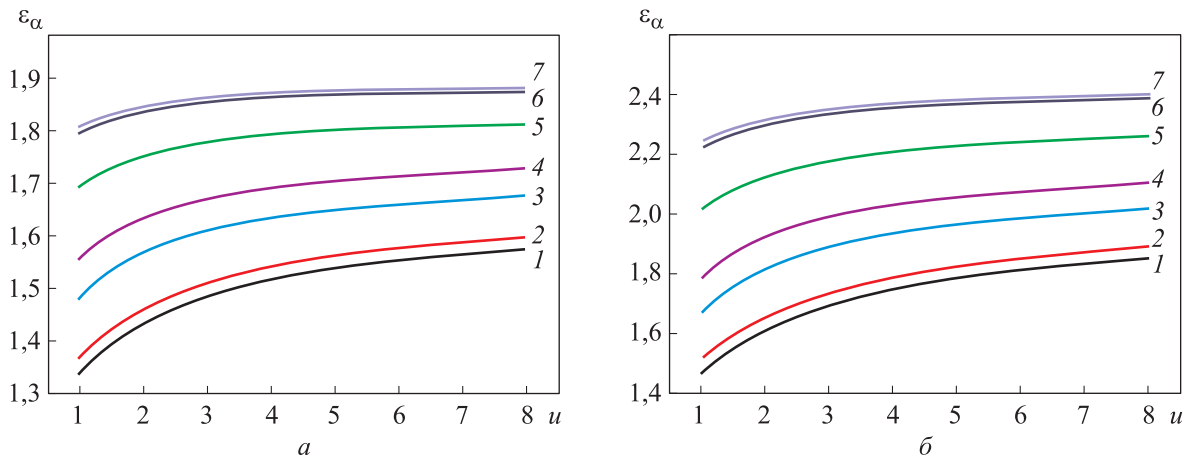


Рис. 2. Зависимости коэффициента торцового перекрытия  $\epsilon_\alpha$  от передаточного числа  $u$  при угле профиля исходного контура  $\alpha = 20^\circ$  (а) и  $14^\circ30'$  (б), коэффициенте высоты головки зуба  $h_a^* = 1,0$  и различных значениях числа зубьев шестерни:  
 1 —  $Z_1 = 9$ ; 2 —  $Z_1 = 10$ ; 3 —  $Z_1 = 15$ ; 4 —  $Z_1 = 20$ ; 5 —  $Z_1 = 36$ ; 6 — 65; 7 —  $Z_1 = 70$

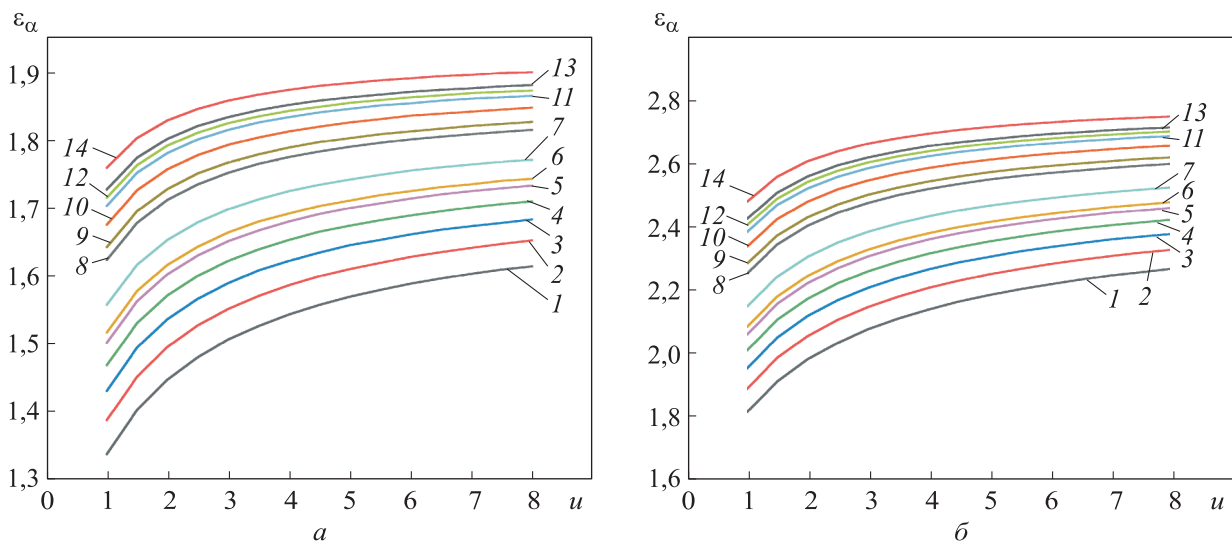


Рис. 3. Зависимости коэффициента торцового перекрытия  $\epsilon_\alpha$  от передаточного числа  $u$  при угле профиля исходного контура  $\alpha = 14^\circ30'$ , коэффициенте высоты головки зуба  $h_a^* = 0,8$  (а) и  $1,2$  (б) и различных значениях числа зубьев шестерни:  
 1 —  $Z_1 = 12$ ; 2 —  $Z_1 = 14$ ; 3 —  $Z_1 = 16$ ; 4 —  $Z_1 = 18$ ; 5 —  $Z_1 = 20$ ; 6 —  $Z_1 = 21$ ; 7 —  $Z_1 = 24$ ; 8 —  $Z_1 = 30$ ;  
 9 —  $Z_1 = 32$ ; 10 —  $Z_1 = 36$ ; 11 —  $Z_1 = 40$ ; 12 —  $Z_1 = 42$ ; 13 —  $Z_1 = 44$ ; 14 —  $Z_1 = 50$

По результатам расчетов построены графические зависимости коэффициента торцового перекрытия  $\epsilon_\alpha$  от передаточного числа  $u$  при различных значениях угла профиля исходного контура, коэффициента высоты головки зуба и числа зубьев шестерни:

- при  $\alpha = 20^\circ$ ,  $h_a^* = 1,0$  и  $Z_1 = 9, 10, 15, 20, 36, 65$  и  $70$  (рис. 2, а);
- при  $\alpha = 14^\circ30'$ ,  $h_a^* = 1,0$ , и  $Z_1 = 9, 10, 15, 20, 36, 65$  и  $70$  (рис. 2, б);
- при  $\alpha = 14^\circ30'$ ,  $h_a^* = 0,8$  и  $Z_1 = 12, 14, 16, 18, 20, 21, 24, 30, 32, 36, 40, 42, 44$  и  $50$  (рис. 3, а);

- при  $\alpha = 14^\circ30'$ ,  $h_a^* = 1,2$  и  $Z_1 = 12, 14, 16, 18, 20, 21, 24, 30, 32, 36, 40, 42, 44$  и  $50$  (рис. 3, б).

### Выводы

1. Установлено, что коэффициент торцового перекрытия закономерно растет с ростом передаточного числа и числа зубьев шестерни.
2. Определено, что для функционирования прямозубой эвольвентной цилиндрической передачи коэффициент торцового перекрытия должен находиться в диапазоне  $1 \leq \epsilon_\alpha < 2$ . При

$\epsilon_\alpha < 1$  передача работает прерывисто, т. е. она непригодна. При изменении в указанном диапазоне за время поворота на угловой шаг дважды происходит удар — при переходе от двухпарного зацепления к однопарному и наоборот — из-за скачка изгибной жесткости. При этом возникают возмущения с частотой вдвое большей частоты входа зубьев в зацепление, что существенно влияет на плавность работы. Как и в государственном стандарте [15], в инженерной практике нормированы лишь погрешности оборотной и зубцовой частот, т. е. частоты входа зубьев в зацепление.

3. Выявлено, что оптимальный коэффициент торцового перекрытия равен двум. Однако

чтобы создать необходимый запас для компенсации погрешностей изготовления и сборки, коэффициент торцового перекрытия должен несколько превышать указанное значение. Для угла профиля исходного контура  $\alpha = 14^\circ 30'$  эта цель достигается при числе зубьев шестерни  $Z_1 \geq 21$  и передаточном числе  $u \geq 3$ , а также при  $Z_1 \geq 24$  и  $u \geq 2,5$ .

4. Показано, что рост коэффициента торцового перекрытия с увеличением коэффициента высоты головки зуба закономерен. Практически при всех значениях передаточного числа и числе зубьев шестерни  $Z_1 \geq 16$  коэффициент торцового перекрытия  $\epsilon_\alpha \approx 2$ .

## Литература

- [1] ГОСТ 13755–81. *Передачи зубчатые цилиндрические эвольвентные. Исходный контур*. Москва, Изд-во стандартов, 1981. 7 с.
- [2] ГОСТ 13755–2015. *Передачи зубчатые цилиндрические эвольвентные. Исходные контуры*. Москва, Стандартиформ, 2016. 15 с.
- [3] ISO 53:1998. *Cylindrical gears for general and heavy engineering — Standard basic rack tooth profile*. Switzerland, 1998. 10 p.
- [4] ГОСТ 16532–70. *Передачи зубчатые цилиндрические эвольвентные внешнего зацепления. Расчет геометрии*. Москва, Изд-во стандартов, 1983. 43 с.
- [5] Khurmi R., Gupta J.K. *Theory of Machines*. S. Chand & Co. Ltd., New Dehli, 2005. 1071 p.
- [6] Jelaska D. *Gears and Gear Drives*. A John Wiley & Sons Ltd., 2012. 462 p.
- [7] Linke H., Börner J., Heß R. *Cylindrical Gears, Calculation – Materials – Manufacturing*. Hanser Publications, 2016. 854 p.
- [8] Colbourne J.R. *The Geometry of Involute Gears*. New York, Springer-Verlag Inc., 1987. 538 p.
- [9] Radzevich S.P. *Theory of Gearing. Kinematics, Geometry, and Synthesis*. CRC Press, 2018. 935 p.
- [10] Вулгаков Э.Б. *Авиационные зубчатые передачи и редукторы*. Москва, Машиностроение, 1981. 374 с.
- [11] Кудрявцев В.Н., Кузьмин И.С., Филипенков А.Л. *Расчет и проектирование зубчатых редукторов*. Санкт-Петербург, Политехника, 1993. 448 с.
- [12] Кудрявцев В.Н., Державец Ю.А., Глухарев Е.Г. *Конструкции и расчет зубчатых редукторов*. Москва, Машиностроение, 1971. 328 с.
- [13] Анурьев В.И. *Справочник конструктора-машиностроителя*. В 3 т. Т. 2. Москва, Машиностроение, 2006. 960 с.
- [14] Гинзбург Е.Г., Гонованов Н.Ф., Фирун Н.Б., Халебский Н.Т. *Зубчатые передачи. Справочник*. Ленинград, Машиностроение, 1980. 416 с.
- [15] ГОСТ 1643–81. *Передачи зубчатые цилиндрические. Допуски*. Москва, Изд-во стандартов, 1983. 75 с.

## References

- [1] GOST 13755–81. *Peredachi zubchatyye tsilindricheskiye evol'ventnyye. Iskhodnyy kontur* [State Standard 13755–81. Basic requirements for interchangeability. Gearings cylindrical evolvent. Basic rack]. Moscow, Standartinform publ., 1981. 7 p.
- [2] GOST 13755–2015 (ISO 53:1998). *Peredachi zubchatyye tsilindricheskiye evol'ventnyye. Iskhodnyye kontury Basic norm of interchangeability* [State Standard 13755–2015. Cylindrical gears for general and heavy engineering. Standard basic racks tooth profile]. Moscow, Standartinform publ., 2016. 15 p.

- [3] ISO 53:1998. *Cylindrical gears for general and heavy engineering – Standard basic rack tooth profile*. Switzerland, 1998. 10 p.
- [4] GOST 16532–70. *Peredachi zubchatyye tsilindricheskiye evol'ventnyye vneshnego zatsepleniya. Raschet geometrii* [State Standard 16532–70. Cylindrical involute external gear pairs. Calculation of geometry]. Moscow, Standartinform publ., 1983. 43 p.
- [5] Khurmi R., Gupta J.K. *Theory of Machines*. S. Chand & Co. Ltd., New Dehli, 2005. 1071 p.
- [6] Jelaska D. *Gears and Gear Drives*. A John Wiley & Sons Ltd., 2012. 462 p.
- [7] Linke H., Börner J., Heß R. *Cylindrical Gears, Calculation – Materials – Manufacturing*. Hanser Publications, 2016. 854 p.
- [8] Colbourne J.R. *The Geometry of Involute Gears*. New York, Springer-Verlag Inc., 1987. 538 p.
- [9] Radzevich S.P. *Theory of Gearing. Kinematics, Geometry, and Synthesis*. CRC Press, 2018. 935 p.
- [10] Vulgakov E.B. *Aviatsionnyye zubchatyye peredachi i reduktory* [Aircraft gears and gearboxes]. Moscow, Mashinostroyeniye publ., 1981. 374 p.
- [11] Kudryavtsev V.N., Kuz'min I.S., Filipenkov A.L. *Raschet i proyektirovaniye zubchatykh reduktorov* [Calculation and design of gear reducers]. Sankt-Petersburg, Politekhnik publ., 1993. 448 p.
- [12] Kudryavtsev V.N., Derzhavets Yu.A., Glukharev E.G. *Konstruktsii i raschet zubchatykh reduktorov* [Design and calculation of gear reducers]. Moscow, Mashinostroyeniye publ., 1971. 328 p.
- [13] Anur'yev V.I. *Spravochnik konstruktora-mashinostroyitelya* [Reference book of the mechanical engineer designer]. Vol. 2. Moscow, Mashinostroyeniye publ., 2006. 960 p.
- [14] Ginzburg E.G., Gonovanov N.F., Firun N.B., Khalebskiy N.T. *Zubchatyye peredachi. Spravochnik* [Gear. Guide]. Leningrad, Mashinostroyeniye publ., 1980. 416 p.
- [15] GOST 1643–81. *Peredachi zubchatyye tsilindricheskiye. Dopuski* [State Standard 1643–81. Basic requirements for interchangeability. Cylindrical gearings. Tolerances]. Moscow, Standartinform publ., 1983. 75 p.

Статья поступила в редакцию 15.06.2020

## Информация об авторах

**ТИМОФЕЕВ Борис Павлович** — доктор технических наук, профессор, факультет систем управления и робототехники. Университет ИТМО (197101, Санкт-Петербург, Российская Федерация, Кронверкский пр-т, д. 49, e-mail: timofeev@mail.ifmo.ru).

**ЧАН Минь Хуан** — аспирант, факультет систем управления и робототехники. Университет ИТМО (197101, Санкт-Петербург, Российская Федерация, Кронверкский пр-т, д. 49, e-mail: tranminhuank31@gmail.com).

## Information about the authors

**TIMOFEEV Boris Pavlovich** — Doctor of Science (Eng.), Professor, Department of Control Systems and Robotics. ITMO University: Information Technology, Mechanics and Optics (197101, St. Petersburg, Russian Federation, Kronverkskiy Ave., Bldg. 49, e-mail: timofeev@mail.ifmo.ru).

**TRAN Minh Huan** — Postgraduate, Department of Control Systems and Robotics. ITMO University: Information Technology, Mechanics and Optics (197101, St. Petersburg, Russian Federation, Kronverkskiy Ave., Bldg. 49, e-mail: tranminhuank31@gmail.com).

### Просьба ссылаться на эту статью следующим образом:

Тимофеев Б.П., Чан Минь Хуан. Влияние параметров исходного контура на коэффициент перекрытия эвольвентных передач. *Известия высших учебных заведений. Машиностроение*, 2020, № 12, с. 34–39, doi: 10.18698/0536-1044-2020-12-34-39

### Please cite this article in English as:

Timofeev B.P., Tran Minh Huan. The Influence of the Initial Contour Parameters on the Contact Ratio of Involute Gearings. *BMSTU Journal of Mechanical Engineering*, 2020, no. 12, pp. 34–39, doi: 10.18698/0536-1044-2020-12-34-39