

УДК 629.7.023:539.3

doi: 10.18698/0536-1044-2022-1-71-81

# Исследование влияния порядка укладки монослоев на устойчивость композитной цилиндрической оболочки

Л.П. Железнов

ФГУП «Сибирский научно-исследовательский институт авиации имени С.А. Чаплыгина»

## Study of the Effect of the Monolayers Stacking Sequence on the Composite Cylindrical Shell Stability

L.P. Zheleznov

Siberian Aeronautical Research Institute named after S.A. Chaplygin

Исследована устойчивость круговой цилиндрической оболочки, выполненной из полимерного композиционного материала, находящейся под действием нагрузки в виде крутящего и изгибающего моментов, краевой сжимающей и поперечной сил и внешнего давления. Исследование проведено по методике, реализующей метод конечных элементов для решения задач прочности и устойчивости подкрепленных цилиндрических оболочек, выполненных из полимерного композиционного материала, с учетом моментности и нелинейности их исходного докритического напряженно-деформированного состояния. Определено влияние укладки монослоев и нелинейности деформирования на критические нагрузки потери устойчивости оболочки.

**Ключевые слова:** цилиндрические оболочки, полимерные композиционные материалы, нелинейное деформирование, устойчивость оболочки, метод конечных элементов

The stability of a circular cylindrical shell made of a polymer composite material has been investigated under various types of loading: torsional and bending moments, edge compressive and transverse forces, and external pressure. The research results are obtained on the basis of a technique that implements the finite element method for solving the problems of strength and stability of reinforced cylindrical shells made of the polymer composite material, taking into account the momentness and nonlinearity of their initial subcritical stress-strain state. The effect of stacking monolayers and the deforming nonlinearity on the critical loads of shell buckling has been determined.

**Keywords:** cylindrical shells, polymer composite materials, nonlinear deforming, shell stability, finite element method

Полимерные композиционные материалы (ПКМ) нашли широкое применение в современных летательных аппаратах, что значительно облегчает массу их конструкции при сохранении прочностных и жесткостных характеристик. Несмотря на то, что исследованию прочности таких конструкций посвящено достаточно большое число работ, остаются нерешенными вопросы их прочности и устойчивости в условиях нелинейного исходного напряженно-деформированного состояния. Особен-

но важно решить эти вопросы для конструкций фюзеляжей самолетов, в которых потеря устойчивости композитной обшивки недопустима.

Основополагающий вклад в разработку конструкций из ПКМ внесла школа В.В. Васильева [1]. Авторы большинства опубликованных работ рассматривают оболочки при безмоментном или линейном исходном напряженно-деформированном состоянии [2–5]. Тем не менее до сих пор не решены многие вопросы, связанные с прочностью и устойчивостью кон-

струкций из ПКМ при их нелинейном деформировании, в частности, влияние порядка укладки монослоев на устойчивость цилиндрических оболочек из ПКМ при различных видах нагружения.

В настоящей работе задача прочности и устойчивости цилиндрических оболочек из ПКМ при произвольном нагружении решена методами конечных элементов и линеаризации Ньютона — Канторовича. Используются разработанные на основе гипотезы Тимошенко конечные элементы (КЭ) цилиндрических оболочек естественной кривизны, в аппроксимации перемещений которых в явном виде выделены перемещения КЭ как твердого тела. Это существенно улучшает условия сходимости решения по числу КЭ.

Цель работы — исследование влияния порядка укладки монослоев и нелинейности деформирования на устойчивость круговой цилиндрической оболочки из ПКМ, нагруженной крутящим и изгибающим моментами, краевой сжимающей и поперечной силами и внешним давлением.

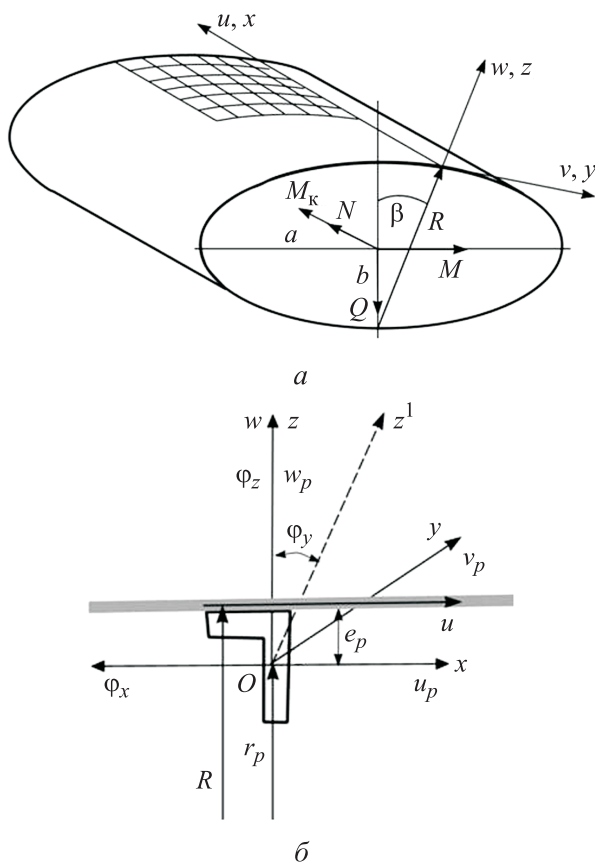


Рис. 1. Схема расчета некруговой цилиндрической оболочки из ПКМ (а) и элемента подкрепления (б)

Рассмотрим подкрепленную продольным (стрингерами) и поперечным (шпангоутами) наборами некруговую цилиндрическую композитную оболочку, находящуюся под действием неоднородной краевой нагрузки в виде продольной силы  $N$ , изгибающего  $M$  и крутящего  $M_k$  моментов, поперечной силы  $Q$  и внутреннего (внешнего) давления  $q$  (рис. 1, а). Введены следующие обозначения:  $a$  и  $b$  — большая и малая ось эллипса;  $\beta$  — угол поворота радиуса кривизны  $R$  поперечного сечения оболочки относительно вертикальной оси.

Кратко изложим основные соотношения для КЭ некруговой цилиндрической оболочки, выполненной из ПКМ. Обшивку оболочки будем рассматривать как ортотропную. При выводе основных соотношений воспользуемся ранее разработанным алгоритмом [6–8].

Разобьем оболочку линиями главных кривизн по образующей на  $m$ , а по направляющей на  $n$  частей, т. е. представим ее набором  $m \times n$  криволинейных прямоугольных КЭ естественной кривизны. Основные соотношения для КЭ оболочки из ПКМ приведены в работе [8].

Выражение для потенциальной энергии КЭ оболочки имеет вид [8]

$$\begin{aligned} \Pi &= W - V; \\ W &= \frac{1}{2} \iint_s \mathbf{T}^T \mathbf{e} ds = \frac{1}{2} \iint_s (\mathbf{T}^T \mathbf{e}_l + \mathbf{T}^T \mathbf{e}_n) ds = \\ &= \frac{1}{2} \iint_s (\mathbf{e}_l^T \mathbf{D} \mathbf{e}_l + \mathbf{e}_l^T \mathbf{D} \mathbf{e}_n + \mathbf{e}_n^T \mathbf{D} \mathbf{e}_l + \mathbf{e}_n^T \mathbf{D} \mathbf{e}_n) ds; \\ V &= \iint_s \mathbf{q}^T \mathbf{u} ds + \int \mathbf{R}_k^T \mathbf{u}_k dl_k + \mathbf{R}_l^T \bar{\mathbf{u}}_l; \\ \mathbf{u} &= \{u, v, w\}^T; \quad \bar{\mathbf{u}}_l = \{u_l, v_l, w_l, \vartheta_{1l}, \vartheta_{2l}, w_{xy}\}^T; \\ \mathbf{u}_k &= \{u, v, w, \vartheta_1, \vartheta_2, w_{xy}\}^T; \\ \mathbf{D} &= \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{13} & K_{11} & K_{12} & K_{13} & 0 & 0 \\ B_{21} & B_{22} & B_{23} & K_{21} & K_{22} & K_{23} & 0 & 0 \\ B_{31} & B_{32} & B_{33} & K_{31} & K_{32} & K_{33} & 0 & 0 \\ K_{11} & K_{21} & K_{31} & D_{11} & D_{12} & D_{13} & 0 & 0 \\ K_{12} & K_{22} & K_{32} & D_{21} & D_{22} & D_{23} & 0 & 0 \\ K_{13} & K_{23} & K_{33} & D_{31} & D_{32} & D_{33} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{11} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{22} \end{bmatrix}; \end{aligned}$$

$$C_{11} = C_{22} = 5/6Gh,$$

где  $W$  — энергия деформации КЭ;  $V$  — работа внешних сил, действующих на КЭ оболочки;

$\mathbf{T}$  — вектор внутренних усилий;  $s$  — площадь КЭ;  $\mathbf{e}$ ,  $\mathbf{e}_l$  и  $\mathbf{e}_n$  — вектор деформаций и его линейная и нелинейная составляющие соответственно;  $\mathbf{D}$  — матрица упругих жесткостей;  $B_{ij}, K_{ij}, D_{ij}$  — приведенные к срединной поверхности оболочки коэффициенты мембранной и изгибной жесткостей композитной оболочки;  $\mathbf{q}$  — вектор неоднородной поверхностной нагрузки,  $\mathbf{q} = \{q_1, q_2, q_3\}^T$ ;  $\mathbf{u}$  — вектор перемещений КЭ;  $u, v, w$  — перемещения точек срединной поверхности КЭ в направлении осей  $x, y, z$  соответственно;  $\vartheta_1, \vartheta_2$  — углы поворота нормали КЭ;  $w_{xy}$  — смешанная производная прогиба  $w$ ;  $\mathbf{R}_k = \{P_{1k}, P_{2k}, P_{3k}, M_{1k}, M_{2k}, M_{3k}\}^T$  — вектор контурных сил;  $l_k$  — ширина КЭ по окружности;  $\mathbf{R}_l = \{P_{1l}, P_{2l}, P_{3l}, M_{1l}, M_{2l}, M_{3l}\}^T$  — вектор локальных сил и моментов;  $\bar{\mathbf{u}}_l$  — вектор узловых перемещений  $l$ -го узла КЭ; индексы «1», «2», «3» соответствуют направлениям осей  $x, y, z$ ;  $G$  — модуль сдвига;  $h$  — приведенная толщина оболочки

Рассмотрим КЭ для элемента подкрепления (ЭП), выполненного из того же ПКМ (рис. 1, б). Пунктирная ось  $z^1$  соответствует оси  $z$  в деформированном состоянии ЭП;  $r_p$  — радиус кривизны ЭП. Как и для оболочки, для ЭП можно применить гипотезу Тимошенко с учетом его малых размеров по сравнению с радиусом оболочки. Считаем угол сдвига поперечного сечения ЭП совпадающим с таковым для оболочки.

Используя гипотезу плоских сечений, запишем выражения для перемещений произвольной точки поперечного сечения ЭП

$$U = u_p + z\varphi_y; \quad V = v_p + z\varphi_x + x\varphi_z; \quad W = w_p - x\varphi_y,$$

где  $u_p, v_p, w_p$  — перемещения точек центра тяжести поперечного сечения ЭП в направлении осей  $x, y, z$  соответственно;  $\varphi_x, \varphi_y, \varphi_z$  — углы поворота поперечного сечения ЭП вокруг осей  $x, y, z$  соответственно.

Деформации в произвольной точке поперечного сечения ЭП определяются выражением [8]

$$\bar{\varepsilon}_p = \varepsilon_p + x\chi_{px} + z\chi_{pz}.$$

В этом выражении:

- для элемента стрингера

$$\begin{aligned} \varepsilon_p &= (v_p)_x + \frac{1}{2}(\varphi_x^2 + \varphi_z^2); \\ \chi_{px} &= (\varphi_z)_x; \quad \chi_{pz} = (\varphi_x)_x; \quad \chi_p = (\varphi_y)_x; \\ \varphi_x &= \vartheta_x; \quad \varphi_z = -(u_p)_x; \quad \varphi_y = \vartheta_y; \end{aligned}$$

- для элемента шпангоута

$$\varepsilon_p = k_2 \left[ w_p + (v_p)_\beta \right] + \frac{1}{2}(\varphi_x^2 + \varphi_z^2);$$

$$\chi_{px} = k_2 \left[ (\varphi_z)_\beta - \varphi_y \right]; \quad \chi_{pz} = k_2 (\varphi_x)_\beta;$$

$$\varphi_x = k_2 \left[ v_p - (w_p)_\beta \right]; \quad \varphi_z = -k_2 (u_p)_\beta; \quad \varphi_y = \vartheta_x,$$

где  $k_2$  — кривизна оболочки; индексы « $x$ », « $\beta$ » за скобкой означают дифференцирование;  $\vartheta_x$  и  $\vartheta_y$  — углы поворота сечений ЭП относительно осей  $x$  и  $y$ .

Выразим перемещения точек центра тяжести ЭП через перемещения точек срединной поверхности оболочки. С учетом того, что для элемента шпангоута  $\varphi_y = \vartheta_x$ , а для элемента стрингера  $\varphi_y = \vartheta_y$ , получаем выражения для перемещений точек центра тяжести шпангоута (см. рис. 1, б)

$$u_p = u + e_p \vartheta_x; \quad v_p = v + e_p \vartheta_y; \quad w_p = w$$

и стрингера

$$u_p = v + e_p \vartheta_y; \quad v_p = u + e_p \vartheta_x; \quad w_p = w.$$

Нормальные  $\sigma_p$  и касательные  $\tau_p$  напряжения связаны с осевой  $\varepsilon_p$  и сдвиговой  $\gamma_p$  деформациями зависимостями

$$\sigma_p = E\varepsilon_p; \quad \tau_p = G\gamma_p,$$

где  $E$  — модуль упругости ЭП.

Запишем следующие выражения:

- для внутренних усилий ЭП

$$T_p = \iint_s \sigma_p ds;$$

- для изгибающих моментов ЭП

$$M_{px} = \iint_s \sigma_p x ds; \quad M_{pz} = \iint_s \sigma_p z ds; \quad M_{py} = \iint_s \tau_p \rho ds;$$

- для поперечной силы ЭП

$$Q_p = \iint_s \tau_p ds,$$

где  $\rho$  — расстояние от центра тяжести поперечного сечения до произвольной точки поперечного сечения ЭП.

Интегрируя, эти выражения, получаем

$$\begin{aligned} T_p &= C\varepsilon_p; \quad M_{px} = C_x\chi_{px} + C_{xz}\chi_{pz}; \\ M_{pz} &= C_z\chi_{pz} + C_{xz}\chi_{px}; \quad M_{py} = C_k\chi_p; \\ Q_p &= GF\psi_p. \end{aligned} \quad (1)$$

Для элемента шпангоута  $\psi_p = \psi_y$ , а для элемента стрингера  $\psi_p = \psi_x$ .

В выражениях (1) [8]:

$$\begin{aligned} C &= EF; \quad C_x = EJ_x; \quad C_z = EJ_z; \\ C_{xz} &= EJ_{xz}; \quad C_z = E; \quad C_k = GJ_k; \\ F &= \iint_s ds; \quad J_x = \iint_s x^2 ds; \quad J_z = \iint_s z^2 ds; \\ J_{xz} &= \iint_s xz ds; \quad J_k = \iint_s \rho_1 \rho ds, \end{aligned}$$

где  $\rho_1$  — функция кручения поперечного сечения ЭП [13].

Представим выражения (1) в матричной форме

$$\mathbf{T}_p = \mathbf{D}_p \mathbf{e}_p,$$

где

$$\begin{aligned} \mathbf{T}_p &= \{T_p, M_{px}, M_{pz}, M_{py}, Q_p\}^T; \\ \mathbf{e}_p &= \{\varepsilon_p, \chi_{px}, \chi_{pz}, \chi_p, \psi_p\}^T; \\ \mathbf{D}_p &= \begin{bmatrix} C & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & C_x & C_{xz} & 0 & 0 \\ 0 & C_{xz} & C_z & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & GF \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Энергия деформации КЭ ЭП имеет вид

$$W_p = \frac{1}{2} \int_{l_p} \mathbf{T}_p^T \mathbf{e}_p dl_p,$$

где  $l_p$  — длина ЭП.

Запишем вариационное уравнение Лагранжа для КЭ подкрепленной оболочки

$$\delta \Pi = \delta W + \delta W_p - \delta V = 0,$$

где  $\delta$  — знак вариации.

Варьируя по узловым перемещениям КЭ, получаем систему нелинейных алгебраических уравнений относительно узловых перемещений КЭ. С учетом условия совместности узловых перемещений КЭ и граничных условий систему нелинейных алгебраических уравнений относительно узловых перемещений всех КЭ оболочки представим как

$$\mathbf{K} \mathbf{u}' - \mathbf{Q} = 0, \quad (2)$$

где  $\mathbf{K}$  — матрица жесткости оболочки, получаемая суммированием матриц жесткости отдельных конечных элементов с использованием матрицы индексов [9];  $\mathbf{u}'$  — вектор узловых перемещений;  $\mathbf{Q}$  — вектор обобщенных узловых сил оболочки.

Для решения системы (2) воспользуемся методом Ньютона — Канторовича [10], уравнение которого имеет вид

$$\mathbf{H}(\mathbf{u}'_n) \Delta = \mathbf{Q} - \mathbf{G}; \quad \mathbf{u}'_{n+1} = \mathbf{u}'_n + \Delta, \quad (3)$$

где  $\mathbf{H}$  — матрица Гессе системы, элементами которой являются элементы второй вариации потенциальной энергии деформации подкрепленной оболочки;  $\mathbf{u}'_n$  и  $\Delta$  — вектор перемещений оболочки на  $n$ -й итерации и его приращение;  $\mathbf{G}$  — градиент потенциальной энергии деформации.

Решение системы (3) получаем следующим образом. Задаем небольшое значение параметра нагрузки. За нулевое приближение принимаем решение линейной задачи. Выполняем итерационный процесс, обеспечивающий сходимость решения с заданной точностью. Далее увеличиваем нагрузку. За нулевое приближение берем решение с предыдущего шага по нагрузке. Выполняем итерационный процесс и т. д. На каждой итерации решение системы линейных алгебраических уравнений отыскиваем методом Краута [11] с использованием разложения матрицы Гессе  $\mathbf{H} = \mathbf{L}^T \mathbf{D} \mathbf{L}$  на одну диагональную  $\mathbf{D}$  и две треугольные матрицы  $\mathbf{L}$ .

Определив компоненты вектора узловых перемещений  $\mathbf{u}'$ , найдем все компоненты напряженно-деформированного состояния оболочки. Критическая нагрузка определяется либо как предельная по расходимости итерационного процесса при резком возрастании перемещений в отдельных узлах конечно-элементной сетки, либо как бифуркационная с использованием энергетического критерия устойчивости, согласно которому равновесное состояние устойчиво при  $\delta^2 \Pi > 0$ .

Это условие требует положительной определенности матрицы Гессе  $\mathbf{H}$  или положительности всех диагональных элементов матрицы  $\mathbf{D}$  в разложении матрицы  $\mathbf{H}$ . Определив критическую нагрузку, отыскиваем форму потери устойчивости оболочки из решения системы  $\mathbf{H} \ddot{\mathbf{u}} = 0$ , где  $\ddot{\mathbf{u}}$  — вектор бифуркационных узловых перемещений. В случае предельной точки форма потери устойчивости оболочки определяется из нелинейного исходного напряженно-деформированного состояния нагрузки, близкой к предельной.

**Исследование влияния порядка укладки монослоев на устойчивость цилиндрической оболочки.** Рассмотрим консольно-закреп-

ленную круговую цилиндрическую оболочку ( $u = v = w = w_x = 0$ ), выполненную из ПКМ и находящуюся под действием продольной сжимающей  $N$  и поперечной  $Q$  сил, изгибающего  $M$  и крутящего  $M_k$  моментов, приложенных к свободному краю оболочки, и внешнего давления  $q$ .

Нагруженный край оболочки подкреплен жестким в своей плоскости шпангоутом. Действие изгибающего момента заменим действием неоднородных по направляющей оболочки осевых усилий

$$T_1 = Mz_1/J,$$

где  $z_1$  — расстояние от точек контура оболочки до горизонтальной оси;  $J$  — момент инерции площади поперечного сечения относительно горизонтальной оси.

Действие крутящего момента  $M_k$  заменим действием однородных по окружности оболочки касательных усилий

$$T_3 = M_k/2\omega,$$

где  $\omega$  — площадь в свету поперечного сечения оболочки.

Действие поперечной силы заменим статически эквивалентными ей касательными усилиями

$$T_3 = QS/J,$$

где  $S$  — статический момент отсеченной части поперечного сечения.

Оболочка выполнена из 18-слойного ПКМ Тогауса Т700, имеет длину  $L = 2000$  мм, толщину  $h = 3,456$  мм и радиус  $R = 2000$  мм.

**Механические характеристики монослоя Тогауса Т700**

Модуль упругости, МПа, в продольном направлении:	
на растяжение $E_1^+$ .....	125 510
на сжатие $E_1^-$ .....	114 380
Модуль упругости, МПа, в поперечном направлении:	
на растяжение $E_2^+$ .....	8780
на сжатие $E_2^-$ .....	8670
Модуль сдвига $G_{12}$ , МПа .....	4740
Разрушающее продольное напряжение, МПа:	
на растяжение $\sigma_{1B}^+$ .....	2340
на сжатие $\sigma_{1B}^-$ .....	1240
Разрушающее поперечное напряжение, МПа:	
на растяжение $\sigma_{2B}^+$ .....	51,7
на сжатие $\sigma_{2B}^-$ .....	211,2
Касательное напряжение $\tau_{12B}$ , МПа .....	71,4
Коэффициент Пуассона $\mu_{21}$ .....	0,34
Толщина монослоя $\delta_m$ , мкм .....	192

Оболочка рассмотрена как ортотропная. Приведенные жесткостные характеристики материала обшивки получены с использованием следующих выражений [12]:

$$B_{11} = \sum_{k=1}^n \left( E_1^{(k)} \cos^4 \varphi_k + 2E_1^{(k)} \mu_{21}^{(k)} \sin^2 \varphi_k \cos^2 \varphi_k + E_2^{(k)} \sin^4 \varphi_k + G_{12}^{(k)} \sin^2 2\varphi_k \right) (z_k - z_{k-1});$$

$$B_{22} = \sum_{k=1}^n \left( E_1^{(k)} \sin^4 \varphi_k + 2E_1^{(k)} \mu_{21}^{(k)} \sin^2 \varphi_k \cos^2 \varphi_k + E_2^{(k)} \cos^4 \varphi_k + G_{12}^{(k)} \sin^2 2\varphi_k \right) (z_k - z_{k-1});$$

$$B_{12} = B_{21} = \sum_{k=1}^n \left[ \left( E_1^{(k)} + E_2^{(k)} \right) \sin^2 \varphi_k \cos^2 \varphi_k + E_1^{(k)} \mu_{21}^{(k)} \left( \sin^4 \varphi_k + \cos^4 \varphi_k \right) - G_{12}^{(k)} \sin^2 2\varphi_k \right] \times (z_k - z_{k-1});$$

$$D_{11} = \frac{1}{3} \sum_{k=1}^n \left( E_1^{(k)} \cos^4 \varphi_k + 2E_1^{(k)} \mu_{21}^{(k)} \sin^2 \varphi_k \cos^2 \varphi_k + E_2^{(k)} \sin^4 \varphi_k + G_{12}^{(k)} \sin^2 2\varphi_k \right) (z_k^3 - z_{k-1}^3);$$

$$D_{22} = \frac{1}{3} \sum_{k=1}^n \left( E_1^{(k)} \sin^4 \varphi_k + 2E_1^{(k)} \mu_{21}^{(k)} \sin^2 \varphi_k \cos^2 \varphi_k + E_2^{(k)} \cos^4 \varphi_k + G_{12}^{(k)} \sin^2 2\varphi_k \right) (z_k^3 - z_{k-1}^3);$$

$$D_{12} = D_{21} = \frac{1}{3} \sum_{k=1}^n \left[ \left( E_1^{(k)} + E_2^{(k)} \right) \sin^2 \varphi_k \cos^2 \varphi_k + E_1^{(k)} \mu_{21}^{(k)} \left( \sin^4 \varphi_k + \cos^4 \varphi_k \right) - G_{12}^{(k)} \sin^2 2\varphi_k \right] \times (z_k^3 - z_{k-1}^3);$$

$$K_{11} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \left( E_1^{(k)} \cos^4 \varphi_k + 2E_1^{(k)} \mu_{21}^{(k)} \sin^2 \varphi_k \cos^2 \varphi_k + E_2^{(k)} \sin^4 \varphi_k + G_{12}^{(k)} \sin^2 2\varphi_k \right) (z_k^2 - z_{k-1}^2);$$

$$K_{22} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \left( E_1^{(k)} \sin^4 \varphi_k + 2E_1^{(k)} \mu_{21}^{(k)} \sin^2 \varphi_k \cos^2 \varphi_k + E_2^{(k)} \cos^4 \varphi_k + G_{12}^{(k)} \sin^2 2\varphi_k \right) (z_k^2 - z_{k-1}^2);$$

$$K_{12} = K_{21} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \left[ \left( E_1^{(k)} + E_2^{(k)} \right) \sin^2 \varphi_k \cos^2 \varphi_k + E_1^{(k)} \mu_{21}^{(k)} \left( \sin^4 \varphi_k + \cos^4 \varphi_k \right) - G_{12}^{(k)} \sin^2 2\varphi_k \right] \times (z_k^2 - z_{k-1}^2);$$

$$B_{13} = B_{31} = \sum_{k=1}^n \sin \varphi_k \cos \varphi_k \left[ E_1^{(k)} \left( 1 - \mu_{21}^{(k)} \right) \cos^2 \varphi_k - 2G_{12}^{(k)} \cos^2 2\varphi_k - E_2^{(k)} \left( 1 - \mu_{12}^{(k)} \right) \sin^2 \varphi_k \right] (z_k - z_{k-1});$$

$$B_{23} = B_{32} = \sum_{k=1}^n \sin \varphi_k \cos \varphi_k \left[ E_1^{(k)} \left( 1 - \mu_{21}^{(k)} \right) \sin^2 \varphi_k + 2G_{12}^{(k)} \cos^2 2\varphi_k - E_2^{(k)} \left( 1 - \mu_{12}^{(k)} \right) \cos^2 \varphi_k \right] (z_k - z_{k-1});$$

$$K_{13} = K_{31} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \sin \varphi_k \cos \varphi_k \left[ E_1^{(k)} (1 - \mu_{21}^{(k)}) \cos^2 \varphi_k - 2G_{12}^{(k)} \cos^2 2\varphi_k - E_2^{(k)} (1 - \mu_{12}^{(k)}) \sin^2 \varphi_k \right] (z_k^2 - z_{k-1}^2);$$

$$K_{23} = K_{32} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \sin \varphi_k \cos \varphi_k \left[ E_1^{(k)} (1 - \mu_{21}^{(k)}) \sin^2 \varphi_k + 2G_{12}^{(k)} \cos^2 2\varphi_k - E_2^{(k)} (1 - \mu_{12}^{(k)}) \cos^2 \varphi_k \right] (z_k^2 - z_{k-1}^2);$$

$$B_{33} = \sum_{k=1}^n \left[ (E_1^{(k)} + E_2^{(k)} - 2E_1^{(k)} \mu_{21}^{(k)} + G_{12}^{(k)}) \times \right. \\ \left. \times \sin^2 \varphi_k \cos^2 \varphi_k + G_{12}^{(k)} \cos^2 2\varphi_k \right] (z_k - z_{k-1});$$

$$K_{33} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \left[ (E_1^{(k)} + E_2^{(k)} - 2E_1^{(k)} \mu_{21}^{(k)} + G_{12}^{(k)}) \times \right. \\ \left. \times \sin^2 \varphi_k \cos^2 \varphi_k + G_{12}^{(k)} \cos^2 2\varphi_k \right] (z_k^2 - z_{k-1}^2);$$

$$D_{33} = \frac{1}{3} \sum_{k=1}^n \left[ (E_1^{(k)} + E_2^{(k)} - 2E_1^{(k)} \mu_{21}^{(k)} + G_{12}^{(k)}) \times \right. \\ \left. \times \sin^2 \varphi_k \cos^2 \varphi_k + G_{12}^{(k)} \cos^2 2\varphi_k \right] (z_k^3 - z_{k-1}^3),$$

где  $k$  — номер слоя обшивки;  $\varphi_k$  — угол между осью 1, направленной вдоль армирующих волокон  $k$ -го слоя, и осью  $x$  (рис. 2);  $z_k$  и  $z_{k-1}$  — верхняя и нижняя координаты  $z$   $k$ -го слоя обшивки.

С обшивкой связана декартова система координат  $xyz$ , а с каждым  $k$ -м армированным слоем — локальная система координат 1, 2, начало которой совпадает с началом системы  $xyz$  (см. рис. 2). Ось 1 направлена вдоль армирующих волокон  $k$ -го слоя и составляет угол  $\varphi_k$  с осью  $x$ .

Рассмотрим несколько вариантов укладки монослоев, приведенных в табл. 1.

В силу симметрии нагрузки рассматривалась 1/2 часть оболочки, получаемая продольным разрезом. Для расчета по линии разреза для

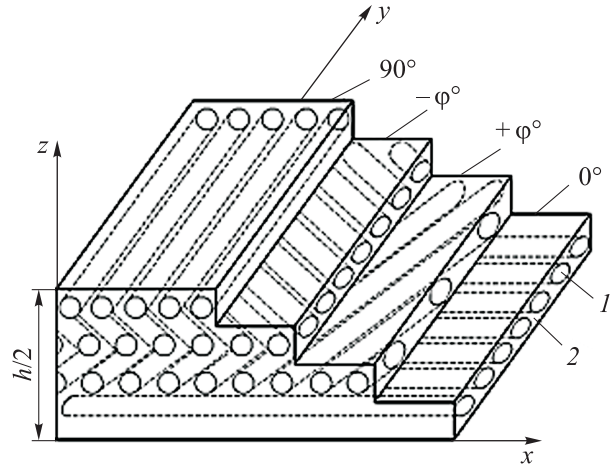


Рис. 2. Схема укладки монослоев в обшивке оболочки: 1 — волокно; 2 — матрица

нагрузок  $N$ ,  $M$ ,  $Q$  и  $q$  ставились условия симметрии ( $v=0$ ,  $w_\varphi=0$ ), а для  $M_k$  — условия кривой симметрии ( $w=0$ ,  $w_x=0$ ). Оболочка разбивалась конечно-элементной сеткой  $m \times n = 15 \times 90$ , что обеспечивало сходимость решения по числу КЭ.

**Результаты расчетного исследования.** Введем следующие обозначения параметров критических нагрузок:

$$k_c = N^*/N_b; \quad k_m = M^*/M_0; \quad k_p = M_k^*/M_{k0}; \quad (4)$$

$$k_\tau = Q^*/Q_0; \quad k_q = q^*/q_0,$$

где  $N^*$ ,  $M^*$ ,  $M_k^*$ ,  $Q^*$  и  $q^*$  — критические значения продольной сжимающей силы, изгибающего, крутящего моментов, краевой поперечной силы и внешнего давления соответственно;  $N_b$ ,  $M_0$ ,  $M_{k0}$ ,  $Q_0$  и  $q_0$  — верхние критические значения продольной сжимающей силы, изги-

Таблица 1

Варианты укладки монослоев обшивки

Вариант	Схема укладки
1	$0^\circ, 0^\circ, \pm 45^\circ, 90^\circ, 0^\circ, \pm 45^\circ, 90^\circ, 0^\circ, \pm 45^\circ, 90^\circ, 0^\circ, \pm 45^\circ, 90^\circ, 0^\circ$
2	$0^\circ, 0^\circ, \pm 45^\circ, 90^\circ, 0^\circ, \pm 45^\circ, 90^\circ, 90^\circ, \pm 45^\circ, 0^\circ, 90^\circ, \pm 45^\circ, 0^\circ, 0^\circ$
3	$\pm 45^\circ, \pm 45^\circ, \pm 45^\circ, \pm 45^\circ, \pm 45^\circ, \pm 45^\circ, \pm 45^\circ, \pm 45^\circ, \pm 45^\circ, \pm 45^\circ$
4	$\pm 45^\circ, \pm 45^\circ, \pm 45^\circ, 0^\circ, 90^\circ, 0^\circ, 0^\circ, 90^\circ, 0^\circ, \pm 45^\circ, \pm 45^\circ, \pm 45^\circ$
5	$\pm 45^\circ, \pm 45^\circ, \pm 45^\circ, 0^\circ, 90^\circ, 0^\circ, 0^\circ, 90^\circ, 0^\circ, -45^\circ, 45^\circ, -45^\circ, 45^\circ, -45^\circ, 45^\circ$
6	$0^\circ, 90^\circ, 0^\circ, 90^\circ, 0^\circ, 90^\circ, 0^\circ, 90^\circ, 0^\circ, 90^\circ, 0^\circ, 90^\circ, 0^\circ, 90^\circ, 0^\circ, 90^\circ$
7	$0^\circ, 0^\circ, 0^\circ, 90^\circ, 0^\circ, \pm 45^\circ, \pm 45^\circ, \pm 45^\circ, \pm 45^\circ, 0^\circ, 90^\circ, 0^\circ, 0^\circ, 0^\circ$

Таблица 2

Значения параметров критических нагрузок для различных вариантов укладки монослоев

Вариант	$k_c$	$k_m$	$k_p$	$k_\tau$	$k_q$
1	0,687	0,595	0,625	0,687	0,718
	0,584	0,554	0,554	0,677	0,707
2	0,625	0,543	0,595	0,625	0,595
	0,584	0,502	0,554	0,615	0,584
3	0,482	0,564	0,492	0,718	0,666
	0,338	0,513	0,308	0,718	0,656
4	0,564	0,625	0,513	0,800	0,771
	0,359	0,584	0,359	0,779	0,769
5	0,564	0,656	0,513	0,882	0,781
	0,379	0,646	0,379	0,820	0,779
6	0,400	0,502	0,379	0,568	0,779
	0,395	0,492	0,369	0,564	0,769
7	0,543	0,513	0,543	0,359	0,547
	0,543	0,490	0,513	0,349	0,543
Металл	0,882	0,882	0,789	1,148	1,297
	0,625	0,871	0,625	1,128	1,292

*Примечание.* В числителе дроби указаны значения для линейного исходного напряженно-деформированного состояния нагрузки, в знаменателе — для нелинейного.

бающего и крутящего моментов, краевой поперечной силы и внешнего давления для круговой цилиндрической изотропной оболочки [13].

В выражениях (4):

$$N_b = 2\pi E h^2 / \sqrt{3(1-\nu^2)};$$

$$M_0 = \pi E R h^2 / \sqrt{3(1-\nu^2)};$$

$$M_{k0} = 2\pi C R^2 S_b;$$

$$Q_0 = \pi R C S_b;$$

$$q_0 = 0,92 E \frac{R}{L} \left(\frac{h}{R}\right)^2 \sqrt{\frac{h}{R}},$$

где  $\nu$  — коэффициент Пуассона металлической оболочки;  $C = 0,953$ ;

$$S_b = 0,74 \frac{E h}{(1-\nu^2)^{5/8}} \left(\frac{h}{R}\right)^{5/4} \left(\frac{R}{L}\right)^{1/2}.$$

В табл. 2 приведены результаты расчета параметров критических нагрузок при линейном и нелинейном исходных напряженно-деформированных состояниях для различных вариантов укладки монослоев оболочки, в том числе металлической из алюминиевого сплава. На рис. 3 показана зависимость величины снижения параметра критической нагрузки  $\Delta k$  при

нелинейном исходном состоянии от ее вида при различных вариантах укладки монослоев в пакете оболочки. Здесь  $\Delta k = (1 - k_l/k_n) \cdot 100\%$ , где индекс «l» соответствует линейному решению, а индекс «n» — нелинейному.

Анализ данных, приведенных в табл. 2 и на рис. 3 показывает, что наиболее существенно нелинейность снижает критические нагрузки

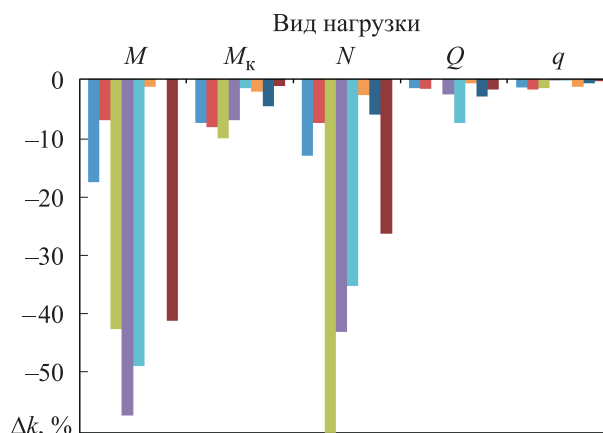


Рис. 3. Зависимость величины снижения параметра критической нагрузки  $\Delta k$  при нелинейном исходном состоянии от ее вида для различных вариантов укладки монослоев:  
 ■ — № 1; ■ — № 2; ■ — № 3; ■ — № 4; ■ — № 5;  
 ■ — № 6; ■ — № 7; ■ — металл

при действии продольной силы и изгибающего момента, причем на нее влияет также порядок укладки монослоев в пакете оболочки. Кроме того, влияние нелинейности зависит от варианта укладки монослоев. Так, у вариантов укладки для монослоев № 3 и 4 влияние нелинейности больше, чем для металлической оболочки.

На рис. 4, а и б приведены зависимости параметра критической нагрузки  $k$  (соответствующего параметрам  $k_m$ ,  $k_p$ ,  $k_c$ ,  $k_t$ ,  $k_q$  при действии изгибающего и крутящего моментов, продольной сжимающей и краевой поперечной сил и внешнего давления) при линейном и нелинейном исходных напряженно-деформированных состояниях от ее вида для различных вариантов укладки монослоев в пакете оболочки, в том числе металлической из алюминиевого сплава.

Анализ данных, приведенных на рис. 4, позволяет сделать следующие выводы:

- значения параметра критической нагрузки металлической оболочки больше, чем для оболочки из ПКМ;
- значения параметров критических нагрузок зависят как от порядка укладки монослоев, так и от вида нагружения оболочки; при нагружении оболочки продольной силой и моментом с точки зрения критической нагрузки выгоднее оболочки с укладкой по вариантам № 1 и 2, при других случаях — по вариантам № 3–5.

На рис. 5, а и б показаны зависимости коэффициента весовой эффективности оболочки  $\bar{k}$  от вида нагрузки при ее линейном и нелинейном исходных напряженно-деформированных состояниях для различных вариантов укладки

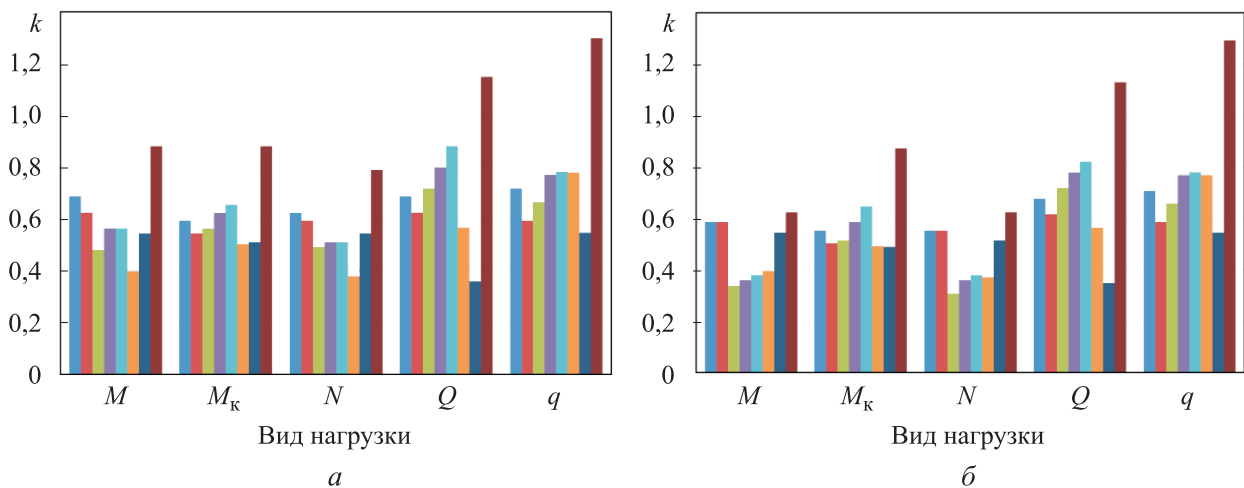


Рис. 4. Зависимости параметра критической нагрузки  $k$  при линейном (а) и нелинейном (б) исходных состояниях от ее вида для различных вариантов укладки монослоев:

■ — № 1; ■ — № 2; ■ — № 3; ■ — № 4; ■ — № 5; ■ — № 6; ■ — № 7; ■ — металл

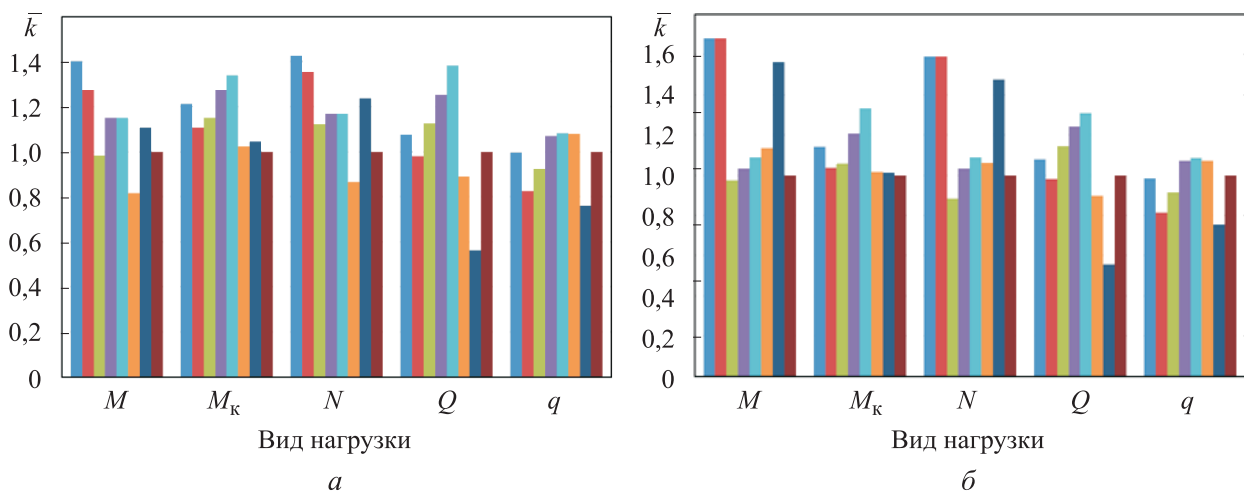


Рис. 5. Зависимости коэффициента весовой эффективности оболочки  $\bar{k}$  от вида нагрузки при ее линейном (а) и нелинейном (б) исходных состояниях для различных вариантов укладки монослоев:

■ — № 1; ■ — № 2; ■ — № 3; ■ — № 4; ■ — № 5; ■ — № 6; ■ — № 7; ■ — металл



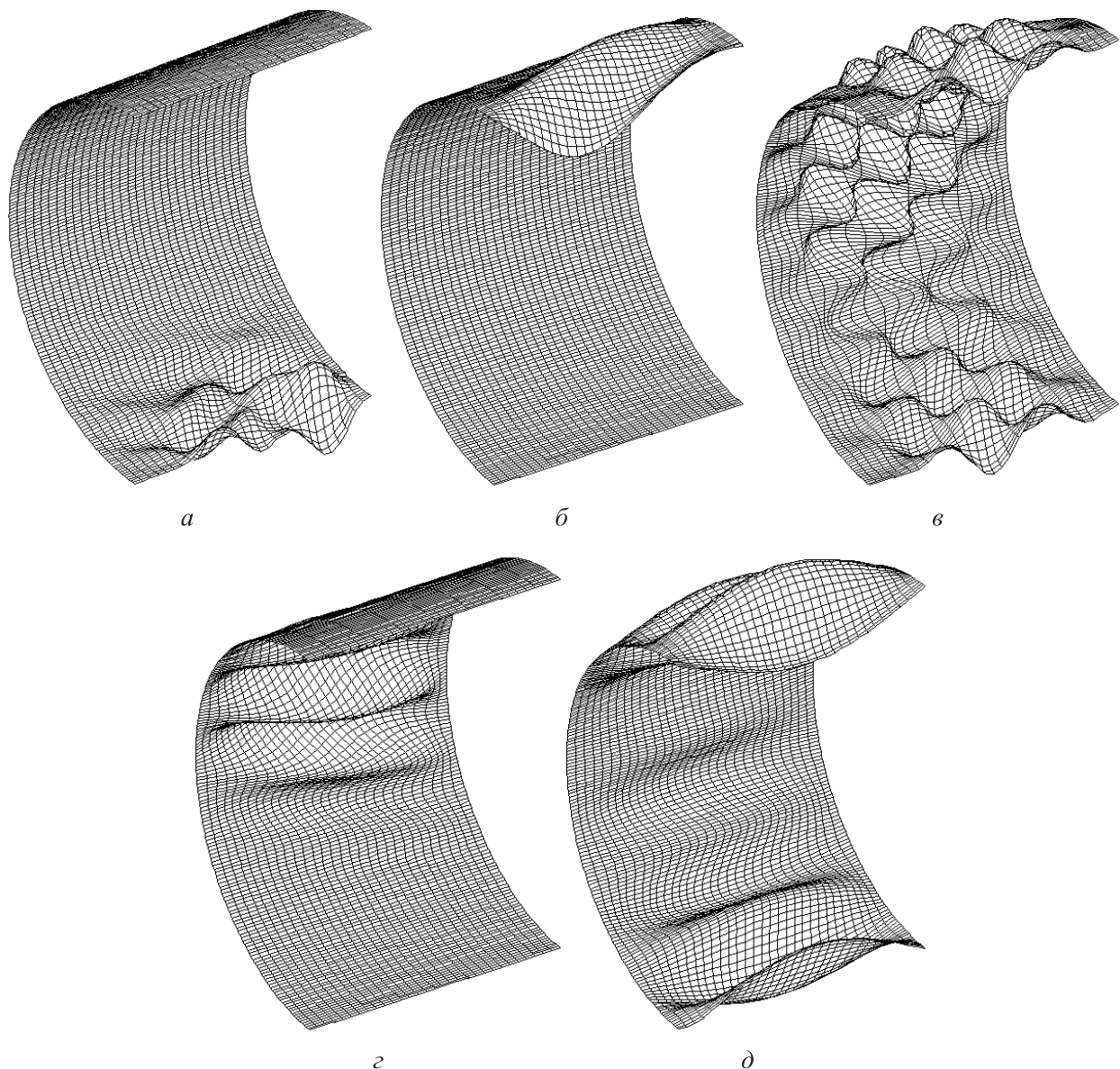


Рис. 6. Формы потери устойчивости при нагружении оболочки изгибающим (а) и крутящим (б) моментами; продольной (в) и поперечной (г) силами, внешним давлением (д)

монослоев в пакете оболочки. Коэффициент весовой эффективности оболочки определяется выражением

$$\bar{k} = \frac{k/k_m}{G/G_s},$$

где  $k_m$  — критическая нагрузка металлической оболочки;  $G$  и  $G_s$  — вес рассчитанной и эталонной металлической оболочки.

Анализ данных, приведенных на рис. 5, позволяет заключить следующее:

- коэффициент весовой эффективности металлической оболочки всегда меньше, чем у оболочек из ПКМ, за исключением отдельных

видов укладки (вариант № 7), а также при действии внешнего давления;

- коэффициент весовой эффективности оболочки из ПКМ зависит как от варианта укладки монослоев, так и от вида нагрузки; при нагружении оболочки продольной силой и моментом с точки зрения коэффициента весовой эффективности выгоднее оболочки с укладкой по вариантам № 1 и 2, при других случаях нагружения — по вариантам № 3–5;

- нелинейность для оболочек из ПКМ несколько повышает коэффициент весовой эффективности по сравнению с линейным решением.

На рис. 6, а–д показаны формы потери устойчивости оболочки из ПКМ с укладкой монослоев по варианту № 3 для различных случаев нагружения. Формы потери устойчивости приведены на половине оболочки. Оболочки, как правило, теряют устойчивость от действия максимальных сжимающих усилий (как в случае действия изгибающего момента и продольной сжимающей силы) или максимальных касательных сил (при действии крутящего момента и поперечной силы).

## Выводы

1. Нелинейность снижает критические значения параметров нагрузок с 3 до 60 % в зависимости от варианта укладки монослоев и вида нагрузки.

2. Весовая эффективность оболочек из ПКМ зависит как от варианта укладки монослоев, так и от вида нагрузки.

3. Весовая эффективность оболочек из ПКМ выше, чем у металлической оболочки.

## Литература

- [1] Васильев В.В. *Механика конструкций из композитных материалов*. Москва, Машиностроение, 1988. 272 с.
- [2] Ванин Г.А., Семенюк Н.П., Емельянов Р.Ф. *Устойчивость оболочек из армированных материалов*. Киев, Наукова Думка, 1978. 211 с.
- [3] Алфутов Н.А., Зиновьев П.А., Попов Б.Г. *Расчет многослойных пластин и оболочек из композиционных материалов*. Москва, Машиностроение, 1984. 263 с.
- [4] Бакулин В.Н., Гусев Е.Л., Марков В.Г. *Оптимальное проектирование конструкций из композиционных и традиционных материалов*. Москва, Физматлит, 2008. 256 с.
- [5] Кармишин А.В., Лясковец В.А., Мяченков В.И. и др. *Статика и динамика оболочечных конструкций*. Москва, Машиностроение, 1975. 376 с.
- [6] Кабанов В.В., Железнов Л.П. К расчету цилиндрической оболочки методом конечных элементов. *Прикладная механика*, 1985, т. 21, № 9, с. 35–38.
- [7] Железнов Л.П., Кабанов В.В. Исследование нелинейного деформирования и устойчивости некруговых цилиндрических оболочек при осевом сжатии и внутреннем давлении. *СО РАН, ПМТФ*, 2002, т. 43, № 4, с. 161–169.
- [8] Бойко Д.В., Железнов Л.П., Кабанов В.В. Нелинейное деформирование и устойчивость дискретно-подкрепленных овальных цилиндрических композитных оболочек при поперечном изгибе и внутреннем давлении. *Проблемы машиностроения и надежности машин*, 2014, № 6, с. 23–30.
- [9] Постнов В.А., Хархурим И.Я. *Метод конечных элементов в расчетах судовых конструкций*. Ленинград, Судостроение, 1974. 341 с.
- [10] Канторович Л.В., Акилов Г.П. *Функциональный анализ в нормированных пространствах*. Москва, Физматгиз, 1959. 684 с.
- [11] Уилкинсон Д., Райнш К. *Справочник алгоритмов на языке Алгол. Линейная алгебра*. Москва, Машиностроение, 1976. 390 с.
- [12] Олегин И.П., Максименко В.Н. *Теоретические основы методов расчета прочности элементов конструкций из композитов*. Новосибирск, изд-во НГТУ, 2006. 240 с.
- [13] Кабанов В.В. *Устойчивость неоднородных цилиндрических оболочек*. Москва, Машиностроение, 1982. 256 с.

## References

- [1] Vasil'yev V.V. *Mekhanika konstruksiy iz kompozitnykh materialov* [Mechanics of composite constructions]. Moscow, Mashinostroenie Publ., 1988. 272 p. (In Russ.).
- [2] Vanin G.A., Semenyuk N.P., Emel'yanov R.F. *Ustoychivost' obolochek iz armirovannykh materialov* [Stability of shells from reinforced materials]. Kiev, Naukova Dumka Publ., 1978. 211 p. (In Russ.).
- [3] Alfutov N.A., Zinov'yev P.A., Popov B.G. *Raschet mnogosloynnykh plastin i obolochek iz kompozitsionnykh materialov* [Calculation of multilayer plates from composites]. Moscow, Mashinostroenie Publ., 1984. 263 p. (In Russ.).

- [4] Bakulin V.N., Gusev E.L., Markov V.G. *Optimal'noe proektirovanie konstruksiy iz kompozitsionnykh i traditsionnykh materialov* [Optimum design of constructions from composite and conventional materials]. Moscow, Fizmatlit Publ., 2008. 256 p. (In Russ.).
- [5] Karmishin A.V., Lyaskovets V.A., Myachenkov V.I., et al. *Statika i dinamika obolocheknykh konstruksiy* [Statics and dynamics of shell constructions]. Moscow, Mashinostroenie Publ., 1975. 376 p. (In Russ.).
- [6] Kabanov V.V., Zheleznov L.P. On calculation of cylindrical shell using finite elements method. *Prikladnaya mekhanika*, 1985, vol. 21, no. 9, pp. 35–38. (in Russ.).
- [7] Zheleznov L.P., Kabanov V.V. Nonlinear deformation and stability of noncircular cylindrical shells under internal pressure and axial compression. *SO RAN, PMTF*, 2002, vol. 43, no. 4, pp. 161–169. (In Russ.). (Eng. version: *J. Appl. Mech. Tech. Phys.*, 2002, vol. 43, no. 4, pp. 617–621, doi: <https://doi.org/10.1023/A:1016066001346>)
- [8] Boyko D.V., Zheleznov L.P., Kabanov V.V. Nonlinear deformation and stability of discretely-supported egg-shaped cylindrical composite shells under transversal bending and internal pressure. *Problemy mashinostroeniya i nadezhnosti mashin*, 2014, no. 6, pp. 23–30. (In Russ.). (Eng. version: *J. Mach. Manuf. Reliab.*, 2014, vol. 43, no. 6, pp. 470–476, doi: <https://doi.org/10.3103/S1052618814060181>)
- [9] Postnov V.A., Kharkhurim I.Ya. *Metod konechnykh elementov v raschetakh sudovykh konstruksiy* [Finite elements method on calculation of sip constructions]. Leningrad, Sudostroenie Publ., 1974. 341 p. (In Russ.).
- [10] Kantorovich L.V., Akilov G.P. *Funktsional'nyy analiz v normirovannykh prostranstvakh* [Functional analysis in normalized spaces]. Moscow, Fizmatgiz Publ., 1959. 684 p. (In Russ.).
- [11] Wilkinson J.H., Reinsch C. *Handbook for automatic computation. Vol. II. Linear algebra*. Springer, 1971. 441 p. (Russ. ed.: *Spravochnik algoritmov na yazyke Algol. Lineynaya algebra*. Moscow, Mashinostroenie Publ., 1976. 390 p.)
- [12] Olegin I.P., Maksimenko V.N. *Teoreticheskie osnovy metodov rascheta prochnosti elementov konstruksiy iz kompozitov* [Theoretical foundations of calculation methods for composite elements strength]. Novosibirsk, izd-vo NGTU Publ., 2006. 240 p. (In Russ.).
- [13] Kabanov V.V. *Ustoychivost' neodnorodnykh tsilindricheskikh obolochek* [Strength of non-uniform cylindrical shells]. Moscow, Mashinostroenie Publ., 1982. 256 p. (In Russ.).

Статья поступила в редакцию 26.05.2021

## Информация об авторе

**ЖЕЛЕЗНОВ Лев Петрович** — доктор технических наук, старший научный сотрудник, заместитель начальника отделения усталостной и статической прочности, начальник аспирантуры. ФГУП «Сибирский научно-исследовательский институт авиации имени С.А. Чаплыгина» (630051, Новосибирск, Российская Федерация, ул. Ползунова, д. 21, e-mail: [Zgeleznov@sibnia.ru](mailto:Zgeleznov@sibnia.ru)).

## Information about the author

**ZHELEZNOV Lev Petrovich** — Doctor of Science (Eng.), Senior Researcher, Deputy Head of Department of fatigue and static strength, Head of the Postgraduate Department. Siberian Aeronautical Research Institute named after S.A. Chaplygin (630051, Novosibirsk, Russian Federation, Polzunova Str., Bldg. 21, e-mail: [Zgeleznov@sibnia.ru](mailto:Zgeleznov@sibnia.ru)).

### Просьба ссылаться на эту статью следующим образом:

Железнов Л.П. Исследование влияния порядка укладки монослоев на устойчивость композитной цилиндрической оболочки. *Известия высших учебных заведений. Машиностроение*, 2022, № 1, с. 71–81, doi: 10.18698/0536-1044-2022-1-71-81

### Please cite this article in English as:

Zheleznov L.P. Study of the Effect of the Monolayers Stacking Sequence on the Composite Cylindrical Shell Stability. *BMSTU Journal of Mechanical Engineering*, 2022, no. 1, pp. 71–81, doi: 10.18698/0536-1044-2022-1-71-81