ДОДОНОВ
Владимир Владимирович
кандидат технических
наук, доцент
кафедры «Металлорежущие
станки»
(МГТУ им. Н.Э. Баумана)

УДК 621.9.06:51-74

Использование элементов теории массового обслуживания для анализа производительности и надежности автоматизированных станочных систем

В.В. Додонов

Рассмотрены возможности использования элементов теории массового обслуживания для анализа производительности и надежности автоматизированных станочных систем. Приведены расчетные формулы, методики и числовые примеры расчетов. Предлагаемая в статье методика расчетов параметров автоматизированных станочных систем, может быть использована при выполнении начальных этапов проектирования автоматизированного станочного оборудования.

Ключевые слова: теория массового обслуживания, автоматизированные станочные системы, проектные расчеты надежности и производительности.

The article considers the opportunities of using the queueing theory elements to analyze the productivity and the reliability of automated machine tool systems. The design formulas, methods and numerical examples of calculations are presented. The offered method for calculation of the automated machine tool systems parameters can be used during the initial stages of designing the automated machine tool equipment.

Keywords: queueing theory, automated machine tool systems, design calculation of reliability and productivity.

При проектировании автоматизированных станочных систем приходится сталкиваться с работой своеобразных систем, называемых системами массового обслуживания (СМО) [2, 3]. Примерами таких систем могут служить: станки, системы управления, загрузочные роботы, накопители. Каждая СМО состоит из какого-то числа обслуживающих единиц (или «приборов»), которые будем называть каналами обслуживания.

Различают одноканальные и многоканальные СМО.

Всякая СМО предназначена для обслуживания какого-то потока заявок (или «требований»), поступающих в какие-то случайные моменты времени. Обслуживание заявки продолжается какое-то, вообще говоря, случайное время $T_{об}$, после чего канал освобождается и готов к приему следующей заявки. Случайный характер потока заявок и времен обслуживания приводит к тому, что в какие-то периоды времени на входе СМО скапливается излишне большое число заявок (они либо становятся в очередь, либо покидают СМО необслуженными); в другие же периоды СМО будет работать с недогрузкой или вообще простаивать.

Процесс работы СМО представляет собой случайный процесс с дискретными состояниями и непрерывным временем; состояние СМО меняется скачком в моменты появления каких-то событий (или прихода новой заявки, или окончания обслуживания, или момента, когда заявка, которой надоело ждать, покидает очередь) [2].

При использовании теории массового обслуживания большое значение имеют так называемые марковские случайные процессы с дискретными состояниями и непрерывным временем. Процесс называется процессом с дискретными состояниями, если его возможные состояния S_1 S_2, S_3,... можно заранее перечислить (перенумеровать), и переход системы из состояния в состояние происходит «скачком», практически мгновенно. Пример такого процесса: гибкая производственная система (ГПС) состоит из двух гибких производственных модулей (ГПМ), каждый из которых в случайный момент времени может выйти из строя (отказать), после чего мгновенно начинается ремонт одного из ГПМ, тоже продолжающийся заранее неизвестное, случайное время. Возможные состояния системы:

S_0 — оба ГПМ исправны;

S_1 — первый ГПМ ремонтируется, второй исправен;

S_2 — второй ГПМ ремонтируется, первый исправен;

S_3 — оба ГПМ ремонтируются.

Для упрощения считаем, что все остальные подсистемы ГПС практически не влияют на отказы ГПС, т. е. обладают значительно большей надежностью, чем ГПМ.

Переходы системы S из состояния в состояние происходят практически мгновенно, в случайные моменты выхода из строя того или другого ГПМ или окончания ремонта.

Важной характеристикой потока событий является его интенсивность λ — среднее число событий, приходящееся на единицу времени. Интенсивность потока может быть как постоянной (λ = const), так и переменной, зависящей от времени t.

Рассматривая марковские процессы с дискретными состояниями и непрерывным временем, удобно будет представлять, что все переходы системы S из состояния в состояние происходят под действием каких-то потоков событий (поток вызовов, поток отказов, поток восстановлений и т. д.). Если все потоки событий, переводящие систему S из состояния в состояние — простейшие, то процесс протекающий в системе, будет марковским. Для наглядности удобно на графе состояний у каждой стрелки проставлять интенсивность того потока событий, который переводит систему по данной стрелке. Обозначим λ_{ij} интенсивность потока событий, переводящего систему из состояния S_i в S_j. Граф состояний с проставленными у стрелок интенсивностями называют размеченным.

Построим размеченный граф состояний для гибкой производственной системы (рис. 1), из двух ГПМ. Состояния системы:

S_0 — оба ГПМ исправны;

S_1 — первый ГПМ ремонтируется, второй исправен;

S_2 — второй ГПМ ремонтируется, первый исправен;

S_3 — оба ГПМ ремонтируются.

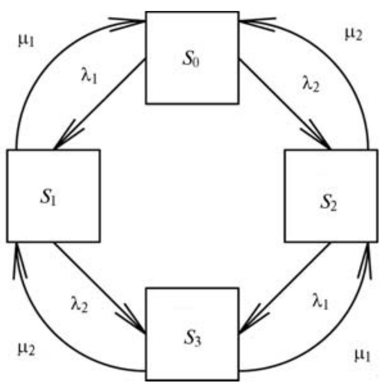

Рис. 1. Размеченный граф состояний системы

Интенсивности потоков событий, переводящих систему из состояния в состояние, будем вычислять, предполагая, что среднее время ремонта ГПМ не зависит от того, ремонтируется ли один ГПМ или оба сразу. Найдем все интенсивности потоков событий, переводящих систему из состояния в состояние. Пусть система находится в состоянии S_0. Какой поток событий переводит ее в состояние S_1? Очевидно, поток отказов первого ГПМ. Его интенсивность λ_1 равна единице, деленной на среднее время безотказной работы первого ГПМ. Какой поток событий переводит систему обратно из S_1 в S_0? Очевидно, поток «окончание ремонтов» первого ГПМ. Его интенсивность μ_1 равна единице, деленной на среднее время ремонта первого ГПМ. Аналогично вычисляют интенсивности потоков событий, переводящих систему по всем стрелкам графа. Имея в своем распоряжении размеченный граф состояний системы, легко построить математическую модель данного процесса.

Пусть рассматривается система S, имеющая n возможных состояний S_1, S_2, ..., S_n. Назовем вероятностью i-го состояния вероятность $pi(t)$ того, что в момент t система будет находиться в состоянии S_i. Очевидно, что для любого момента сумма всех вероятностей состояний равна единице:

$$\sum_{i=1}^{n} p_i = 1. \qquad (1)$$

Имея в своем распоряжении размеченный граф состояний, можно найти все вероятности состояний $pi(t)$ как функции времени. Для этого составляют и решают так называемые уравнения Колмогорова — особый вид дифференциальных уравнений, в которых неизвестными функциями являются вероятности состояний. Поставим теперь вопрос: что будет происходить с вероятностями состояний при $t \to \infty$. Будут ли $p_1(t)$, $p_2(t)$,... стремиться к каким-то пределам? Если эти пределы существуют и не зависят от начального состояния системы, то они называются финальными вероятностями состояний. Финальные вероятности будем обозначать теми же буквами p_1, p_2, ..., что и сами вероятности состояний, но разумея под ними уже не переменные величины (функции времени), а постоянные числа. Очевидно, они тоже образуют в сумме единицу.

При $t \to \infty$ в системе S устанавливается предельный стационарный режим, в ходе которого система случайным образом меняет свои состояния, но их вероятности уже не зависят от времени. Финальную вероятность состояния S_i можно истолковать как среднее относительное время пребывания системы в этом состоянии. Например, если система S имеет три состояния S_1, S_2, S_3 и их финальные вероятности равны 0,2, 0,3 и 0,5, это значит, что в предельном, стационарном режиме система в среднем 0,2 времени проводит в состоянии S_1, 0,3 — в состоянии S_2 и 0,5 — в состоянии S_3.

Используя уравнения Колмогорова, можно записать линейные алгебраические уравнения для финальных вероятностей состояния системы [2]:

$$\begin{cases} (\lambda_1 + \lambda_2) p_0 = \mu_1 p_1 + \lambda_2 p_2; \\ (\lambda_2 + \mu_1) p_1 = \lambda_1 p_0 + \mu_2 p_3; \\ (\lambda_1 + \mu_2) p_2 = \lambda_2 p_0 + \mu_1 p_3; \\ (\mu_1 + \mu_2) p_3 = \lambda_2 p_1 + \lambda_1 p_2. \end{cases} \qquad (2)$$

Зададимся численными значениями интенсивностей отказов и восстановлений первого и второго ГПМ $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$, $\mu_1 = 2$, $\mu_2 = 3$ и решим систему (размерности λ_1, λ_2, μ_1 и μ_2 — ч$^{-1}$). Отбросим четвертое уравнение, добавив вместо него нормировочное условие $p_1 + p_2 + p_3 + p_4 = 1$. Тогда уравнения (2) примут следующий вид:

$$\begin{cases} 3p_0 = 2p_1 + 3p_2; \\ 4p_1 = p_0 + 3p_3; \\ 4p_2 = 2p_0 + 2p_3; \\ p_0 + p_1 + p_2 + p_3 = 1. \end{cases} \qquad (3)$$

Решая их, получим:

$$p_0 = \frac{6}{15} = 0{,}40;\ p_1 = \frac{3}{15} = 0{,}20;$$
$$p_2 = \frac{4}{15} = 0{,}27;\ p_3 = \frac{2}{15} = 0{,}13,$$

т. е. в предельном, стационарном режиме система S в среднем 40% времени будет проводить в состоянии S_0 (оба ГПМ исправны), 20% — в состоянии S_1 (первый ГПМ ремонтируется, второй работает), 27% — в состоянии S_2 (второй ГПМ ремонтируется, первый работает) и 13%—в состоянии S_3 полной негодности (оба ГПМ ремонтируются). Знание этих финальных вероятностей может помочь оценить среднюю эффективность работы системы и загрузку ремонтных служб. Предположим, что система S в состоянии S_0 (полностью исправная) имеет производительность 8 шт./ч, в состоянии S_1 — 3 шт./ч, в состоянии S_2 — 5 шт./ч, в состоянии S_3 — 0. Тогда в предельном, стационарном режиме средняя производительность ГПС [5]

$$Q = 0{,}40 \cdot 8 + 0{,}20 \cdot 3 + 0{,}27 \cdot 5 = 5{,}15.$$

Оценим загрузку ремонтных служб (рабочих), занятых ремонтом первого и второго ГПМ. ГПМ 1 ремонтируется долю времени, равную

$$p_1 + p_3 = 0{,}20 + 0{,}13 = 0{,}33;$$

ГПМ 2 ремонтируется долю времени $p_2 + p_3 = 0{,}40$ [2].

Обслуживание группы станков с ЧПУ одним промышленным роботом [3]

Во время смены заготовки станок стоит, причем соответствующее время $T_{\text{сз}}$ относится к одной обрабатываемой детали. Время ожидания при многостаночном обслуживании $T_{\text{мо}}$ является частью цикловых потерь. Среднее время цикла и среднее время обслуживания связано с тем, что заказы на обслуживание носят случайный характер. Средняя частота или интенсивность поступления заказов на обслуживание в единицу времени может быть записана в виде:

$$\lambda = \frac{1}{\overline{\overline{T}}_{\text{а}}}, \qquad (4)$$

где $\overline{T}_{\text{а}}$ — среднее значение случайного периода времени.

Для станочных систем $\overline{T}_{\text{а}} = \overline{T}_{\text{ц}}$ и, следовательно,

$$\lambda = \frac{1}{\overline{\overline{T}}_{\text{ц}}},$$

где $\overline{T}_{\text{ц}}$ — среднее время цикла для всех n деталей, обрабатываемых в станочной системе на протяжении рассматриваемого интервала времени,

$$T_{\text{ц}} = \frac{\sum_{i=1}^{n} T_{\text{ц}i}}{n}. \qquad (5)$$

Варианты станочных систем при обслуживании трех станков одним транспортным устройством (манипулятором):

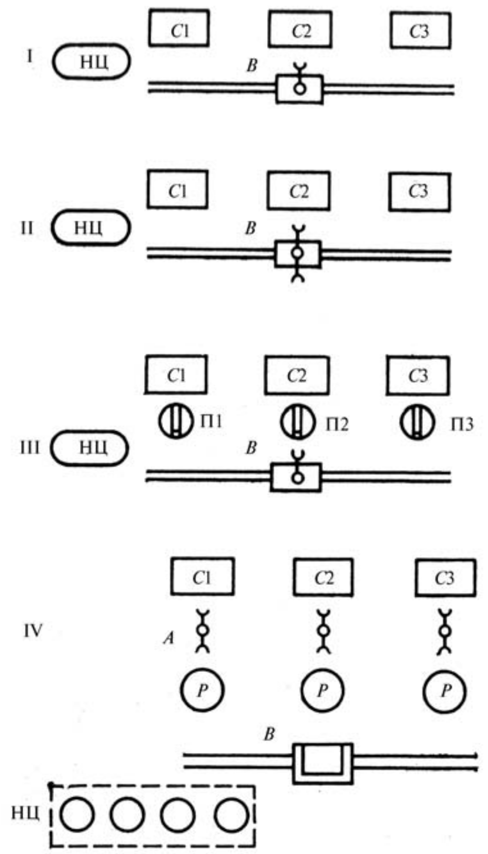

Рис. 2. Варианты автоматизированных станочных систем при обслуживании трех станков одним манипулятором:

С1, *С*2, *С*3 — станки; *НЦ* — центральный накопитель; *В* — манипулятор; П1, П2, П3 — перегружатели; *А* — автооператоры для кассет; *Р* — кассеты

Многочисленные и многолетние экспериментальные исследования показали, что распределение заказов близко к закону распределения Пуассона. В этом случае функция вероятности для заказов на обслуживание станков, вспомогательных и контрольных станций

$$p_k = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} \text{ для } \kappa = 0,1 ,..., m. \qquad (6)$$

Вероятность p_0 при $k = 0$ означает отсутствие заказов на обслуживание, p_1 — вероятность одного заказа и т. д. В предельном случае p_m означает одновременное требование на обслуживание от всех m объектов станочной системы.

Определим среднее время обслуживания. Вследствие различия времени смены заготовки на каждом станке, разного времени перегрузки деталей и особенно вследствие разного пути транспортной тележки время обслуживания каждого станка отлично от времени обслуживания других станков. Для дальнейшего расчета целесообразно определить среднее время обслуживания, исходя из прохождения через систему типовой детали:

$$\overline{T}_{\text{об}} = \frac{\sum_{1}^{i} n_{0i} T_{\text{об}i}}{\sum_{1}^{i} n_{0i}}. \qquad (7)$$

где i — число типовых транспортных перемещений в системе; $T_{\text{об}i}$ — время обслуживания одного станка, а также вспомогательной или измерительной станции; n_0 — число деталей с типовым транспортным перемещением. Если время перегрузки и время смены заготовок приблизительно одинаково, то среднее время обслуживания может быть приближенно найдено из уравнения

$$\overline{T}_{\text{об}} = 2T_1 + T_{\text{с.з}} + \frac{S_{\text{т}}}{V_{\text{т}}}. \qquad (8)$$

где $V_{\text{т}}$ — скорость транспортного устройства; $S_{\text{т}}$ — средний путь между станком и накопителем T_1 — время перегрузки; $T_{\text{с.з}}$ — время смены заготовки.

Интенсивность обслуживания станков

$$\nu = \frac{1}{T_{\text{об}}}. \qquad (9)$$

определяет среднее число выполненных в единицу времени заказов на обслуживание без нарушения нормального хода работы всей системы.

Характеристики станочных систем можно определить на стадии эскизного проектирования посредством теории массового обслуживания и выбрать целесообразный вариант с минимальными потерями. Для расчета должны быть известны следующие: λ — интенсивность заявок на обслуживание; m — число станков, измерительных и вспомогательных станций в системе; ν — интенсивность обслуживания.

В станочной системе число заявок на обслуживание может быть равно $k = 0, 1, 2, ..., m,$ где m — общее число станков и других рабочих позиций. Поэтому возможны следующие состояния системы:

E_0 ($k = 0$) — все станки работают, манипулятор стоит;

E_1 ($k = 1$) — все станки, кроме одного, работают, манипулятор обслуживает станок, от которого поступила заявка на смену заготовок;

E_2 ($k = 2$) — работают ($m - 2$) станка, на одном станке идет смена заготовки, один станок ожидает обслуживания;

E_3 ($k = 3$) — работают ($m - 3$) станка, один станок обслуживается манипулятором, два станка ожидают в очереди исполнения заказа;

E_m($k = n$) — все станки стоят, один станок обслуживается манипулятором, остальные ожидают очереди исполнения заказа.

Вероятность перехода в состояние E_k из одного из возможных состояний $E_1...E_m$ зависит от случайного поступления заявок на обслуживание, связанных со временем цикла и временем на выполнение обслуживания. В соответствии с теорией массового обслуживания вероятность перехода в состояние E_k [3]:

$$p_k = \frac{m!}{(m-k)!}\left(\frac{\lambda}{\nu}\right)^k p_0, \qquad (10)$$

где $\kappa = 1, 2, ..., m$.

Вероятность того, что все станки работают

$$p_0 = \frac{1}{1 + m\frac{\lambda}{\nu} + \sum_{k=2}^{m} \frac{m!}{(m-k)!}\left(\frac{\lambda}{\nu}\right)^k}. \qquad (11)$$

Манипулятор (обслуживающее устройство) работает при состояниях системы от E_1 до E_m, вероятность его простоя

$$\overline{A}_{\text{м}} = \sum_{k=1}^{m} p_k. \qquad (12)$$

Число станков, ожидающих обслуживания и находящихся в очереди на исполнение заказа, вытекает из состояний E_2 — E_m. При этом станок обслуживается, а (k – 1) станков ждут обслуживания; среднее их число

$$n_с = \sum_{k=2}^{m} (k-1)\, p_k. \quad (13)$$

Коэффициент простоя одного станка из-за ожидания при многостаночном обслуживании:

$$k_с = \frac{n_с}{m} = \frac{1}{m} \sum_{k=2}^{m} (k-1)\, p_k. \quad (14)$$

Средняя недогрузка одного станка

$$\overline{A}_с = \frac{1}{m} \sum_{k=0}^{m} (m-k)\, p_k. \quad (15)$$

Пример 1. Для станочной системы, включающей четыре станка и один обслуживающий манипулятор, надо определить средний простой станков и манипулятора, а также коэффициент простоя из-за многостаночного обслуживания. Среднее время цикла обработки всего ассортимента деталей $\overline{T}_ц = 8$ мин, а среднее время обслуживания станков манипулятором $\overline{T}_{об} = 0{,}5$ мин.

Определим по уравнению важное для последующих расчетов отношение

$$\rho = \frac{\lambda}{\nu} = \frac{0{,}5}{8} = 0{,}0625.$$

Вероятность p_0 того, что все станки работают, а манипулятор стоит, рассчитаем по уравнению (11):

$$p_0 = 1/(1 + 4 \cdot 0{,}0625 + \frac{4}{(4-2)!} 0{,}0625^2 +$$

$$+ \frac{4}{(4-3)!} 0{,}0625^3 + 0{,}0625^4) = 0{,}7705.$$

Вероятности p_k могут быть определены в соответствии с рекуррентной формулой $p_k = (m-k+1)\rho p_{k-1}$:

$$p_1 = (4-0)0{,}0625 \cdot 0{,}7705 = 0{,}1926;$$

$$p_2 = (4-1)0{,}0625 \cdot 0{,}1926 = 0{,}0361.$$

Результаты всех расчетов позволяют для данной системы определить средний коэффициент загрузки манипулятора:

$$\overline{A}_м = 0{,}234, \text{ т.е. } \overline{A}_м = 23\%.$$

Средняя недогрузка одного станка вследствие ожидания обслуживания манипулятором:

$$\overline{A}_с = \frac{3{,}7365}{4} = 0{,}934, \text{ т.е. } \overline{A}_с = 93{,}4\%.$$

Коэффициент простоя одного станка по уравнению (14):

$$k_с = \frac{0{,}046}{4} = 0{,}0115, \text{ т.е. } k_с = 1{,}15\%.$$

Пример 2. Та же станочная система, что и в примере 1, должна обрабатывать другой набор деталей со средним временем цикла обработки на станке $\overline{T}_ц = 4$ мин. При том же времени обслуживания, что и в примере 1, находим отношение

$$\rho = \frac{\lambda}{\nu} = \frac{0{,}5}{4} = 0{,}125.$$

Вероятность p_0 того, что все станки работают,

$$p_0 = 0{,}576, \text{ т.е. } p_0 = 57{,}6\%.$$

По сравнению с примером 1 вероятность p_0 уменьшилась за счет сокращения времени цикла. С другой стороны, возросли вероятности $p_1 \ldots p_4$, когда станки заказывают подачу новых заготовок. В этом случае

$$\overline{A}_м = 0{,}426, \text{ т.е. } \overline{A}_м = 42{,}6\%;$$

$$\overline{A}_с = \frac{3{,}410}{4} = 0{,}853, \text{ т.е. } \overline{A}_с = 85{,}3\%;$$

$$k_с = \frac{0{,}1707}{4} = 0{,}0427, \text{ т.е. } k_с = 4{,}27\%.$$

В связи с сокращением времени цикла $T_ц$ вдвое по сравнению с $T_ц$ в примере 1, соответственно удвоилось число операций манипулятора, а простой станков при многостаночном обслуживании возрос примерно в 4 раза. При столь относительно больших потерях времени вследствие многостаночного обслуживания необходим дополнительный экономический анализ и рассмотрение других вариантов ввода деталей в систему и их доставки к станкам.

Выводы

1. Математический аппарат теории массового обслуживания позволяет достаточно эффективно анализировать и рассчитывать характеристики проектируемых автоматизированных станочных систем.

2. Производительность и надежность гибкой производственной системы может быть рассчитана на основе анализа потоков отказов и потока восстановлений входящих в нее гибких производственных модулей.

3. Эффективность эксплуатации автоматизированной станочной системы в значительной степени зависит от времени рабочего цикла для обработки одной детали.

Литература

1. *Вентцель Е.С.* Теория вероятностей. М.: Наука, 1964.

2. *Вентцель Е.С.* Исследование операций: Задачи, принципы, методология. М.: Наука, Главная редакция физико-математической литературы, 1980. 208 с.

3. Автоматические станочные системы / В.Э. Пуш, Р. Пигерт, В.Л. Сосонкин; Под ред. В.Э. Пуша. М.: Машиностроение, 1982. 319 с.

4. Волчкевич Л.И. Автоматизация производственных процессов. М.: Машиностроение, 2007. 379 с.

Статья поступила в редакцию 07.11.2011