



**ЕРМАК**

**Владимир Николаевич**  
кандидат технических  
наук, доцент  
кафедры «Прикладная  
механика»  
(Кузбасский  
государственный  
технический университет  
(КузГТУ))

## Новый метод выявления и устранения избыточных связей в многоконтурных механизмах

**В.Н. Ермак**

*Предложен метод выявления и устранения избыточных связей в многоконтурных механизмах. Согласно этому методу механизм представляется как результат наложения простых (без разветвлений) незамкнутых кинематических цепей. При этом известная структурная формула записывается в приращениях и применяется к каждой цепи отдельно.*

**Ключевые слова:** избыточные связи, многоконтурные механизмы, структурная формула, простые кинематические цепи.

*The new method of revealing and elimination of redundant (passive) constraints in multicircuit mechanisms is offered. According to the method the mechanism is made up of simple (without branching) open-looped kinematic chains, with the known structural formula being signified in increments and applied to each chain separately.*

**Keyword:** redundant constraints, multicircuit mechanisms, structural formula, simple open-looped kinematic chains.

**В** теоретической механике понятие «связь» определяют как всякое ограничение, накладываемое одним телом на движение другого. Связи в механизмах возникают когда звенья соприкасаются друг с другом. Каждая точка касания, взятая в отдельности, ограничивает движение одного звена относительно другого и, следовательно, она — связь. Если нет трения, что подразумевается далее, то связей столько, сколько точек касания. Однако не все такие связи равноценны. Если их сначала удалить, а затем возвращать по одной, то в зависимости от формы соприкасающихся поверхностей и порядка возвращения связей одни из них будут влиять на взаимное движение звеньев, другие нет. Связи, влияющие на движение, называют активными, а не влияющие — пассивными. В общем случае активные связи пар можно подразделить на необходимые и избыточные для механизма. Избыточными для механизма являются те из активных связей кинематических пар, удаление которых не приводит к изменению числа степеней свободы механизма. Связи, оставшиеся после удаления всех избыточных, называют необходимыми.

Не составляет труда выявление и устранение избыточных связей в одноконтурных механизмах. Обе эти задачи — выявление и устранение — решают с помощью структурных формул механизма. Согласно одной из них, число избыточных связей

$$q = w + s - 6n, \quad (1)$$

где  $w$  — число степеней свободы механизма;  $s$  — суммарное число активных связей кинематических пар;  $n$  — число подвижных звеньев.

При синтезе, т. е. при устранении избыточных связей, задаются значениями  $w$ ,  $n$ ,  $q$  и вычисляют  $s$ . Найденное значение  $s$  раскладывают всеми возможными, отличающимися по составу, способами на  $p$  кинематических пар синтезируемого механизма. В одноконтурных механизмах  $p = n + 1$ . Остановившись на одном из вариантов раскладки связей, строят схему механизма. Правильность построения проверяют по числу степеней свободы или по чувствительности механизма к неточностям его звеньев.

Сложности возникают когда механизм многоконтурный. Известно, что избыточные связи существуют только в замкнутых контурах, поэтому задачу выявления и устранения этих связей в многоконтурных механизмах все авторы, начиная с О.Г. Озола [1] и Л.Н. Решетова [2], решают поконтурно, применяя одну из известных структурных формул механизма. Озол отметил [1, с. 56], что в некоторых случаях числа избыточных связей, найденные по контурам и в целом, не совпадают. Причину несовпадения он усматривает в том, что одна избыточная связь — в его примере она одна — принадлежит одновременно обоим контурам. Впоследствии такая связь стала называться межконтурной. В статье [3] проанализирована причина несовпадения и предложен новый метод анализа и синтеза, при котором проблема межконтурных связей не возникает.

Затруднения, с которыми сталкиваются сторонники поконтурного метода, иллюстрирует

упомянутый выше пример Озола (рис. 1, *a*) — главная часть центробежного регулятора Уатта. Пара 3—6 в нем цилиндрическая четырехсвязная, остальные вращательные пятисвязные. Общее число избыточных связей

$$q = w + s - 6n = 1 + 34 - 65 = 5.$$

Механизм содержит два независимых замкнутых контура, например  $K_1$  и  $K_2$ . При поконтурном методе находят, что в первом и втором контурах число избыточных связей

$$q_1 = w_1 + s_1 - 6n_1 = 1 + 34 - 65 = 1 + 19 - 63 = 2;$$

$$q_2 = w_2 + s_2 - 6n_2 = 1 + 34 - 65 = 1 + 19 - 63 = 2.$$

Как видно, общее число  $q$  избыточных связей не совпадает с их суммой  $q_1 + q_2$ . В чем причина несовпадения?

Определение числа избыточных связей в каждом контуре отдельно равносильно определению этого числа в двух совершенно новых механизмах (рис. 1, *b*), каждый из которых обладает своими свойствами, и только один из них, например, левый, является полновесной частью целого. То, что остается от исходного механизма после отделения его левой части, состоит всего лишь из звеньев 4, 5, а не звеньев 4, 5, 6б, 3б. Поэтому нет никакой гарантии, что суммирование найденного в новых механизмах даст то же, что есть в исходном.

Чтобы получить правильный ответ необходимо шаг за шагом проследить за объединением предварительно разъединенных контуров и превращением их в исходный механизм. На первом этапе этого превращения сливаются в одно целое звенья 6а, 6б, а также 3а, 3б (рис. 1, *в*). Эти слияния приводят к образованию замкнутого

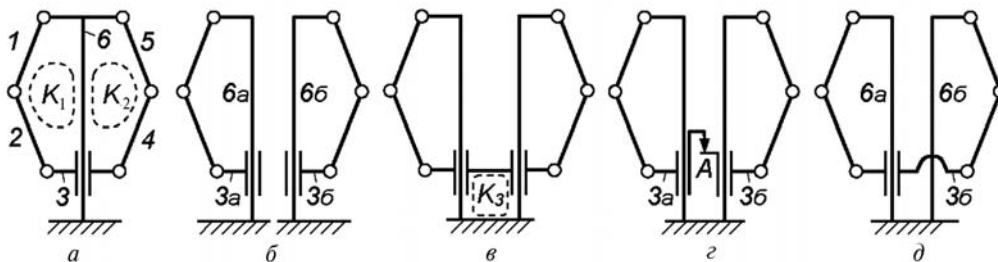


Рис. 1. Контурные и межконтурные связи регулятора Уатта:

*a* — независимые замкнутые контуры  $K_1$ ,  $K_2$  регулятора; *b* — разложение регулятора на контуры; *v* — объединение исходных контуров и возникновение нового замкнутого контура  $K_3$ ; *z* — необходимая и достаточная связь (в точке *A*) нового контура; *d* — удаление цилиндрической пары и приведение регулятора к исходной структуре

контура  $K_3$ . Как отмечалось выше, избыточные связи существуют только в замкнутых контурах. Слияние звеньев  $3a$ ,  $3b$ , производимое после слияния звеньев  $6a$ ,  $6b$ , вносит в контур  $K_3$  шесть связей, однако для кинематической эквивалентности достаточно одной (рис. 1,  $z$ ). Эту связь создает касание звеньев  $3a$ ,  $3b$  в точке  $A$ . Следовательно, пять из шести связей, внесенных в контур  $K_3$ , оказываются избыточными. На втором этапе, следующем за показанным на рис. 1,  $в$ , удаляют одну из цилиндрических пар, например  $3b-6b$  (рис. 1,  $д$ ).

Теперь звено  $3b$  не касается  $6b$ , обходя его сверху или снизу. Чтобы придать механизму первоначальный вид, показанный на рис. 1,  $а$ , необходимо сдвинуть направляющую  $6b$  до слияния с  $6a$  и укоротить плечо  $3b$ . Это не изменит ни структуру, ни кинематику механизма, поэтому перерисовывать его не нужно.

Удаление цилиндрической пары уносит из контура  $K_3$  четыре избыточные связи. Они приняты за таковые потому, что после удаления число степеней свободы механизма остается прежним. Одна из пяти избыточных связей контура остается неудаленной, она и является причиной несовпадения общего числа избыточных связей с поконтурным.

В общем случае при объединении контуров возможно образование не одного, а нескольких новых контуров. На рисунке 2,  $а$  показан граф двухконтурного механизма. Вершинами графа (1, 2, 3 и т. д.) являются звенья механизма, а ребрами — кинематические пары. На рисунке 2,  $б$  контуры  $K_1$  и  $K_2$  изображены раздельно. При объединении этих контуров возникают контуры  $K_3$ ,  $K_4$  (рис. 2,  $в$ ). В каждом из них появляются свои избыточные связи. Часть этих связей уносится выпадающей из контура кинематической парой, например,  $A''$  — из контура  $K_3$  и  $B''$  — из контура  $K_4$ . Общее число избыточных связей состоит из исходных контурных, содержащихся в контурах  $K_1$ ,  $K_2$ , и оставшихся после всех преобразований в контурах  $K_3$ ,  $K_4$ . Так в общем случае можно преодолеть проблему межконтурных связей, однако нет смысла развивать этот трудоемкий метод.

Суть предлагаемого метода состоит в следующем. Из каких бы кинематических цепей

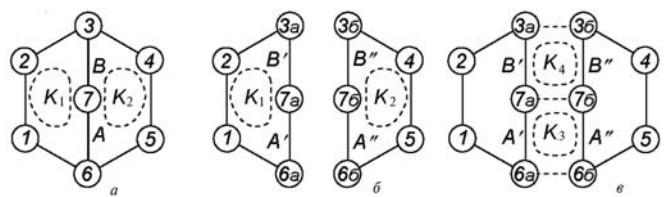


Рис. 2. Схема образования нескольких новых замкнутых контуров при объединении двух исходных:

$а$  — граф исходного двухконтурного механизма;  $б$  — разделение контуров;  $в$  — объединение контуров  $K_1$ ,  $K_2$ , приводящее к образованию двух новых контуров  $K_3$ ,  $K_4$

не был образован механизм — будь то цепи Ассура, замкнутые контуры или другие цепи — физическому приращению механизма должно соответствовать приращение всех структурных параметров этого механизма. Поэтому любую структурную формулу механизма, применяемую к отдельной его части, следует записывать в приращениях. Так формула (1) в приращениях имеет вид

$$\Delta q_i = \Delta w_i + \Delta s_i - 6\Delta n_i. \quad (2)$$

Все переменные, входящие в эту формулу, есть приращения, вызванные присоединением к ранее построенному или, иначе, предшествующему механизму кинематической цепи с номером  $i$ . Другими словами, приращения — это разность параметров механизма в состоянии *после* присоединения цепи и *до* него.

Символы приращений загромождают формулу. От многих из них легко избавиться, если учесть, что они совпадают с абсолютными параметрами цепи. Так, приращение  $\Delta q_i$  — это число избыточных связей  $q_i$ , вносимых  $i$ -й цепью. Приращения  $\Delta n_i$  и  $\Delta s_i$  совпадают, соответственно, с числом звеньев  $n_i$  и числом связей  $s_i$  во внешних и внутренних парах  $i$ -й цепи. Приращение числа степеней свободы представимо в виде

$$\Delta w_i = w_i^r - w_i^s,$$

где  $w_i^r$  — число степеней свободы  $i$ -й цепи относительно предшествующего механизма;  $w_i^s$  — число степеней свободы, отнятое  $i$ -й цепью у предшествующего механизма. Первое из этих чисел называется далее относительным

(отсюда индекс «*r*» от англ. *relative*), второе — изъятым (индекс «*s*» от англ. *subtract* — отнимать, вычитать). Относительное число степеней свободы  $w_i^r$  определяется в предположении, что предшествующий механизм заморожен, превращен в одно твердое тело. Изъятые число степеней свободы  $w_i^s$  — это приращение, но, в отличие от предыдущих приращений, оно представляет собой разность чисел степеней свободы предшествующего механизма в состоянии *до* и *после* присоединения цепи. При таком определении численное значение  $w_i^s$  всегда положительно или равно нулю. Изымающее действие этого приращения в формуле (3) учитывает знак «-».

После выражения всех приращений через абсолютные параметры цепи формула числа избыточных связей, вносимых этой цепью, принимает вид

$$q_i = w_i^r - w_i^s + s_i - 6n_i. \quad (3)$$

Как при анализе, так и при синтезе может быть полезной также структурная формула цепи в смешанном виде:

$$q_i = \Delta w_i + s_i - 6n_i. \quad (4)$$

Итак, имеем три вида структурной формулы цепи: в приращениях (2), в абсолютных параметрах (3) и в смешанном виде (4). Однако суть предлагаемого метода не исчерпывается выводом структурной формулы того или иного вида. При выявлении и устранении избыточных связей важно представлять механизм как результат наложения простых (по определению, принятому в теории механизмов) незамкнутых цепей, присоединяемых своими концами. Каждая такая цепь увеличивает число замкнутых контуров ровно на единицу и, следовательно, задача сводится к рассмотрению одноконтурного объекта, стойкой которого является предшествующий механизм. Если образовывать механизм наложением каких-то иных цепей, то этого преимущества не будет. Поскольку наслаиваются не контуры (замкнутые), а открытые (не замкнутые) цепи, то исчезает и проблема межконтурных связей.

Начинать образование механизма можно со стойки или более сложной системы, не содержащей избыточных связей. Присоединяемая цепь не может изменить количества избыточных связей в механизме, предшествующем присоединению, поэтому их усматривают во внешних и внутренних кинематических парах присоединяемой цепи.

Ниже приведены **примеры образования механизма наложением простых цепей**. Исходный механизм показан на рис. 3, *a*, способы его образования — на рис. 3, *б-г*.

На рисунке 3, *б* начальным объектом является стойка 0. Первой присоединяется цепь 3—4—5, второй — цепь 1—2. Судя по числу цепей, механизм двухконтурный. У цепи, присоединяемой к стойке,  $w^s = 0$ , так как изымать нечего, стойка и так неподвижна.

На рисунке 3, *в* первой присоединяется цепь 1—2—3—4, второй — «цепь» 5. Пример показывает, что допускаются цепи, состоящие из одного звена.

На рисунке 3, *г* начальный объект состоит из стойки и звеньев 1—4—5. Объект не содержит замкнутых контуров и, следовательно, в нем не может быть избыточных связей. Первой присоединяется цепь 2—3, но только к звеньям 1, 4. Во вторую очередь замыкается пара 3—5. Пара 3—5 представляет собой *пустую* цепь. На графе механизма пустой цепи соответствовало бы ребро, поэтому пустая цепь имеет все же некоторое зримое содержание. У пустой цепи

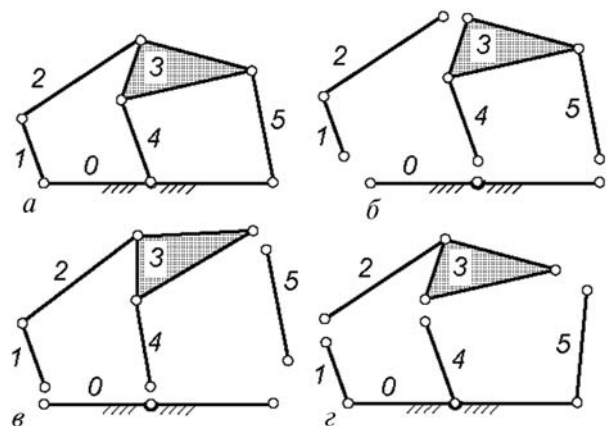


Рис. 3. Примеры образования механизма наложением простых цепей:

*a* — исходный механизм;  
*б-г* — варианты образования

всегда относительное число степеней свободы  $w^r = 0$ , так как нет тела, обладающего этим числом. В то же время, число степеней свободы  $w^s$ , отнятое у предшествующего механизма, может быть  $w^s \geq 0$ .

**Примеры выявления числа и места избыточных связей.** Согласно формуле (1), в механизме, приведенном на рис. 3, а и содержащем только вращательные пары, общее число избыточных связей  $q = w + s - 6n = 1 + 35 - 65 = 6$ . Во всех трех вариантах образования механизма, показанных на рис. 3, формула (3) дает следующие результаты:

рис. 3, б —  $q_1 = 1 - 0 + 20 - 63 = 3,$   
 $q_2 = 0 - 0 + 15 - 62 = 3;$

рис. 3, в —  $q_1 = 2 - 0 + 25 - 64 = 3,$   
 $q_2 = 0 - 1 + 10 - 61 = 3;$

рис. 3, г —  $q_1 = 0 - 0 + 15 - 62 = 3,$   
 $q_2 = 0 - 2 + 5 - 60 = 3.$

Сумма  $q_1 + q_2$  везде равна шести, что совпадает с общим числом избыточных связей и свидетельствует о правильности формулы (3) и правильности ее применения. Равенство  $q_1 = q_2$  обусловлено присутствием в механизме одинаковых по числу связей кинематических пар. При разных числах связей значение  $q_1$  может быть не равно  $q_2$ .

**Синтез.** Избыточные связи устраняют по цепям в порядке их присоединения. Как и при синтезе одноконтурных механизмов, для синтезируемой цепи задаются всеми ее параметрами, кроме  $s_i$ . При использовании формулы (4) задаются величинами  $q_i$ ,  $n_i$  и  $\Delta w_i$ . При этом, исходя из главного условия синтеза, принимают  $q_i = 0$ . Число звеньев  $n_i$  обычно оставляют без изменения, выбор  $\Delta w_i$  подчиняют уравнению подвижностей следующего вида:

$$w_0 + \Delta w_1 + \Delta w_2 + \dots + \Delta w_n = w, \quad (5)$$

где  $w_0$  и  $w$  — число степеней свободы начального и конечного объекта, соответственно. Если начальным объектом является стойка, то  $w_0 = 0$ . Конечным объектом является механизм в целом.

По принятым числовым значениям определяют необходимое число связей  $s_i$ . Согласно

формуле (4), при  $q_i = 0$  получают  $s_i = 6n_i - \Delta w_i$ . Найденное  $s_i$  раскладывают по кинематическим парам, количество которых  $p_i = n_i + 1$ . В соответствии с каждым из вариантов раскладки связей строят цепь. Ниже приведены примеры устранения избыточных связей.

**Пример 1.** Требуется устранить избыточные связи в механизме, изображенном на рис. 3, а, полагая, что он образован, как показано на рис. 3, б. В исходном виде первая цепь (3—4—5) имеет  $n_1 = 3$ ,  $\Delta w_1 = w_1^r - w_1^s = 1 - 0 = 1$ . Оставим эти параметры неизменными. После этого найдем  $s_1 = 6n_1 - \Delta w_1 = 6 \cdot 3 - 1 = 17$ ;  $p_1 = n_1 + 1 = 3 + 1 = 4$ . Семнадцать связей раскладываются по четырем кинематическим парам в следующих отличающихся по составу вариантах:

$$5 + 5 + 5 + 2; \quad 5 + 5 + 4 + 3; \quad 5 + 4 + 4 + 4.$$

Все прочие варианты являются перестановками приведенных и во внимание не принимаются, поскольку перестановки можно делать при построении схемы механизма. Остановимся на варианте  $5 + 5 + 4 + 3$ . В качестве четырехсвязной и трехсвязной пар возьмем цилиндрическую и шаровую пары. Подставим их, как показано на рис. 4, а.

Выбирая место и ориентацию пар в пространстве, необходимо следить за тем, чтобы число степеней свободы цепи получилось таким, как принято в условиях синтеза этой цепи ( $\Delta w_1 = 1$ ). Кроме того, новая цепь должна получиться кинематически эквивалентной исходной. В данном случае удовлетворяются оба эти требования. Однако если ось шарнира 3—4 расположить вдоль звена 4, то число степеней свободы будет таким, как требуется, но кинематика цепи станет совершенно другой, что недопустимо. Правильно подобрать пары и их

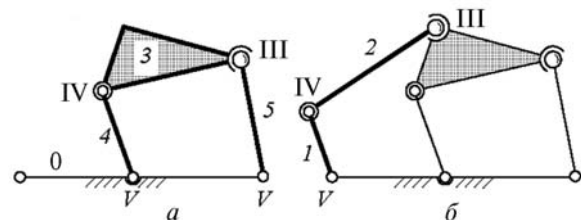


Рис. 4. Устранение избыточных связей наложением простых цепей:

а — присоединение к стойке цепи 3—4—5;  
 б — присоединение цепи 1, 2

ориентацию помогает также контроль чувствительности цепи к неточностям взаимного положения мест ее присоединения. Правильная цепь не должна сопротивляться любым взаимным перемещениям мест присоединения. Другие варианты цепи 3—4—5 строятся по тем же правилам, и поэтому их не рассматриваем.

Вторая цепь (1—2) имеет в исходном механизме  $n_2 = 2$ ,  $\Delta w_2 = w_2^r - w_2^s = 0 - 0 = 0$ . Оставим и эти параметры неизменными. По ним найдем:  $s_2 = 6n_2 - \Delta w_2 = 62 - 0 = 12$ ;  $p_2 = n_2 + 1 = 2 + 1 = 3$ . Выпишем варианты раскладки связей:  $5 + 5 + 2$ ;  $5 + 4 + 3$ ;  $4 + 4 + 4$ .

Остановимся на варианте  $5 + 4 + 3$ . Построим цепь, как показано на рис. 4, б. Она удовлетворяет всем условиям синтеза, что и требуется.

**Пример 2.** При синтезе цепей предыдущего примера значения  $n_i$  и  $\Delta w_i$  принимались такими же, как в исходной схеме. Решим ту же задачу при старых  $n_i$  и новых  $\Delta w_i$ . Уравнение подвижностей синтезируемых цепей имеет вид

$$w_0 + \Delta w_1 + \Delta w_2 = w.$$

Входящее в уравнение число степеней свободы начального объекта  $w_0 = 0$ . В отношении других членов уравнения примем  $\Delta w_1 = 2$ ;  $w = 1$ . Тогда

$$\Delta w_2 = w - w_0 - \Delta w_1 = 1 - 0 - 2 = -1.$$

При этих условиях:

$$s_1 = 6n_1 - \Delta w_1 = 63 - 2 = 61;$$

$$s_2 = 6n_2 - \Delta w_2 = 62 - (-1) = 63.$$

По сравнению с примером 1, числа звеньев не изменились, следовательно, числа пар прежние:  $p_1 = 4$ ;  $p_2 = 3$ . Число связей  $s_1$  разложим на  $5 + 5 + 3 + 3$ ,  $s_2$  — на  $5 + 5 + 3$ . Другие варианты раскладки не приводим, способ их получения уже известен. Пример механизма, построенного в соответствии с принятыми вариантами, показан на рис. 5.

До присоединения второй цепи первая обладает избыточной подвижностью. Эта подвижность состоит в том, что звено 3 может вращаться вокруг оси, проходящей через центры сферических шарниров. Вторая цепь изымает эту подвижность. Данный пример приведен для того, чтобы продемонстрировать возможность изъятия подвижности у предшествующего механизма.

Избежать межконтурных связей удалось С.Н. Кожевникову [4]. Он образует меха-

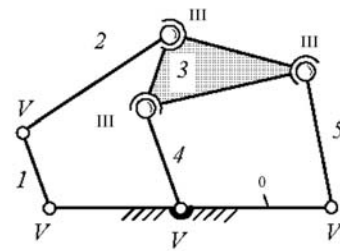


Рис. 5. Образование механизма без избыточных связей присоединением цепи 1, 2, изымающей избыточную подвижность у цепи 3—4—5

низм из древовидной цепи, которая получается размыканием какой-либо кинематической пары в каждом из независимых замкнутых контуров. Замыкая затем тот или иной контур, Кожевников подсчитывает по формуле типа (1) число избыточных связей предшествующего, затем последующего механизмов. Разницу — читай: приращение — Кожевников относит на счет кинематических пар замыкаемого контура. Фактически он имеет в виду только новую часть контура, а она представляет собой простую незамкнутую цепь, предлагаемую автором.

## Выводы

1. Раскрыта причина возникающего иногда несовпадения числа избыточных связей, найденных в механизме поконтурно и в целом.
2. При структурном анализе и синтезе механизма по частям, с какой бы то ни было целью, структурная формула механизма должна быть записана в приращениях своих параметров.
3. Если целью является определение числа избыточных связей и их устранение, то механизм следует образовывать наслаением простых незамкнутых кинематических цепей.

## Литература

1. *Озол О.Г.* Теория механизмов и машин; под ред. С.Н. Кожевникова; пер. с латыш. М.: Наука, 1984. 432 с.
2. *Решетов Л.Н.* Самоустанавливающиеся механизмы: Справочник. М.: Машиностроение, 1991. 288 с.
3. *Ермак В.Н.* Структурная формула произвольной цепи механизма / Материалы пятой научно-практической конференции по секции машиностроения и горных машин; под ред. Л.Т. Дворникова Новокузнецк, 1996. С. 13—18.
4. *Кожевников С.Н.* Механизмы оптимальной структуры // В кн. Кинематика, динамика и точность механизмов: Справочник; под ред. Г.В. Крейнина. М.: Машиностроение, 1984. С. 9—27.

Статья поступила в редакцию 30.11.2011