Расчет и конструирование машин

УДК 539.4

Эффективные оценки переходных режимов случайных колебаний в механических системах

А.С. Гусев, С.О. Найденов

Сложное поведение механических систем на неустановившихся режимах, приводящее к повышенному расходу энергии, а иногда и к отказам, требует более тщательного анализа их работы в таких условиях, особенно при случайных воздействиях. Причинами повышения энергоемкости и возникновения отказов в подобных системах являются выходы параметров систем за допустимые уровни в связи с особенностями функционирования на переходных режимах. Для решения возникающих проблем рассмотрена возможность анализа переходных процессов в механических системах, находящихся под воздействием случайных нагрузок. Приведены методы, позволяющие получить ориентировочные оценки параметров функционирования таких систем, что дает возможность делать заключение о их надежности. По представленным методикам получены конкретные параметры переходных процессов, протекающих в механических системах, что часто бывает невозможно при использовании прямых методов расчета. Таким образом, в работе показана возможность оценки переходных режимов даже в тех случаях, когда применение прямых методов для исследования процессов в сложной механической системе весьма затруднительно.

Ключевые слова: переходный процесс, отказ, параметры системы, случайные нагрузки, допустимый уровень, параметры функционирования, надежность.

Effective Estimations of Transient Vibrations in Mechanical Systems

A.S. Gusev, S.O. Naydenov

The complex behavior of mechanical systems of unsteady regimes, leading to increased energy consumption and sometimes to a failure, requires a more careful analysis of their work under these conditions, especially when actions are random. The reasons for increased energy consumption and failures in these

ГУСЕВ
Александр Сергеевич
(МГТУ им. Н.Э. Баумана)

GUSEV
Alexander Sergeevich
(Moscow, Russian Federation, Bauman Moscow State Technical University)

НАЙДЕНОВ
Сергей Олегович
(МГТУ им. Н.Э. Баумана)

NAYDENOV
Sergey Olegovich
(Moscow, Russian Federation, Bauman Moscow State Technical University)

systems are outputs of system parameters over the permissible level due to the specific features of transients. To address emerging problems the possibility of transient analysis in mechanical systems under the influence of random loads is considered. Given methods allow obtaining an approximate estimation of systems parameters and therefore to make a conclusions on their reliability. According to the presented methods the concrete transients parameters of mechanical systems were obtained that is often not possible using the direct methods of calculation. Thus, the paper shows the opportunity to estimate transients, even in those cases where the use of direct methods for the study of processes in a complex mechanical system is very difficult.

Keywords: transient, failure, system parameters, random loads, permissible level, operating parameters, reliability.

Рассмотрим механические системы, функционирование которых описывается уравнением

$$Lq(t)=\begin{cases} f(t), & t\ge 0;\\ 0, & t<0,\end{cases} \qquad (1)$$

где $L(P)=a_nP^{(n)}+\ldots+a_1P+a_0$ — линейный дифференциальный оператор ($P=d/dt$, a_0, ..., a_n — параметры); $f(t)$ — стационарный случайный процесс с заданной корреляционной функцией $K_f(\tau)$ и спектральной плотностью $S_f(\omega)$; $q(t)$ — обобщенная координата, вероятностные характеристики которой требуется определить на переходном к стационарному режиму колебаний.

Нестационарное решение уравнения (1) с нулевыми начальными условиями можно представить в виде интеграла Дюамеля [1, 2]:

$$q(t)=\int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau. \qquad (2)$$

Здесь $g(t-\tau)$ — функция Грина, которая определяется из решения уравнения

$$Lg(t-\tau)=\delta(t-\tau), \qquad (3)$$

где $\delta(t-\tau)$ — импульсная дельта-функция Дирака.

Решение уравнения (3) получаем в виде

$$g(t-\tau)=\sum_{r=1}^{r=n}\frac{1}{L'(\lambda_r)}e^{\lambda_r(t-\tau)}.$$

Здесь полином

$$L(\lambda)=a_n\lambda^n+\ldots+a_1\lambda+a_0,$$

«′» означает производную по λ; λ_r — корни уравнения $L(\lambda)=0$.

При $L(P)=P+\alpha$ имеем $L(\lambda)=\lambda+\alpha$, $L'(\lambda)=1$, $\lambda=-\alpha$, $g(t-\tau)=e^{-\alpha(t-\tau)}$.

Для системы с одной степенью свободы с коэффициентом демпфирования n и частотой свободных колебаний ω_0 имеем:

$$L(P)=P^2+2nP+\omega_0^2;\ L(\lambda)=\lambda^2+2n\lambda+\omega_0^2;$$
$$L'(\lambda)=2\lambda+2n;\ \lambda_{1,2}=-n\pm i\omega_n;$$
$$\omega_n=\sqrt{\omega_0^2-n^2};\ L'(\lambda_1)=2i\omega_n;\ L'(\lambda_2)=-2i\omega_n;$$
$$g(t-\tau)=\frac{1}{\omega_n}e^{-n(t-\tau)}\sin\omega_n(t-\tau).$$

Решение (2) уравнения (1) можно представить в следующем виде:

$$q(t)=\int_0^t\ldots=\int_{-\infty}^t\ldots-\int_{-\infty}^0\ldots=$$
$$=q_0(t)-\sum_{j=0}^{j=n-1}q_0^{(j)}(0)\tilde{q}_j(t), \qquad (5)$$

где $q_0(t)$ — стационарное решение уравнения (1); $q_0^{(j)}(0)$ — случайное значение j-й производной процесса $q_0(t)$ при $t=0$; $\tilde{q}_j$ — решение однородного уравнения (1) с начальными условиями $\tilde{q}_j=1$.

Корреляционную функцию нестационарного процесса $q(t)$ рассчитывают по формуле

$$K_q(t_1,t_2)=\langle q(t_1)q(t_2)\rangle, \qquad (6)$$

где <·> — операция усреднения.

Дисперсия процесса $q(t)$:

$$s_q^2(t)=K_q(t,t). \qquad (7)$$

Подстановка формулы (5) в (6) и (7) приводит к сложным выражениям, трудно используемым на практике [2, 3]. Так, для построения простейшей системы с одной степенью свободы имеем:

$$\tilde{q}_0(t)=e^{-nt}\left(\sin\omega t+\frac{n}{\omega}\sin\omega t\right);$$

$$\tilde{q}_1(t)=\frac{1}{\omega_n}e^{-nt}\sin\omega_n t;$$

$$K_q(t_1,t_2)=K_{q0}(t_2-t_1)-K_{q0}(t_1)\tilde{q}_0(t_2)+$$
$$+\dot{K}_{q0}(t_1)\tilde{q}_1(t_1)-K_{q0}(t_2)\tilde{q}_0(t_1)+$$
$$+K_{q0}(0)\tilde{q}_0(t_1)\tilde{q}_0(t_2)-\ddot{K}(0)\tilde{q}_1(t_1)\tilde{q}_2(t_2);$$

$$s_q^2(t) = s_{q0}^2 - 2K_{q0}(t)\tilde{q}_0(t) + \dot{K}_{q0}(t_1)\tilde{q}_1(t_1) +$$
$$+ K_{q0}(0)\tilde{q}_0^2(t) - \ddot{K}_{q0}(0);$$
$$s_q(0) = 0;\ s_q(\infty) = s_{q0}.$$

Здесь $K_{q_0}(\tau)$ — корреляционная функция стационарного решения; $s_{q_0}^2 = K_{q_0}(0)$ — соответствующая дисперсия.

В основу ориентировочных оценок положен тот факт, что механическая система в основном реагирует на воздействия, близкие к частоте ее собственных колебаний ω_0. Поэтому реальный случайный процесс $f(t)$ с переменным по частоте ω энергетическим спектром $S_f(\omega)$ можно заменить на эквивалентный белый шум с постоянным спектром $S_f(\omega_0)$. Интенсивность этого процесса $k_0 = 2\pi S_f(\omega_0)$, а корреляционная функция

$$K_f(\tau) = k_0\delta(\tau), \tag{8}$$

где $\delta(\tau)$ — дельта-функция.

В этом случае имеем [1, 3]:

$$K_{q_0}(\tau) = s_{q_0}^2 \mathrm{e}^{-n|\tau|}\left(\cos\omega_n\tau + \frac{n}{\omega_n}\sin\omega_n|\tau|\right); \tag{9}$$

$$s_{q_0}^2 = \frac{k_0}{4n\omega_0^2};$$

$$s_q^2(t) = s_{q_0}^2\left\{1 - \mathrm{e}^{-2nt}\left[\left(\cos\omega_n t + \frac{n}{\omega_n}\sin\omega_n t\right)^2 + \right.\right.$$
$$\left.\left. + \left(1 + \frac{2n^2}{\omega_n^2}\right)\sin^2\omega_n t\right]\right\}. \tag{10}$$

Формулу (8) можно упростить, если в осциллирующие функции ввести равномерно распределенную фазу φ и осреднить результат:

$$\langle\sin^2(\omega_n t + \varphi)\rangle = \langle\cos^2(\omega_n t + \varphi)\rangle = \frac{1}{2};$$
$$\langle\sin 2(\omega_n t + \varphi)\rangle = 0.$$

Отсюда

$$s_q^2(t) \approx s_{q_0}^2(1 - \mathrm{e}^{-2nt}). \tag{11}$$

При $n \to 0$

$$s_q^2(t) \to \frac{\pi S_f(\omega_0)}{\omega_0^2}t.$$

Решение поставленной задачи можно получить также методом функций Грина [1, 3]. В соответствии с (2) и (5) корреляционная функция процесса $q(t)$ определяется по формуле

$$K_q(t_1, t_2) =$$
$$= \int_0^{t_1}\int_0^{t_2} g(t_1 - \tau_1)g(t_2 - \tau_2)K_f(\tau_2 - \tau_1)d\tau_1 d\tau_2. \tag{12}$$

Подставив в (10) функцию (7), получим искомую корреляционную функцию и дисперсию на переходном режиме колебаний в удобном для вычислений виде:

$$K_q(t_1, t_2) = k_0\int_0^{t_1} g(t_1 - \tau)g(t_2 - \tau)d\tau; \tag{13}$$

$$s_q^2(t) = k_0\int_0^t g^2(t - \tau)d\tau. \tag{14}$$

Подставив (4) в (14), найдем

$$s_q^2(t) = \frac{k_0}{\omega_n^2}\int_0^t \mathrm{e}^{-2n\tau}\sin^2\omega_n\tau d\tau \approx \frac{k_0}{4n\omega_n^2}\left(1 - \mathrm{e}^{-2nt}\right). \tag{15}$$

Формулы (11) и (15) совпадают.

Определенный интерес (особенно для расчета сооружений на сейсмические воздействия [1]) представляет анализ колебаний при нестационарном воздействии вида

$$f(t) = a(t)x(t),$$

где $a(t) = ct\mathrm{e}^{-ct}$ — квазиогибающая стационарного случайного процесса $x(t)$; c — константа.

В этом случае вместо (13) и (14) имеем следующие формулы:

$$K_q(t_1, t_2) = k_0\int_0^{t_1} g(t_1 - \tau)g(t_2 - \tau)a^2(\tau)d\tau;$$

$$s_q^2(t) = k_0\int_0^t a^2(\tau)g^2(t - \tau)d\tau.$$

Получение для расчетов исходной информации о вероятностных характеристиках внешнего воздействия $f(t)$ с определением точности его задания связано с большими (различного характера) трудностями [3–6]. Часто известно лишь поле допуска, в пределах которого нагрузки могут изменяться непредсказуемым любым образом. В этом случае представляет интерес найти максимально возможное значение процесса $q(t)$, которое ни при каких обстоятельствах не может быть превышено [6].

Пусть, например, известно, что $-f_0 \le f(t) \le f_0$. Тогда из (2) для некоторого момента времени $t_к$ находим

$$\max q(t) = f_0 \int_0^{t_к} |g(t-\tau)| d\tau.$$

Для системы с одной степенью свободы

$$\max q(t) = f_0 \frac{2t_к}{\pi\omega_0}.$$

Полученные оценки для дисперсии $s_q(t)$ (и аналогично для $s_{\dot{q}}(t)$) позволяют при заданном предельно-допустимом значении $q = q_*$ оценить надежность системы на переходном режиме для любого момента времени t как вероятность

$$P\{q(t) \le q_* \tau \in (0,t)\} = 1 - \frac{1}{2\pi}\int_0^t \frac{s_{\dot{q}}(\tau)}{s_q(\tau)} \exp\left(-\frac{q_*^2}{2s_q^2}\right) d\tau.$$

Таким образом, все вопросы, возникающие при анализе переходных режимов колебаний механических систем могут быть эффективно разрешены.

Выводы

1. Показана возможность получения приближенных оценок дисперсий переходных процессов.
2. Найдено решение задачи двумя методами.
3. Получена оценка надежности механической системы на переходном режиме для любого момента времени t как вероятность невыхода параметров системы за допустимый уровень.

Литература

1. Вибрации в технике: Справочник. Т. 1: Под ред. В.В. Болотина. Колебания линейных систем. М.: Машиностроение, 1999. 504 с.
2. *Светлицкий В.А.* Статистическая механика и теория надежности. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2002. 503 с.
3. *Гусев А.С.* Вероятностные методы в механике машин и конструкций. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2009. 233 с.
4. *Дженкинс Г., Ваттс Д.* Спектральный анализ и его приложения: Пер. с англ. М.: Мир, 1971. 317 с.
5. *Svetlitsky V.A.* Engineering Vibration Analysis 2, 2004, ISBN 3—540—20782—1, New York, 238 с.
6. *Купер Дж., Макгиллем К.* Вероятностные методы анализа сигналов и систем: Пер. с англ. М.: Мир, 1989. 301 с.

References

1. Artobolevskii I.I., Bogoliubov A.N., Bolotin V.V., Volokhovskii V. Iu., Zhinzher N. I., Mishenkov G V., Moskvin V. G., Novichkov Iu. N., Okopnyi Iu. A., Partsevskii V. V., Frolov K. V., Chirkov V. P. *Vibratsii v tekhnike. Spravochnik. Kolebaniia lineinykh sistem* [Vibration in engineering. Directory. Vibrations of linear systems]. Vol.1, Moscow, Mashinostroenie publ., 1999, 504 p.
2. Svetlitskii V.A. *Statisticheskaia mekhanika i teoriia nadezhnosti* [Statistical mechanics and the theory of reliability]. Moscow, MSTU named after N.E. Bauman publ., 2002. 503 p.
3. Gusev A.S. *Veroiatnostnye metody v mekhanike mashin i konstruktsii* [Probabilistic methods in the mechanics of machines and structures]. Moscow, MSTU named after N.E. Bauman publ., 2009, 233 p.
4. Jenkins G.M., Watts D.G. *Spectral Analysis and its Applications*. U.S.A. Holden-day, San Francisco, Cambridge, 1968. (Russ. ed: Dzhenkins G., Vatts D. S*pektral'nyi analiz i ego prilozheniia*. Moscow, Mir publ., 1971, 317 p.).
5. Svetlitsky V.A. *Engineering Vibration Analysis 2.* ISBN 3-540-20782-1, Berlin, Heidelberg, New York, Springer publ., 2004. 238 p.
6. Cooper George R., McGillem Clare D. *Probabilistic Methods of Signal and System Analysis* (Russ. ed: Kuper Dzh., Makgillen K. *Veroiatnostnye metody analiza signalov i system.* Moscow, Mir publ., 1989. 301 p.

Статья поступила в редакцию 21.03.2013

Информация об авторах

ГУСЕВ Александр Сергеевич (Москва) — профессор кафедры «Прикладная механика». МГТУ им. Н.Э. Баумана (105005, Москва, Российская Федерация, 2-я Бауманская ул., д. 5, стр. 1, e-mail: sergeyn15@gmail.com).

НАЙДЕНОВ Сергей Олегович (Москва) — кандидат технических наук, доцент кафедры «Прикладная механика». МГТУ им. Н.Э. Баумана (105005, Москва, Российская Федерация, 2-я Бауманская ул., д. 5, стр. 1).

Information about the authors

GUSEV Alexander Sergeevich (Moscow) — Professor of «Applied Mechanics» Department. Bauman Moscow State Technical University (BMSTU, building 1, 2-nd Baumanskaya str., 5, 105005, Moscow, Russian Federation, e-mail: sergeyn15@gmail.com).

NAYDENOV Sergey Olegovich (Moscow) — Cand. Sc. (Eng.), Associate Professor of «Applied Mechanics» Department. Bauman Moscow State Technical University (BMSTU, building 1, 2-nd Baumanskaya str., 5, 105005, Moscow, Russian Federation).