Расчет и конструирование машин

УДК 539.374

Изгиб закрепленной балки в условиях ползучести

К.И. Романов

В общем виде решена статически неопределимая задача поперечного изгиба под действием постоянной во времени, равномерно распределенной нагрузки. Показано, что в таком случае катастрофа отсутствует.

Ключевые слова: изгиб, момент, постоянная, нагрузка, энергия.

In general the statically indeterminate problem of transverse bending under constant in time, uniformly distributed loads has been solved. It is shown that in this case there is no catastrophe.

Keywords: bending, time, constant, load, energy.

РОМАНОВ
Константин Игоревич
доктор технических наук, профессор кафедры «Прикладная механика» (МГТУ им. Н.Э. Баумана)

Энергетический метод [1] применен для разделения переменных в задаче поперечного изгиба шарнирно закрепленной балки [2—4]. Получено новое нелинейное дифференциальное уравнение, которое решается в квадратурах.

Определим внутреннюю удельную мощность по формуле

$$w_1 = M\dot{\aleph} + N\xi_0, \tag{1}$$

где M — изгибающий момент; $\dot{\aleph}$ — скорость изменения кривизны; N — нормальная сила, обусловленная закреплением балки в направлении оси z; ξ_0 — скорость деформации оси.

При одноосном напряженном состоянии скорость деформации [5]

$$\xi = k\sigma^n .$$

Здесь σ — напряжение; k и n — постоянные материала.

Рассмотрим приближенную схему чистого изгиба, при которой деформация в срединной плоскости определяется раздельно с изгибом:

$$\xi_0 = kN^n \ / \ F^n. \qquad (2)$$

где F — площадь поперечного сечения.

Удлинение балки от силы N полностью компенсируется укорочением за счет изгиба

$$\dot{\lambda} = \xi_0 l; \ \lambda = \frac{1}{2}\int_0^l \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)^2 dz,$$

где y — прогиб; l — длина оси балки.

Следовательно, с учетом уравнения (2)

$$\frac{k}{F^n} N^n l = \int_0^l \frac{\partial y}{\partial z}\frac{\partial^2 y}{\partial z \partial t} dz.$$

Здесь t — время.

Таким образом, из равенств (1) и (2) можно определить внутреннюю мощность

$$w_1 = M\dot{\aleph} + \frac{F}{k^{1/n} l^{\frac{n+1}{n}}}\left[\int_0^l \frac{\partial y}{\partial z}\frac{\partial^2 y}{\partial z \partial t} dz\right]^{\frac{n+1}{n}}.$$

Диссипативная функция всей системы

$$w_1 = \int_0^l M\dot{\aleph} dz + \frac{F}{k^{1/n} l^{1/n}}\left[\int_0^l \frac{\partial y}{\partial z}\frac{\partial^2 y}{\partial z \partial t}\right]^{\frac{n+1}{n}}.$$

Внешний потенциал

$$w_2 = q\frac{\partial y}{\partial t}; \quad w_2 = \int_0^l q\frac{\partial y}{\partial t} dz,$$

где q — интенсивность внешней равномерно распределенной нагрузки.

При $q = \text{const}$ энергетический баланс $w_1 = w_2$ формулируется в виде интегродифференциального уравнения

$$\int_0^l M\dot{\aleph} dz + \frac{F}{k^{1/n} l^{1/n}}\left[\int_0^l \frac{\partial y}{\partial z}\frac{\partial^2 y dz}{\partial t \partial t}\right]^{\frac{n+1}{n}} = q\int_0^l \frac{\partial y}{\partial t} dz.$$

Здесь

$$M = \frac{ql}{2}z + Ny - \frac{qz^2}{2}; \ \dot{\aleph} = \frac{\partial^3 y}{\partial z^2 \partial t}. \qquad (3)$$

Отметим, что в предложенной схеме решения изгибающий момент и $\dot{\aleph}$ входят по несвязанным между собой уравнениям (3). Кроме того, в первом уравнении (3) лишней неизвестной является сила N. Дополнительным соотношением оказывается равенство [5]

$$\dot{\aleph} = \frac{k}{J_n^n} M^n, \qquad (4)$$

где J_n — обобщенный момент инерции поперечного сечения относительно главной центральной оси.

Одним из вариантов определения функции прогиба независимо от N является подстановка равенства (4) в (3). В этом случае основное энергетическое уравнение принимает вид

$$\int_0^l \left(\frac{\partial^3 y}{\partial z^2 \partial t}\right)^{\frac{n+1}{n}} dz + \frac{F}{J_n l^{1/n}}\left[\int_0^l \frac{\partial y}{\partial z}\frac{\partial^2 y}{\partial z \partial t} dz\right]^{\frac{n+1}{n}} = \\ = \frac{qk^{1/n}}{J_n}\int_0^l \frac{\partial y}{\partial t} dz.$$

Введем безразмерный параметр $i_n = (J_n/F)^{1/(n+1)}$ — обобщенный радиус инерции поперечного сечения. По сравнению с параметром идеального двутавра [1] $h = (J_n \ / \ F)^{n/(n+1)}$ имеем $h = i_n^n$. Тогда

$$\int_0^l \left(\frac{\partial^3 y}{\partial z^2 \partial t}\right)^{\frac{n+1}{n}} dz + \frac{1}{i_n^{n+1} l^{1/n}}\left[\int_0^l \frac{\partial y}{\partial z}\frac{\partial^2 y}{\partial z \partial t} dz\right]^{\frac{n+1}{n}} = \\ = \frac{qk^{1/n}}{J_n}\int_0^l \frac{\partial y}{\partial t} dz.$$

В теории устойчивости [6] введен параметр $\mu l \ / \ i$ — гибкость, где i — радиус инерции поперечного сечения; μ — коэффициент приведения длины. Обобщенная гибкость определяется по формуле, аналогичной решению задачи Эйлера: $\chi_n = l^{1/n} \ / \ i_n$.

Последнее уравнение допускает решение путем сведения его к обыкновенному уравнению по способу разделения переменных $y = A\sin(\pi z / l)$, где A — функция времени. В этом случае в безразмерной форме

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{A}{l}\right) = \frac{\alpha_3^n k q^n l^{2n+1}}{\alpha_1^n \pi^{2(n+1)} J_n^n}\left[1 + \left(\frac{A}{l}\right)^{\frac{n+1}{n}} \frac{\alpha_2}{\alpha_1 \pi^{1/n}} \chi_n^{n+1}\right]^{-n},$$

где

$$\alpha_1 = \int_0^\pi \sin x^{\frac{n+1}{n}}\, dx;$$

$$\alpha_2 = \left[\int_0^\pi \cos^2 x dx\right]^{\frac{n+1}{n}};$$

$$\alpha_3 = \int_0^\pi \sin x dx.$$

Фазовый портрет имеет характер затухающего решения от начальной точки с координатами $(A_0 / l, \left[d(A/l)/dt\right]_0)$ до $d(A/l)/dt \to 0$ при $A/l \to \infty$.

Литература

1. *Романов К.И.* Продольный изгиб нелинейно-вязких стержней // Расчеты на прочность. М.: Машиностроение. 1993. Вып. 33. С. 139—151.
2. *Тимошенко С.П., Войновский-Кригер С.* Пластинки и оболочки. М.: Наука, 1965. 635 с.
3. *Odqvist F.* Mathematical theory of creep and creep rupture. Oxford: At the Clarendon press. 1966. 168 p.
4. *Работнов Ю.Н.* Ползучесть элементов конструкций. М.: Наука, 1966. 752 с.
5. *Малинин Н.Н.* Прикладная теория пластичности и ползучести. М.: Машиностроение. 1975. 400 с.
6. *Феодосьев В.И.* Сопротивление материалов. М.: Наука, 1986. 512 с.

Статья поступила в редакцию 22.12.2011