

УДК 621.8337

## Моделирование динамики привода с волновой зубчатой передачей

**В.В. Кузенков, Г.А. Тимофеев**

*Представлены результаты моделирования динамики следящего привода с волновой зубчатой передачей с генератором волн внешнего деформирования при ступенчатом управляющем и импульсном воздействии. Изучено влияние нелинейности волновой зубчатой передачи на резонансные частоты привода.*

**Ключевые слова:** динамика, моделирование, следящий привод, волновая зубчатая передача, генератор волн внешнего деформирования.

*The article discusses the modeling of the dynamics of a servo drive with a wave gearing with a generator of external deformation waves under the step control and pulse actions. The influence of the wave gearing nonlinearity on the drive resonant frequencies has been studied.*

**Keywords:** dynamics, modeling, servo drive, wave gearing, wave generator.

Для оценки параметров привода, описанного в работе [1], было проведено его моделирование на ЭВМ в соответствии со структурной схемой. При моделировании исследовались реакции системы на скачкообразное и гармоническое воздействия.

Цель описываемых машинных экспериментов — изучение влияния нелинейной характеристики крутильной жесткости на частотные свойства рассматриваемой динамической модели с волновой зубчатой передачей (ВЗП), определение уровня нелинейных искажений (отклонение колебания от частоты вращения выходного вала привода от гармонического закона), а также оценка адекватности модели при различных значениях ее параметров.

Алгоритм программы базируется на использовании численных методов решения системы нелинейных дифференциальных уравнений движения привода [2]. Из численных методов интегрирования использовали простой метод Эйлера (для оценочных расчетов) и метод Адамса 3-го порядка [3].

К основным модулям программы относятся: модуль формирования начальных условий и параметров моделирования, расчетный модуль (служащий для формирования правых частей дифференциального уравнения), интегрирующий модуль и модуль управления выводом результатов. В состав программы входят также подмодули для вычисления нелинейных зависимостей, определяемых особенностями модели.

В качестве независимой переменной выбрано время, а искомыми переменными являются угловые скорости и углы поворота элементов привода, а также моменты, приложенные к этим элементам. Конечные результаты представлены в форме графиков. На рисунках 1, 2



**КУЗЕНКОВ**  
Владимир Васильевич  
доцент, кандидат  
технических наук



**ТИМОФЕЕВ**  
Геннадий Алексеевич  
доктор технических наук,  
профессор  
кафедры «Теория  
механизмов и машин»  
(МГТУ им. Н.Э. Баумана)

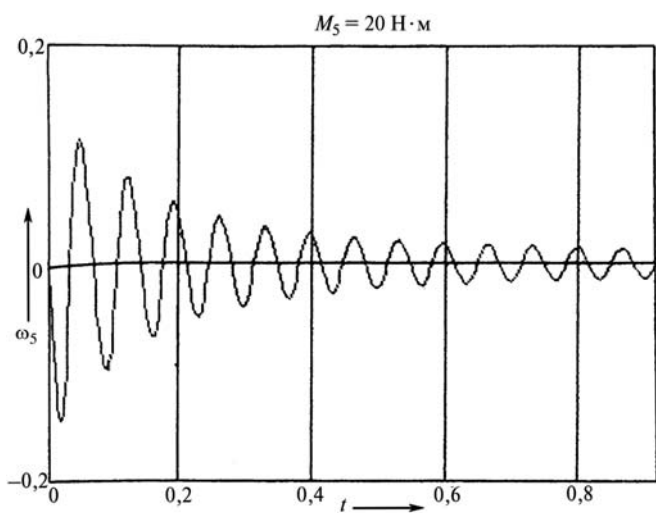


Рис. 1. Моделирование переходного процесса при нагрузке на выходном валу  $M_5 = 20 \text{ Н}\cdot\text{м}$

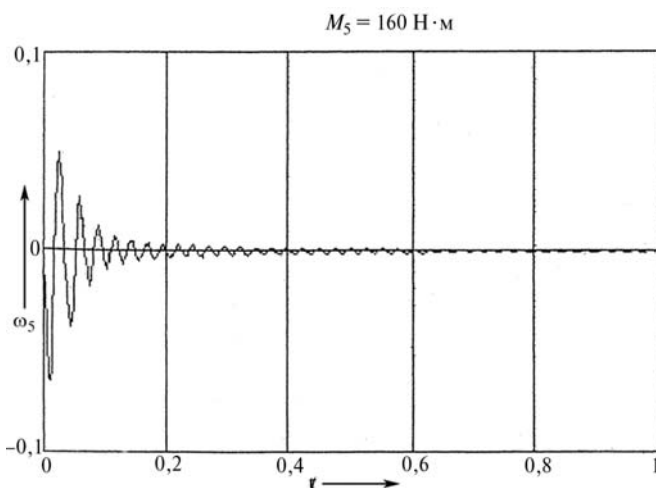


Рис. 2. Моделирование переходного процесса при нагрузке на выходном валу  $M_5 = 160 \text{ Н}\cdot\text{м}$

приведены кривые, полученные в ходе моделирования переходного процесса, происходящего в приводе при заторможенном валу электродвигателя в результате скачкообразного приложения нагрузки на выходном валу. Значение момента нагрузки ( $M_5$ ) варьировалось в диапазоне 20...160 Н·м.

Рисунки 1, 2 иллюстрируют зависимость угловой скорости выходного вала привода  $\omega_5$  от времени  $t$ . На графиках наблюдается увеличение частоты собственных колебаний при возрастании нагрузки, что очевидно, обусловлено изменением моделируемой жесткости волнового зацепления, вызываемой изменением момента на

выходном валу привода. С увеличением нагрузки наблюдается также возрастание затухания собственных колебаний привода, что согласуется с предполагаемым характером изменения нелинейной жесткости, прогнозируемым на основе оценок имеющихся экспериментальных данных [4, 5].

На рисунках 3, 4 представлены результаты моделирования переходного процесса в приводе, возникающего за счет ступенчатого возмущения на его входе, которое реализовывалось путем ступенчатого увеличения напряжения питания якорной цепи электродвигателя  $U_{до}$ . Полученные при этом результаты показывают аperiodический закон выхода системы на режим установившегося движения, определяемый крутящим моментом двигателя и моментом нагрузки привода, и наложенные на него быстро затухающие собственные колебания привода (частота собственных колебаний 30 Гц соответствует моменту нагрузки  $M_5 = 160 \text{ Н}\cdot\text{м}$ ). Постоянная времени аperiodического процесса и параметров собственных колебаний в этом режиме не зависят от амплитуды возмущения, что свидетельствует о несущественном влиянии нелинейностей на характер переходного процесса в приводе в данных условиях.

При моделировании временных переходных процессов в качестве входного воздействия задавалось гармоническое возмущение, которое реализовывалось путем задания изменения величины напряжения питания якорной цепи

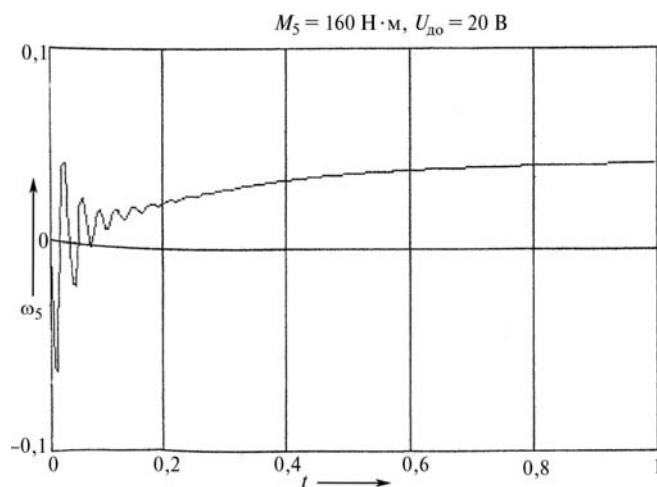


Рис. 3. Моделирование переходного процесса в приводе при ступенчатом возмущении на входе  $U_{до} = 20 \text{ В}$

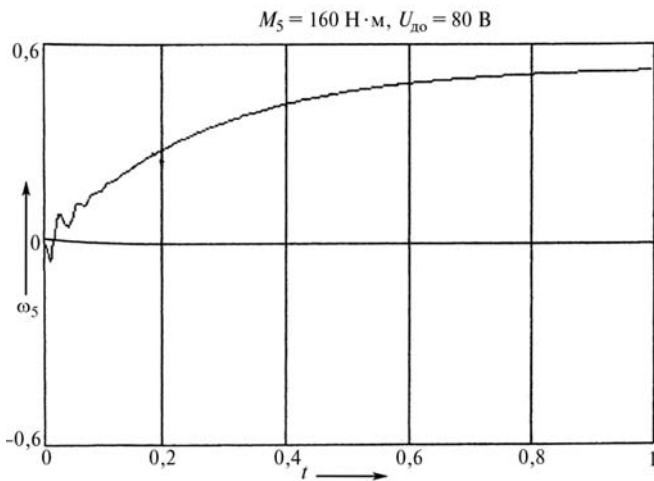


Рис. 4. Моделирование переходного процесса в приводе при ступенчатом возмущении на входе  $U_{до} = 80 \text{ В}$

электродвигателя ( $U_d$ ) по синусоидальному закону:

$$U_d(t) = U_{до} \sin(\omega_0 t + \varphi_0).$$

В качестве выходного параметра регистрировались изменения во времени частоты вращения выходного вала привода ( $\omega_s$ ).

На рисунках 5, 6 приведена серия результатов моделирования колебаний при частоте возмущения  $\omega_0 = 30 \text{ рад/с}$  и амплитуде возмущения  $U_{до} = 100 \text{ В}$  для различных значений постоянного момента внешнего нагружения привода  $M_5$ . Значение момента нагрузки варьировалось в диапазоне  $0 \dots 160 \text{ Н}\cdot\text{м}$ . Результаты свидетельствуют о достаточной адекватности отражения свойств ВЗП принятой моделью нелинейной жесткости. На основании анализа этих результатов можно сделать следующие выводы:

- переходный процесс в системе заканчивается достаточно быстро (за  $0,1 \dots 0,8 \text{ с}$ ), причем скорость затухания увеличивается с ростом  $M_5$ ; это, по-видимому, объясняется увеличением эквивалентной жесткости волнового зацепления жесткого и гибкого колес и, соответственно, возрастанием частот собственных колебаний системы;

- коэффициент усиления системы (отношение амплитуды колебания частоты вращения выходного вала к амплитуде колебания напряжения на обмотке возбуждения электро-

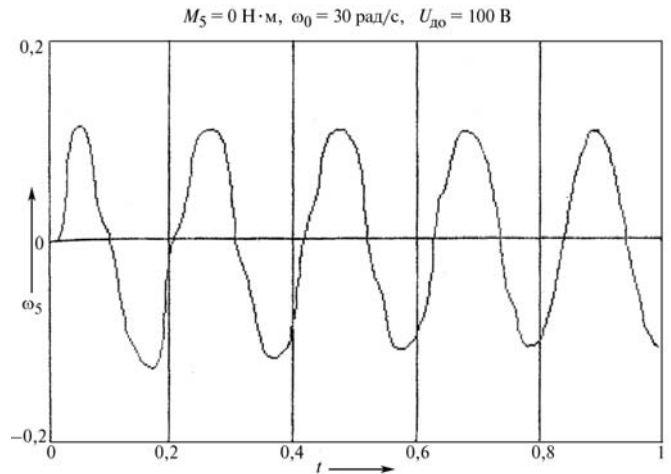


Рис. 5. Моделирование колебаний при  $\omega_0 = 30 \text{ рад/с}$ ;  $M_5 = 0 \text{ Н}\cdot\text{м}$ ;  $U_{до} = 100 \text{ В}$

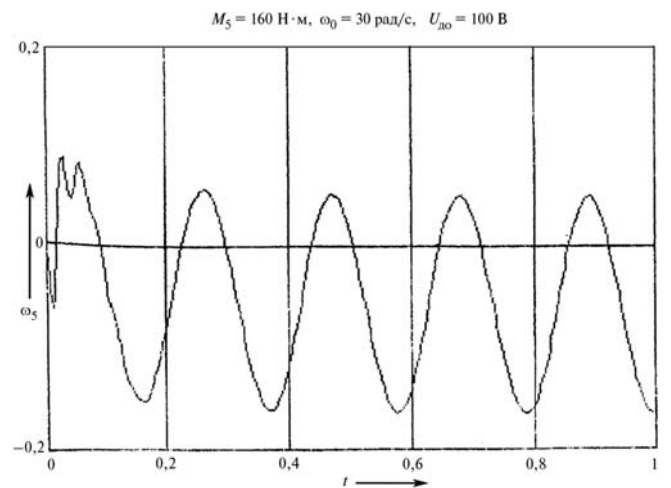


Рис. 6. Моделирование колебаний при  $\omega_0 = 30 \text{ рад/с}$ ;  $M_5 = 160 \text{ Н}\cdot\text{м}$ ;  $U_{до} = 100 \text{ В}$

двигателя ( $U_{до}$ ) от величины момента нагрузки  $M_5$  не зависит;

- при увеличении момента нагрузки  $M_5$  на выходе привода появляется постоянная составляющая частоты вращения (имеет место раскрутка выходного вала ВЗП за счет приложенного к нему момента  $M_5$ ).

На рисунках 7, 8 представлены результаты моделирования вынужденных колебаний при постоянных значениях внешней нагрузки  $M_5 = 30 \text{ Н}\cdot\text{м}$  и амплитуды возмущения  $U_{до} = 100 \text{ В}$  для различных частот возмущения ( $\omega_0$ ) в интервале  $10 \dots 150 \text{ рад/с}$ . По существу, эти эксперименты дают представление об амплитудной характеристике модели ВЗП по выходному воз-

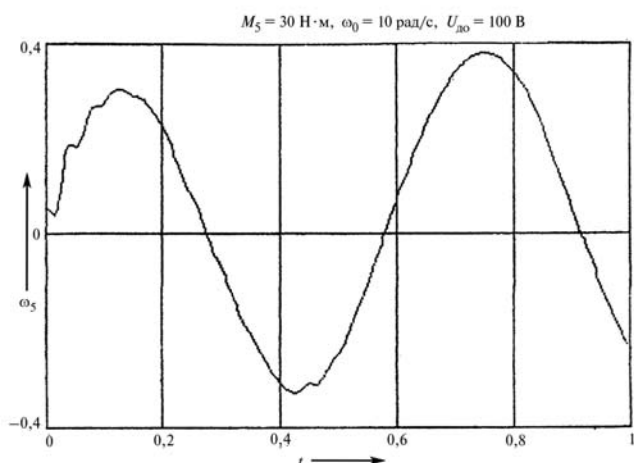


Рис. 7. Моделирование вынужденных колебаний при  $\omega_0 = 10$  рад/с;  $M_5 = 30$  Н·м;  $U_{до} = 100$  В

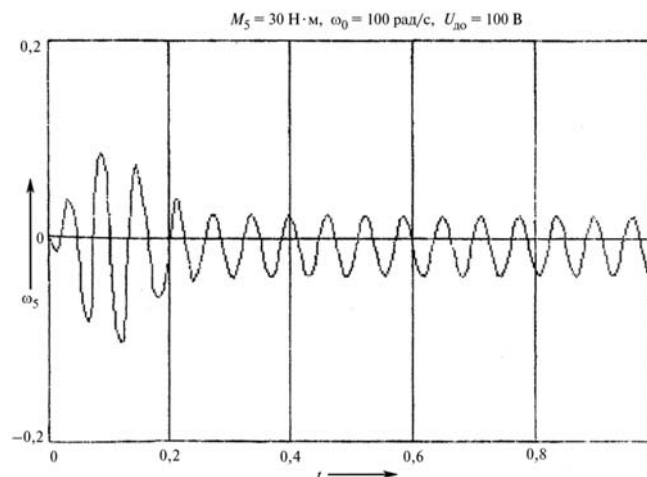


Рис. 8. Моделирование вынужденных колебаний при  $\omega_0 = 100$  рад/с;  $M_5 = 30$  Н·м;  $U_{до} = 100$  В

действию в отдельных точках. Результаты этого моделирования приводят к следующим заключениям:

- после завершения переходного процесса (0,4...0,6 с от начала) выходные колебания близки к гармоническим, т. е. искажения, обусловленные наличием нелинейностей в системе, проявляются слабо. При этом, однако, следует учитывать, что амплитуда входного воздействия в данной серии экспериментов была выбрана достаточно большой (100 В); при значительно меньших значениях этой амплитуды в ряде случаев оказалось затруднительным достичь установления колебания на выходе модели из-за затягивания переходного процесса;
- наблюдается падение коэффициента усиления системы (уменьшение амплитуды выходного сигнала) при увеличении частоты возмущения, что объясняется фильтрующими свойствами электродвигателя (его электромагнитной постоянной времени);
- в экспериментах не обнаружено заметных изменений коэффициента усиления, связываемых с резонансными явлениями. Это обстоятельство может быть связано с рядом причин. С одной стороны, принятая в описываемых экспериментах методика регистрации амплитуды колебаний по установлению колебательного переходного процесса, выполняемая для отдельных задаваемых значений частоты внешнего возмущения, по-видимому, не обеспечивает достаточной точности для обнаружения

резонансных явлений, а кроме того, переходный процесс, по существу, не является стационарным, что может приводить к размытию резонансов из-за изменения параметров нелинейной модели в ходе эксперимента. С другой стороны, отсутствие резонансных явлений может быть связано с недостаточно высокими частотами входного воздействия, принятыми в данном эксперименте; следует, однако, обратить внимание на рис. 8 (и другие не приведенные в тексте), где видны переходы через некоторые резонансы.

На рисунках 9, 10 показаны результаты моделирования колебаний при постоянных значениях внешней нагрузки  $M_5 = 30$  Н·м, частоте возмущения  $\omega_5 = 30$  рад/с для различных значений амплитуды возмущающего напряжения ( $U_{до}$ ) в интервале 10...100 В. Амплитуда колебаний быстро возрастает с ростом амплитуды возмущения; при малых значениях возмущения наблюдаются заметные нелинейные искажения (приводящие к появлению гармоник), которые с увеличением амплитуды возмущения постепенно исчезают. Характер наблюдаемых искажений можно, по всей вероятности, объяснить наличием в модели сухого трения. Кроме того, при малых амплитудах возмущения наблюдается резкое уменьшение демпфирования выходных колебаний (на рис. 9 переходный процесс продолжается и после 1 с).

В реальной системе, как показали эксперименты [5], демпфирование более заметно из-за

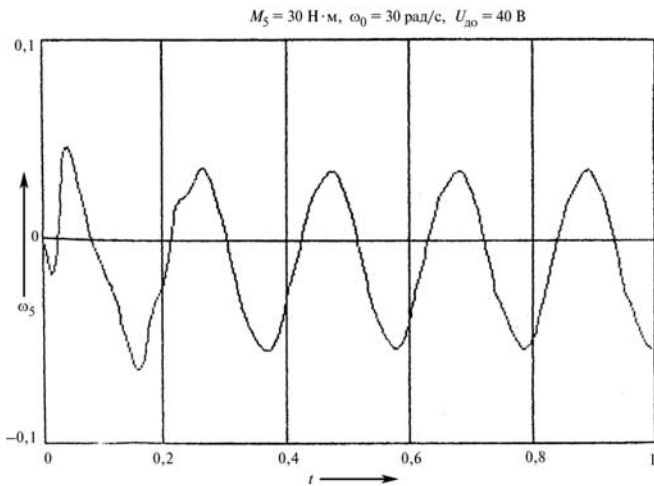


Рис. 9. Моделирование колебаний при амплитуде напряжения  $U_{до} = 40$  В

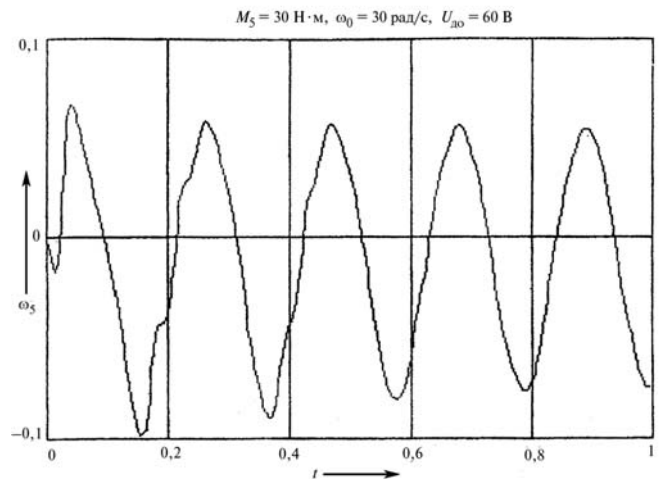


Рис. 10. Моделирование колебаний при амплитуде напряжения  $U_{до} = 60$  В

трения в исполнительном элементе системы (которое при данном моделировании не учитывалось).

Для изучения влияния нелинейностей ВЗП на резонансные частоты привода была сделана попытка повышения точности регистрации АЧХ исследуемой модели за счет исключения нестационарных переходных явлений, а также существенного уменьшения интервалов приращения частоты входного воздействия в процессе регистрации. С этой целью проводилось моделирование отклика системы на синусоидальное входное воздействие при достаточно медленных изменениях частоты. Темп изменения частоты выбирался таким, чтобы колебания на выходе системы можно было рассматривать как практически установившиеся. Ам-

плитуда входного воздействия принималась достаточно малой, чтобы систему можно было рассматривать как квазилинейную. Кроме того, амплитуда входного воздействия изменялась в зависимости от частоты входного воздействия таким образом, чтобы величина крутильной деформации гибкого колеса и волнового зацепления оставалось постоянной. На рисунке 11 в качестве примера представлена зависимость угловой скорости выходного вала привода от времени при подаче на электродвигатель управляющего напряжения синусоидальной формы с частотой, зависящей от времени  $U_d = U_{dp} \sin(\Omega t)$ , где  $\Omega = Kt^2$  — переменная частота входного воздействия. Данная зависимость получена при нулевом значении момента внешней нагрузки на выходном валу привода.

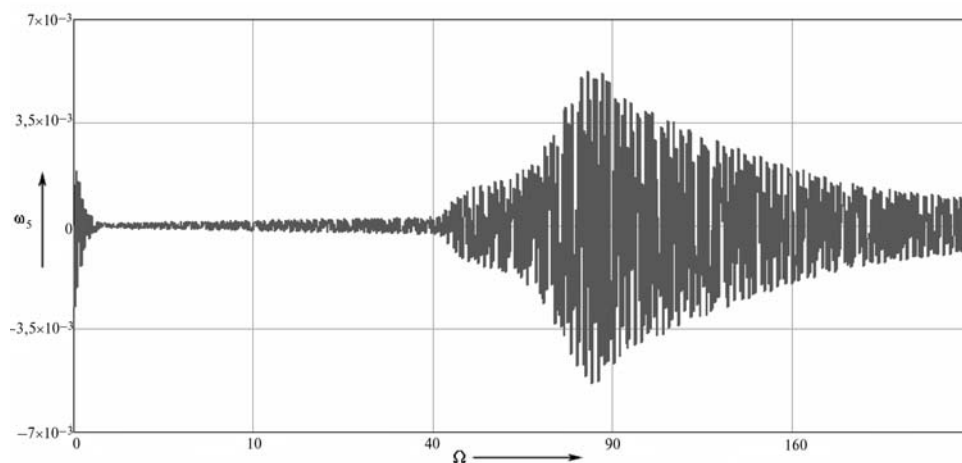


Рис. 11. АЧХ привода при  $M_s = 0$  Н·м

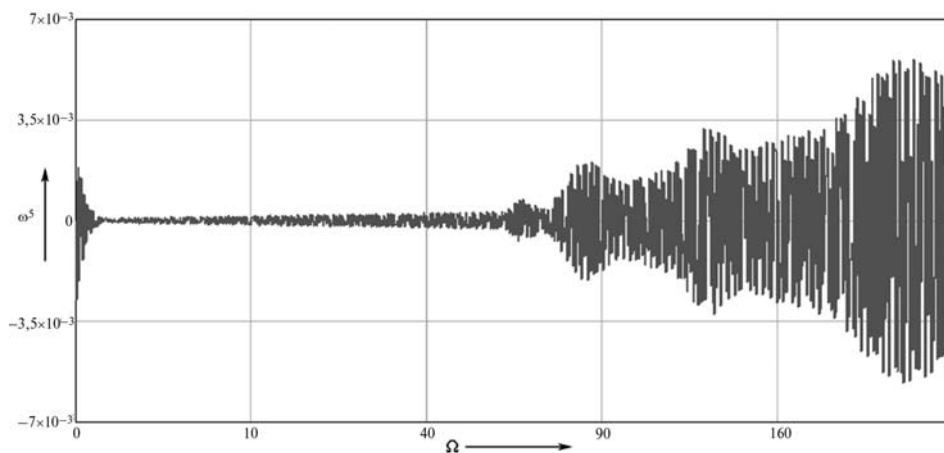


Рис. 12. АЧХ привода при  $M_5 = 160 \text{ Н} \cdot \text{м}$

На приведенной АЧХ (см. рис. 11) хорошо виден резонансный пик, соответствующий частоте собственных колебаний привода, определяемой эквивалентной жесткостью гибкого колеса ВЗП и инерционностью нагрузки. В данном случае значение резонансной частоты составляет 75 рад/с. Наблюдается отличие формы полученной АЧХ от обычной (характерной для линейных колебательных систем), выражающееся в наличии полочек вблизи резонанса, что вызвано нелинейной зависимостью жесткости ВЗП от амплитуды деформации.

На рисунке 12 приведена аналогичная зависимость, полученная в условиях нагружения выходного вала привода постоянным моментом  $M_5 = 160 \text{ Н} \cdot \text{м}$ . Наличие указанного нагружения приводит к смещению рабочей точки на петле гистерезиса нелинейной жесткости в сторону от нулевого значения. Для компенсации этого момента на вход двигателя помимо гармонической составляющей управляющего напряжения подавалась также постоянная составляющая, которая подбиралась из условия отсутствия постоянной скорости вращения выходного вала. На полученной таким образом АЧХ видно появление четырех резонансных пиков на частотах 60, 80, 115 и 200 рад/с, соответственно. В данном случае наблюдается также увеличение значений частот резонанса в сравнении с описанным выше случаем, когда внешнее нагружение отсутствовало. Этот факт хорошо объясняется увеличением жесткости волнового зацепления при возрастании деформации гибкого колеса и выборкой зазоров в за-

цеплении. Что же касается появления нескольких резонансов, то это явление характерно для существенно нелинейных систем и достаточно хорошо известно.

Вероятно, что отмеченные выше особенности АЧХ приводов с ВЗП в резонансных областях (многорезонансность и изменение резонансных частот от внешних воздействий) могут в принципе отрицательно сказываться на работе привода в следящих системах. С другой стороны, следует заметить, что в рассматриваемом приводе все эти особенности лежат далеко за пределами граничных частот, определяемых постоянной времени привода и обусловленных инерционными свойствами электродвигателя (эти частоты имеют значение 4 рад/с), вследствие чего они не могут оказывать существенного влияния на работу привода в области практически используемых рабочих частот.

#### Литература

1. Костиков Ю.В., Тимофеев Г.А., Фурсяк Ф.И. Исследование качественных показателей волновых зубчатых передач внешнего деформирования с гибким колесом — кольцом // Приводы и компоненты машин. 2011. № 4. С. 16–19.
2. Кузенков В.В., Тимофеев Г.А. Динамика следящего привода с волновой зубчатой передачей // Известия высших учебных заведений. Машиностроение. 2012. № 3. С. 30–34.
3. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике. М.: Наука, 1978. 831 с.
4. Скворцова Н.А., Костиков Ю.В., Тимофеев Г.А. Расчет упругого мертвого хода волновых зубчатых передач // Машиноведение. 1982. № 4. С. 62–66.
5. Тимофеев Г.А., Костиков Ю.В. Динамические характеристики передач с гибкими и жесткими звеньями // Труды МВТУ. 1984. № 408. Вып. 10. Теория механизмов / Под ред. К.В. Фролова, В.А. Никонорова. С. 21–27.

Статья поступила в редакцию 07.03.2012