НАУМОВ
Андрей Михайлович
кандидат технических наук,
доцент
(МГТУ им. Н.Э. Баумана)

NAUMOV
Andrey Mikhailovich
Cand. Sc. (Eng.),
Associate Professor
(Moscow, Russian Federation,
MSTU named
after N.E. Bauman)

УДК 531.22.8

Об одном способе вывода аэродинамических сил, действующих на пространственный стержень со стороны потока воздуха

А.М. Наумов

Аэродинамические силы, действующие на элемент конструкции со стороны набегающего потока (жидкости или газа), являются одними из наиболее сложных по своей природе при определении как модуля, так и направления их действия. В статье предпринята попытка вывода аэродинамических нагрузок, действующих на пространственно-криволинейный стержень круглого поперечного сечения, непосредственно в связанном с сечением деформированного стержня базисе, в котором уравнения равновесия стержня носят наиболее простой характер.

Ключевые слова: пространственно-криволинейный стержень, статика, аэродинамические силы, поток воздуха, скорость потока, связанный базис, декартов базис, матрица преобразования, нормальные силы, касательные силы.

A Mathematical Derivation Method of the Aerodynamic Forces Effected on a Spatial Rod by Air Flow

A.M. Naumov

The aerodynamic forces acting on the structural element of the incoming flow (liquid or gas) are among the most complex in nature in terms of defining both the module and the direction of their actions. This article attempts to display the aerodynamic loads acting on the space-curved rod of circular cross-section is directly related to the cross-section of a deformed rod basis, where the equilibrium equations of the rod are the most simple character.

Keywords: spatially curved rod, static, aerodynamic forces, air flow, flow rate, associated basis cartesian basis, the transformation matrix, the normal force, shear force.

Силы взаимодействия стержня с потоком можно определить, решив задачи аэроупругости, более сложные по сравнению с традиционными задачами, которые рассматриваются в строительной механике. Аэроупругие явления могут иметь как статический, так и динамический характер. Аэродинамические силы и моменты, возникающие при статических деформациях стержня, не зависят от времени и могут быть исследованы методами стационарной аэродинамики. Основная проблема этих исследований заключается в том, чтобы получить необходимые для расчетов аналитические выражения для аэродинамических сил. Стержни, находящиеся в потоке (рис. 1, *б*), могут очень сильно отклоняться от первоначальной равновесной формы (рис. 1, *а*), а от формы осевой линии стержня зависят аэродинамические силы.

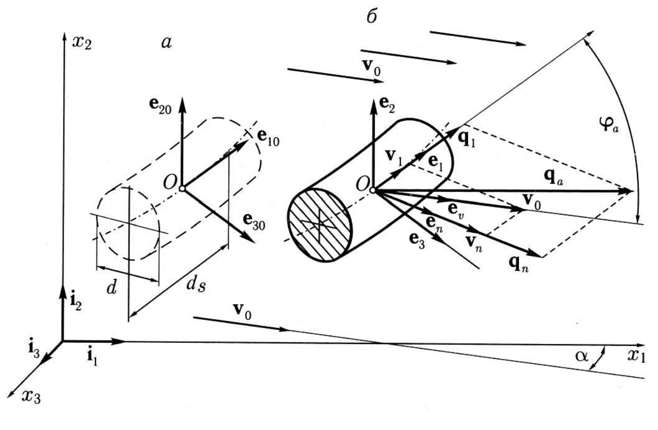

Рис. 1. Аэродинамические силы, действующие на элемент стержня в деформированном состоянии со стороны потока воздуха

Аэродинамическими задачами занимались многие ученые [1–7]. В монографии [1] приведен классический вывод аэродинамических сил и моментов, действующих на элемент стержневой конструкции. Вывод построен таким образом, что как силы лобового сопротивления, так и силы, действующие по касательной к осевой линии стержня, находятся в проекциях на оси неподвижного декартового базиса $\{\mathbf{i}\}$. Это не совсем удобно, поскольку подобные задачи решаются, как правило, в связанном базисе $\{\mathbf{e}\}$. Поэтому получаемые выражения для аэродинамических нагрузок приходится преобразовывать на каждом шаге нагружения стержня (а нелинейные задачи глубокого деформирования упругих систем решаются, как правило, пошагово) с помощью матриц перехода в связанный базис. В данной статье сделана попытка вывода аэродинамических сил сразу в связанном деформированном базисе.

Для численного решения задачи деформирования стержня, нагруженного распределенными нагрузками со стороны потока газа, необходимо иметь аналитические выражения для проекций аэродинамических сил и моментов, получить которые экспериментальными методами практически невозможно, так как аэродинамические силы и момент зависят от непрерывно изменяющегося с увеличением скорости потока $\mathbf{v}_0$ угла φ_a между вектором $\mathbf{v}_0$ и вектором $\mathbf{e}_1$ (см. рис. 1, *б*), направленным по касательной к осевой линии стержня. В дальнейшем принято, что скорость $\mathbf{v}_0$ параллельна плоскости x_1Ox_3, поэтому

$$\mathbf{v}_0 = \mathbf{v}_0 \cos\alpha \mathbf{i}_1 + \mathbf{v}_0 \sin\alpha \mathbf{i}_3.$$

В связанных осях скорость $\mathbf{v}_0$ можно представить в следующем виде:

$$\mathbf{v}_0 = \mathbf{v}_n + \mathbf{v}_1,$$

где $\mathbf{v}_n$ — нормальная составляющая, ортогональная вектору $\mathbf{e}_1$; $\mathbf{v}_1$ — составляющая скорости $\mathbf{v}_0$, направленная по касательной к осевой линии стержня ($\mathbf{v}_1 = (\mathbf{v}_0\mathbf{e}_1)\mathbf{e}_1$).

Определим проекции аэродинамических сил в связанных осях (вывод аналитических выражений для проекций аэродинамических сил в неподвижных осях приведен в работе [1]).

При выводе аналитических выражений для проекций аэродинамических сил считается, что местный поток в произвольном сечении можно представить в виде двух независимых потоков (как это принято в прикладной аэродинамике): плоский поток со скоростью $\mathbf{v}_n$ (для этого потока справедлива гипотеза плоских течений [2]) и поток со скоростью $\mathbf{v}_1$, направленный по касательной к осевой линии стержня. Такое представление потока, как два независимых потока, является допущением. Вследствие этого допущения полную аэродинамическую силу $\mathbf{q}_a$ можно представить в виде векторной суммы двух сил, нормальной и касательной: $\mathbf{q}_a = \mathbf{q}_n + \mathbf{q}_1$. Также это допущение позволяет получить все необходимые для расчета аналитические выражения для аэродинамических сил и момента и оценить при численном исследовании прочность и надежность стержня при наихудшем воздействии потока [3].

Получим аналитические выражения для проекций аэродинамических сил и момента при статическом нагружении стержня потоком. В связанных осях имеем

$$\mathbf{q}_n = q_{n2}\mathbf{e}_2 + q_{n3}\mathbf{e}_3;\ \mathbf{q}_1 = |\mathbf{q}_1|\mathbf{e}_1.$$

Модули векторов $\mathbf{q}_n^0$ и $\mathbf{q}_1^0$ равны (в безразмерном виде):

$$\left|\mathbf{q}_n\right| = \frac{c_n}{2m_0 g}\rho d v_n^2; \; \left|\mathbf{q}_1\right| = \frac{c_1}{2m_0 g}\rho d v_1^2. \qquad (1)$$

Вектор $\mathbf{q}_n$ удовлетворяет условию

$$\mathbf{q}_n(\mathbf{e}_v \times \mathbf{e}_1) = 0. \qquad (2)$$

Рассмотрим подробнее входящие в выражения (1) переменные: m_0 — масса единицы длины стержня, которая считается постоянной; g — ускорение силы тяжести (комплекс $m_0 g$ используется при обезразмеривании распределенных нагрузок); ρ — плотность обтекающей среды (газа или воздуха); d — размер поперечного сечения; c_n, c_1 — аэродинамические коэффициенты силы лобового сопротивления и касательной силы. Вектор $\mathbf{e}_v$ — единичный вектор, совпадающий по направлению с вектором $\mathbf{v}_0$:

$$\mathbf{e}_v = \sum_{k=1}^{3}(\cos\alpha l_{k1}^{(1)} + \sin\alpha l_{k3}^{(1)})\mathbf{e}_k,$$

где $l_{kj}^{(1)}$ — элементы матрицы $L^{(1)} = LL^0$ (матрицы преобразования базиса $\{\mathbf{i}\}$ к базису $\mathbf{e}_0$). Подробный вывод этой матрицы приведен в работе [1]. Вектор $\mathbf{e}_{vn}$ — единичный вектор, совпадающий по направлению с вектором $\mathbf{v}_n$.

Модуль подъемной силы зависит от модуля местной составляющей скорости потока $\mathbf{v}_n$:

$$v_n = v_0 \sin\varphi_\text{a},$$

где φ_a — угол атаки между вектором $\mathbf{v}_0$ и вектором $\mathbf{e}_1$ в статике (см. рис. 1).

В результате получаем

$$\left|\mathbf{q}_n\right| = \frac{c_n}{2m_0 g}\rho d^{(1)} v_0^2 \sin^2\varphi_\text{a}.$$

Аэродинамическая сила $\mathbf{q}_1$, направленная по касательной к осевой линии провода, зависит от скорости потока v_1. Модуль силы

$$\left|\mathbf{q}_1\right| = \frac{c_1}{2m_0 g}\rho d v_1^2,$$

или (так как $v_1 = v_0\cos\varphi_\text{a}$)

$$\left|\mathbf{q}_1\right| = \frac{c_1}{2m_0 g}\rho d v_0^2 \cos^2\varphi_\text{a}.$$

Из условий (1) и (2) получаем два уравнения для определения q_{n2} и q_{n3}:

$$\begin{aligned} &q_{n2}^2 + q_{n3}^2 = q_n^2 \sin^4\varphi_\text{a}; \\ &q_{n2}e_{v3} - q_{n3}e_{v2} = 0, \end{aligned} \qquad (3)$$

где

$$e_{v2} = \cos\alpha l_{21}^{(1)} + \sin\alpha l_{23}^{(1)}; e_{v3} = \cos\alpha l_{31}^{(1)} + \sin\alpha l_{33}^{(1)};$$

$$q_n = \frac{c_n}{2m_0 g}\rho d v_0^2.$$

Из системы уравнений (2) после преобразований находим

$$\begin{aligned} q_{n2} &= q_n \sin^2\varphi_\text{a}(\cos\alpha l_{21}^{(1)} + \sin\alpha l_{23}^{(1)}); \\ q_{n3} &= q_n \sin^2\varphi_\text{a}(\cos\alpha l_{31}^{(1)} + \sin\alpha l_{33}^{(1)}). \end{aligned}$$

Это итоговые формулы и должны быть включены в уравнения равновесия пространственно-криволинейного стержня в качестве внешних распределенных сил. Сами уравнения равновесия в данной статье не приводятся, они представлены в работах [1, 3].

Необходимо отметить, что все изложенное выше относится к самому простому случаю обтекания потоком воздуха стержня круглого поперечного сечения. В случае стержня более сложного профиля (рис. 2) возникают не только силы лобового сопротивления $\mathbf{q}_n$ и касательная сила $\mathbf{q}_1$, но и подъемная сила $\mathbf{q}_L$, а также аэродинамический момент $\boldsymbol{\mu}_\text{a}$ [4—7]. Причем в данном случае аэродинамические силы $\mathbf{q}_n$, $\mathbf{q}_L$ и момент $\boldsymbol{\mu}_\text{a}$ будут зависеть от угла атаки $\alpha_{\text{a}0}$ — угла между вектором $\mathbf{v}_n$ ($\mathbf{v}_n = v_n \mathbf{e}_{vn}$) и вектором $\mathbf{e}_3$ (см. рис. 2) (в статике $\mathbf{v}_{n\,\text{от}} = \mathbf{v}_n$). Угол $\alpha_{\text{a}0}$ определяется из соотношений

$$\sin\alpha_{\text{a}0} = \frac{(\mathbf{v}_n \mathbf{e}_2)}{\left|\mathbf{v}_n\right|} = e_{vn2},$$

или

$$\cos\alpha_{\text{a}0} = \frac{(\mathbf{v}_n \mathbf{e}_3)}{\left|\mathbf{v}_n\right|} = e_{vn3}.$$

Таким образом, рассмотренный вариант вывода аэродинамических сил позволяет избежать при решении нелинейных задач статики пространственно-криволинейных стержней

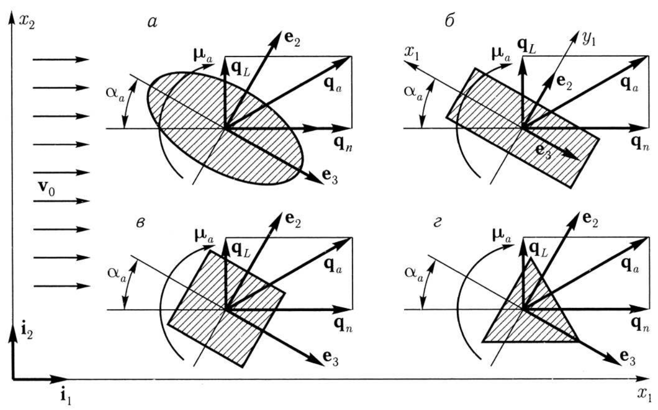

Рис. 2. Поперечные сечения стержней плохообтекаемого профиля с подъемными силами и аэродинамическими моментами

под действием ветровой нагрузки сложных преобразований, связанных с переходом от декартового базиса {**i**} к связанному недеформированному {$\mathbf{e}_0$}, а от связанного недеформированного — к связанному деформированному {**e**}, поскольку силы сразу на каждом шаге нагружения сразу определяются в связанном деформированном базисе.

Литература

1. *Светлицкий В.А.* Механика стержней. В 2 т. Т. 1. Статика. М.: Физматлит, 2009. 408 с.
2. *Фершинг Г.* Основы аэроупругости. М.: Машиностроение, 1984. 539 с.
3. *Наумов А.М., Светлицкий В.А.* Определение напряженно-деформированного состояния «жесткого» шланга, находящегося в потоке воздуха или жидкости // МТТ. 1999. № 6. С. 167—172 .
4. *Графский И.Ю., Казакевич М.И.* Аэродинамика плохообтекаемых тел. Днепропетровск: ДГУ, 1983. 116 с.
5. *Графский И.Ю., Казакевич М.И., Лукьянова В.Н.* Экспериментальное определение аэродинамических сил, действующих на стержень с плохообтекаемым сечением // Известия высших учебных заведений. Машиностроение. 1985. № 1. С. 17—20.
6. *Девнин СИ.* Аэрогидромеханика плохообтекаемых конструкций. Справочник. Л.: Судостроение, 1983, 320 с.
7. *Казакевич М.И.* Аэродинамика мостов. М.: Транспорт, 1987. 240 с.

References

1. Svetlitskii V.A. *Mekhanika sterzhnei. V 2 vol. Vol. 1. Statika* [Mechanical rods. Statics]. Moscow, Fizmatlit publ., 2009. 408 p.
2. Fershing G. *Osnovy aerouprugosti* [Foundations of aeroelasticity]. Moscow, Mashinostroenie publ., 1984. 539 p.
3. Naumov A.M., Svetlitskii V.A. Opredelenie napriazhenno-deformirovannogo sostoianiia «zhestkogo» shlanga, nakhodiashchegosia v potoke vozdukha ili zhidkosti [Determination of the stress-strain state of a «hard», that runs in a stream of air or liquid]. *Mechanics of Solids*, 1999, no. 6, pp. 167—172.
4. Grafskii I.Iu., Kazakevich M.I. *Aerodinamika plokhoobtekaemykh tel* [Aerodynamics of bluff bodies]. Dnepropetrovsk. Dnepropetrovsk State University, 1983. 116 p.
5. Grafskii I.Iu., Kazakevich M.I., Luk'ianova V.N. Eksperimental'noe opredelenie aerodinamicheskikh sil, deistvuiushchikh na sterzhen s plokhoobtekaemym secheniem [Experimental determination of the aerodynamic forces acting on the rod with a bluff section]. *Proceedings of Higher Educational Institutions. Machine Building*, 1985, no. 1, pp. 17—20.
6. Devnin S.I. *Aerogidromekhanika plokhoobtekaemykh konstruktsii* [Aerohydrodynamics bluff structures]. Reference, Leningrad, Sudostroenie publ., 1983. 320 p.
7. Kazakevich M.I. *Aerodinamika mostov* [Aerodynamics bridges]. Moscow, Transport publ., 1987. 240 p.

Статья поступила в редакцию 23.01.2013

Информация об авторе

НАУМОВ Андрей Михайлович (Москва) — кандидат технических наук, доцент кафедры «Прикладная механика». МГТУ им. Н.Э. Баумана (105005, Москва, Российская Федерация, 2-я Бауманская ул., д. 5, стр. 1, e-mail: nam63@mail.ru).

Information about the author

NAUMOV Andrey Mikhailovich (Moscow) — Cand. Sc. (Eng.), Associate Professor of «Applied mechanics» Department. MSTU named after N.E. Bauman (105005, BMSTU, building 1, 2-nd Baumanskaya 5, Moscow, Russian Federation, e-mail nam63@mail.ru).