

УДК 621.01: 539.5

## Численное моделирование процессов деформирования элемента в форме винтовой цилиндрической пружины, выполненного из материала с эффектом памяти формы

**С.С. Гаврюшин, С.М. Ганыш**

*Изложена методика расчета исполнительного упругого элемента в форме винтовой цилиндрической пружины, выполненного из материала с эффектом памяти формы. Физически нелинейные уравнения состояния материала построены на основе диаграммы фазовых переходов. Приведен пример расчета элемента круглого поперечного сечения в предположении справедливости гипотез плоского сечения и неискривляемости радиуса.*

**Ключевые слова:** сплав с эффектом памяти формы, винтовая цилиндрическая пружина, кручение стержня, упругий элемент.

## Numerical simulation of deformation process for the shape memory alloy screw cylindrical spring element

**S.S. Gavryushin, S.M. Ganysh**

*The design procedure for an executive elastic element in the form of a screw cylindrical spring, made from a shape memory alloy is stated. Physically nonlinear equations of a material condition are derived on the basis of the phase transitions chart. An example of calculation of a round cross-section element is given under assumption that the hypotheses of the flat section and undistorted radius are true.*

**Keywords:** shape memory alloy, screw cylindrical spring, rod torsion, elastic element.

Элементы из материалов с эффектом памяти формы получили широкое распространение в приборостроении, медицине, авиационных и космических приложениях и т. д. [1–5].

Несмотря на активное распространение элементов с памятью формы, вопросы, связанные с моделированием и расчетом таких элементов, проработаны недостаточно. В настоящее время еще не выработан единый общепринятый подход к анализу элементов из сплава с эффектом памяти формы. Вместе с тем издано значительное число работ [2, 4], в которых предложены различные, в основном полуэмпириче-



**ГАВРЮШИН**  
Сергей Сергеевич

доктор технических наук,  
профессор, зав. кафедрой  
«Компьютерные системы  
автоматизации  
производства»



**ГАНЫШ**

Святослав Мирославович

аспирант, ассистент  
кафедры «Прикладная  
механика»

(МГТУ им. Н.Э. Баумана)  
e-mail: Holyslavik@yandex.ru

ские, методики расчета отдельных видов конструкций.

При создании численной модели упругого элемента приоритетное значение приобретает проблема формирования уравнений состояний, позволяющих адекватно описывать сложные фазовые и структурные превращения, происходящие при деформировании сплавов с эффектом памяти формы.

Для описания свойств сплава с эффектом памяти формы авторами данной статьи использована модель, предложенная в работе [1], согласно которой поведение материала описывается на основе экспериментально получаемой диаграммы фазовых переходов (рис. 1).

При низких температурах и малых напряжениях стабильной фазой сплава с эффектом памяти формы является неориентированный мартенсит, зона существования которого на рисунке обозначена М-мартенсит. При низких температурах и высоких напряжениях стабильной фазой является ориентированный мартенсит, обозначенный S-мартенсит. При высоких температурах стабильная фаза — аустенит. Заштрихованными областями обозначены зоны фазовых превращений — нестабиль-

ные зоны материала, в которых и происходит переход между двумя фазами.

В работе использована одномерная модель с двумя скалярными внутренними переменными, способная моделировать сверхупругое поведение и эффект памяти формы, которая в соответствии с классификацией [1] названа 1D-2 модель. Используемая при расчетах диаграмма строится в предположении, что зоны фазовых переходов ограничены прямыми линиями (см. рис. 1).

Рассмотрим элемент в форме винтовой цилиндрической пружины растяжения-сжатия с круглым поперечным сечением, работающим на кручение. Будем полагать справедливым аддитивное разложение полной угловой деформации на упругую деформацию и неупругую фазовую деформацию, которая возникает за счет фазовых превращений:

$$\gamma = \gamma^e + \gamma_L \xi_S, \tag{1}$$

где  $\gamma^e$  — упругая деформация;  $\gamma_L$  — максимальная фазовая деформация;  $\xi_S$  — фазовая доля ориентированного мартенсита.

Максимальная фазовая деформация предполагается постоянной для рассматриваемого материала, и рассматривается как мера максимальной деформации, которая может быть получена выравниванием S-мартенсита по одному направлению [1]. Соответственно для определения деформации необходимо знать значение объемной доли ориентированного мартенсита  $\xi_S$ .

В качестве переменных управления процессом используются напряжение  $\tau$  и температура  $T$ ; в качестве внутренних переменных — объемная доля S-мартенсита —  $\xi_S$ , объемная доля М-мартенсита —  $\xi_M$ , объемная доля аустенита —  $\xi_A$ .

Для описания процесса фазового превращения используется экспоненциальный закон течения процесса, который прост в применении и хорошо согласуется с экспериментальными данными [1]. Разрешающая система дифференциальных уравнений имеет следующий вид:

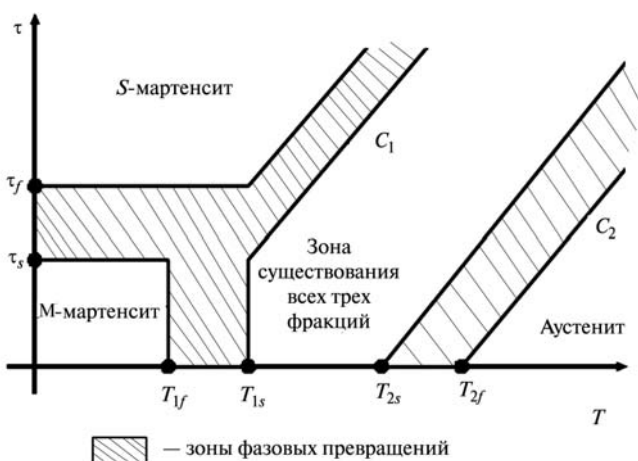


Рис. 1. Диаграмма фазовых переходов:

$\tau, T$  — касательное напряжение и температура, действующие на стержень из материала с эффектом памяти формы

$$\begin{aligned} \dot{\xi}_S &= \beta^{AS} (1 - \xi_S - \xi_M) \times \\ &\times \left[ \frac{H_1^{AS} \dot{\tau}}{(\tau - \tau_f)^2} + \frac{H_2^{AS} (\dot{\tau} - C_1 \dot{T})}{(\tau - C_1 T - \tau_f + C_1 T_{1S})^2} \right] + \\ &+ \beta^{MS} \xi_M \left[ \frac{H_1^{MS} \dot{\tau}}{(\tau - \tau_f)^2} + \frac{H_2^{MS} (\dot{\tau} - C_1 \dot{T})}{(\tau - C_1 T - \tau_f + C_1 T_{1S})^2} \right] - \\ &- \beta^{SA} \xi_S \frac{H^{SA} (\dot{\tau} - C_2 \dot{T})}{(\tau - C_2 T + C_2 T_{2f})^2}; \end{aligned} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \dot{\xi}_M &= -\beta^{MS} \xi_M \times \\ &\times \left[ \frac{H_1^{MS} \dot{\tau}}{(\tau - \tau_f)^2} + \frac{H_2^{MS} (\dot{\tau} - C_1 \dot{T})}{(\tau - C_1 T - \tau_f + C_1 T_{1S})^2} \right] + \\ &+ \beta^{AM} (1 - \xi_S - \xi_M) \frac{H^{AM} \dot{T}}{(T - T_{1f})^2} - \\ &- \beta^{MA} \xi_M \frac{H^{MA} (\dot{\tau} - C_2 \dot{T})}{(\tau - C_2 T + C_2 T_{2f})^2}, \end{aligned}$$

где функции-переключатели, отвечающие за течение процесса имеют следующий вид:

$$H_1^{AS} = \begin{cases} 1, & \text{если } T - T_{1S} < 0 \\ & \text{и } (\tau - \tau_S)(\tau - \tau_f) < 0 \text{ и } \dot{\tau} > 0, \\ 0, & \text{иначе;} \end{cases}$$

$$H_1^{MS} = H_1^{AS} = \begin{cases} 1, & \text{если } T - T_{1S} < 0 \\ & \text{и } (\tau - \tau_S)(\tau - \tau_f) < 0 \text{ и } \dot{\tau} > 0, \\ 0, & \text{иначе;} \end{cases} \quad (3)$$

$$H_2^{AS} = \begin{cases} 1, & \text{если } T - T_{1S} > 0 \\ & \text{и } (\tau - C_1 T - \tau_S + C_1 T_{1S}) \times \\ & \times (\tau - C_1 T - \tau_f + C_1 T_{1S}) < 0 \\ & \text{и } \dot{\tau} - C_1 \dot{T} > 0, \\ 0, & \text{иначе;} \end{cases}$$

$$H_2^{MS} = H_2^{AS} = \begin{cases} 1, & \text{если } T - T_{1S} > 0 \text{ и} \\ & \text{и } (\tau - C_1 T - \tau_S + C_1 T_{1S}) \times \\ & \times (\tau - C_1 T - \tau_f + C_1 T_{1S}) < 0 \\ & \text{и } \dot{\tau} - C_1 \dot{T} > 0, \\ 0, & \text{иначе;} \end{cases}$$

$$H^{SA} = \begin{cases} 1, & \text{если } \tau - C_2 T + C_2 T_{2S} > 0 \\ & \times (\tau - C_2 T + C_2 T_{2f}) < 0 \text{ и } \dot{\tau} - C_2 \dot{T} < 0, \\ 0, & \text{иначе;} \end{cases}$$

$$H^{MA} = H^{SA} = \begin{cases} 1, & \text{если } (\tau - C_2 T + C_2 T_{2S}) \times \\ & \times (\tau - C_2 T + C_2 T_{2f}) < 0 \\ & \text{и } \dot{\tau} - C_2 \dot{T} < 0, \\ 0, & \text{иначе;} \end{cases}$$

$$H^{AM} = \begin{cases} 1, & \text{если } (T - T_{1S})(T - T_{1f}) < 0 \text{ и } \dot{T} < 0, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

В выражениях (2), (3)  $\beta^i$  — коэффициенты, отвечающие за скорость течения процесса перехода (определяются экспериментально);  $H^i$  — функции-переключатели. Индекс « $i$ » принимает одну из пяти символьных комбинаций, соответствующую конкретному фазовому переходу, например,  $\beta^{AS}$  — коэффициент скорости течения процесса при переходе аустенита (A) в ориентированный мартенсит (S).

Дифференциальные уравнения (2) дополняются третьим уравнением — уравнением связи фазовых долей в материале:

$$\xi_S + \xi_M + \xi_A = 1. \quad (4)$$

Соотношения (2)–(4) позволяют определять величины фазовых долей в материале в зависимости от истории нагружения.

Для винтовой цилиндрической пружины растяжения-сжатия при малых углах подъема  $\alpha$  витки работают в основном на кручение [6]. Главным силовым фактором в сечении является крутящий момент, который связан с касательными напряжениями следующим соотношением:

$$M_{кр} = 2\pi \int_0^{\frac{d}{2}} \tau \rho^2 d\rho. \quad (5)$$

Здесь  $d$  — диаметр поперечного сечения;  $\rho$  — текущий радиус.

Угловая деформация стержня рассматривается в виде суперпозиции двух деформаций — упругой и фазовой:

$$\gamma = \frac{\tau}{G} + \gamma_L \xi_s. \quad (6)$$

где  $G$  — модуль сдвига.

По аналогии с упругопластическим кручением стержней с круглым поперечным сечением [6], используем гипотезы плоских сечений и неискривляемости радиуса. Полагаем справедливым следующее геометрическое соотношение:

$$\gamma = \rho\theta. \quad (7)$$

где  $\theta$  — крутка.

В связи с тем, что полная угловая деформация распределена по сечению линейно, напряжения  $\tau$  по сечению по мере роста объемной доли ориентированного мартенсита перестают быть линейными по сечению и перераспределяются. С помощью системы дифференциальных уравнений, описывающих фазовые переходы в материале с памятью формы, строится диаграмма кручения  $\tau = f(\gamma)$ , показывающая зависимость между касательным напряжением в сечении стержня и полной угловой деформации. В силу линейного распределения полной угловой деформации по сечению данная диаграмма, по сути, является эпюрой касательных напряжений по сечению стержня.

Выразив из формулы (7) радиус  $\rho$  и подставив его в формулу (5), получаем выражение для крутящего момента:

$$M_{кр} = \frac{2\pi}{\theta^3} \int_0^{\gamma_{max}} \tau \gamma^2 d\gamma, \quad (7)$$

где

$$\gamma_{max} = \frac{d}{2}\theta. \quad (8)$$

Интеграл рассчитывается по численной зависимости  $\tau = f(\gamma)$ , полученной для материала. Соотношение (7) позволяет определить зависимость между круткой  $\theta$  и крутящим моментом  $M_{кр}$ . Для перехода от задачи кручения стержня к расчету пружины  $F$  используют следующие выражения усилия, приложенного

к концу пружины и перемещения конца пружины  $w$ :

$$F = M_{кр} \frac{D}{2}; \quad (9)$$

$$w = \frac{D}{2} \theta \pi D i. \quad (10)$$

Выражения (9), (10) позволяют перестроить диаграмму  $M_{кр}(\theta)$  в диаграмму  $F(w)$ .

В данной работе рассмотрено применение винтовой цилиндрической пружины из сплава с памятью формы в качестве исполнительного упругого элемента силовых приводов и термодатчиков. Принципиальная схема устройства, совершающего работу, представлена на рис. 2. В пружине с помощью груза создается напряжение, при котором мартенсит переходит в  $S$  состояние (состояние  $A$ ). Затем, при нагреве (состояние  $B$ ) и последующем охлаждении (состояние  $C$ ) происходит переход мартенсита в аустенит и обратно, при этом груз перемещается. В итоге пружина совершает работу.

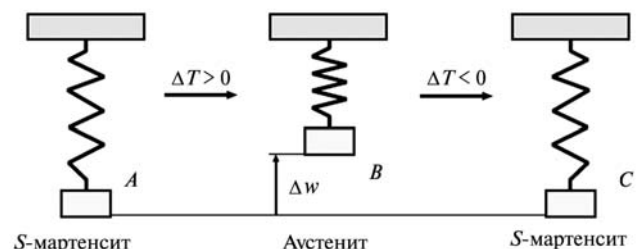


Рис. 2. Принципиальная схема устройства, совершающего работу

На основе разработанной методики была подготовлена программа для ЭВМ, предназначенная для расчета исполнительных элементов в форме винтовых цилиндрических пружин, изготовленных из материалов с эффектом памяти формы.

В качестве примера ниже приведен расчет упругого элемента, соответствующего следующим исходным данным:

- геометрические размеры пружины: диаметр витка  $d = 0,002$  м, средний диаметр пружины  $D = 0,04$  м, число витков  $i = 20$ , угол подъема витка  $\alpha = 5^\circ$ ;

- характерные температуры материала:  $T_{1f} = 10^\circ\text{C}$ ,  $T_{1s} = 30^\circ\text{C}$ ,  $T_{2s} = 60^\circ\text{C}$ ,  $T_{2f} = 80^\circ\text{C}$ ;
- характерные значения напряжений и деформаций фазовых переходов:  $\tau_s = 1 \cdot 10^7$  Па,  $\tau_f = 2 \cdot 10^7$  Па,  $\gamma_L = 0,01$ ;
- коэффициенты скорости течения процесса и коэффициенты наклона кривых диаграммы:  $\beta^{AS} = \beta^{SA} = \beta^{MS} = \beta^{AM} = \beta^{MA} = 5 \cdot 10^6$  Па,  $C_1 = 2 \cdot 10^6$  Па/°C,  $C_2 = 2 \cdot 10^6$  Па/°C.

Зависимость крутящего момента от крутки для стержня круглого поперечного сечения, который получается в результате решения соотношения (7), представлена на рис. 3.

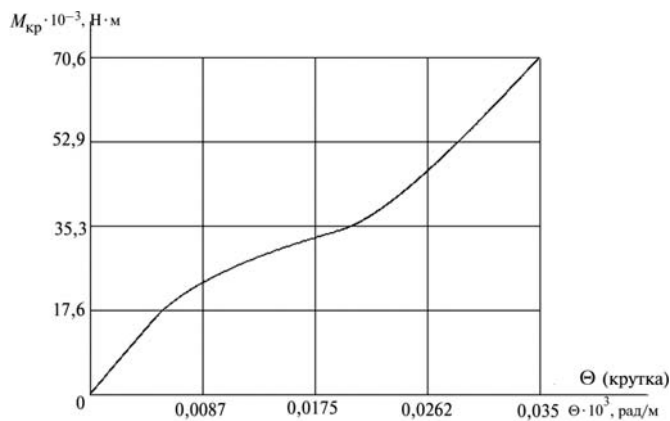


Рис. 3. Зависимость крутки от крутящего момента

Распределение фазовой доли ориентированного мартенсита по сечению для постоянной температуры при разных значениях крутящего момента, действующего на сечение, а также

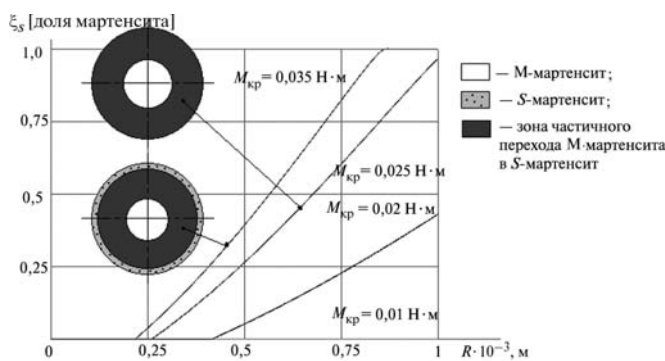


Рис. 4. Распределение фазовой доли S-мартенсита по сечению при различных значениях крутящего момента

диаграммы распределения фазовых долей по сечению представлены на рис. 4.

Как отмечалось выше, касательные напряжения по сечению стержня распределены не равномерно. Эпюры касательных напряжений по сечению стержня в зависимости от крутящего момента приведены на рис. 5.

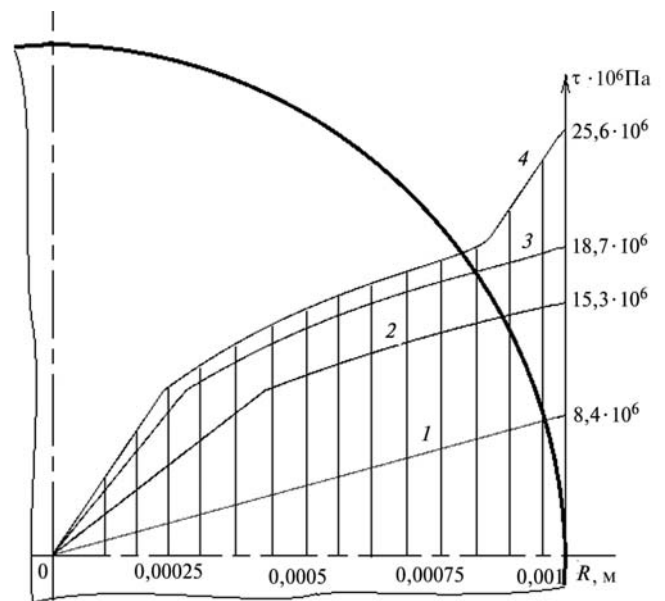


Рис. 5. Эпюры касательных напряжений по сечению при различных значениях крутящего момента: 1 — 0,01 Н·м; 2 — 0,02 Н·м; 3 — 0,025 Н·м; 4 — 0,035 Н·м

Траектория перемещения конца пружины, нагруженной постоянной силой при нагреве, а также распределение фазовых долей по сечению при различных значениях температуры представлены на рис. 6. Точкам A и B соответствуют состояния A и B пружины, изображенной на рис. 2.

На диаграмме (см. рис. 4) распределения фазовых долей видно, что первыми начнут претерпевать фазовый переход точки в центре сечения (в предположении, что температура по сечению распределена равномерно). Это связано с тем, что на внутренних радиусах касательные напряжения меньше, а следовательно меньше и сопротивление фазовому переходу. Последними фазовый переход будут претерпевать точки на внешнем радиусе.

С помощью графиков перемещений можно оценить работу, совершаемую пружиной за

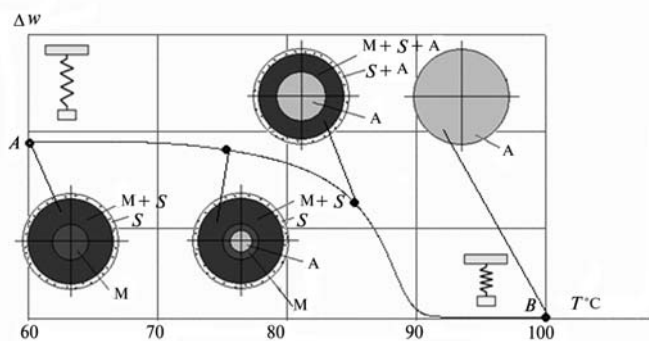


Рис. 6. Зависимость удлинения конца пружины от температуры при нагреве:

М — неориентированный мартенсит;  
 S — ориентированный мартенсит; А — аустенит

один термоджикл, которая соответствует примерно  $10^5$  Дж, что согласуется с экспериментальными данными, приведенными в работе [2].

Представленные в работе математическая модель и методика расчета могут быть рекомендованы для проектирования силовых

установок с исполнительным элементом в форме винтовой цилиндрической пружины, изготовленной из материала с эффектом памяти формы.

### Литература

1. *Auricchio F.* Shape Memory Alloys: applications, micromechanics, macromodelling and numerical simulations. California: Berkeley, 1995. 163 p.
2. *Santiago Anadon J.R.* Large force shape memory alloy linear actuator. Florida: University of Florida, 2002. 76 p.
3. *Garner L.J., Wilson L.N., Lagoudas D.C.* Development of a shape memory alloy actuated biomimetic vehicle. *Smart Structures and Materials*, 9(5): 673—683, October 2000.
4. *Шишкин С.В., Махутов Н.А.* Расчет и проектирование силовых конструкций на сплавах с эффектом памяти формы. Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотичная динамика», 2007. 412 с.
5. *Лихачев В.А., Кузьмин С.Л., Каменцева З.П.* Эффект памяти формы. Л.: Изд. ЛГУ, 1987. 216 с.
6. *Пономарев С.Д., Андреева Л.Е.* Расчет упругих элементов машин и приборов. М.: Машиностроение, 1980. 326 с.

Статья поступила в редакцию 31.05.2012