

Расчет и конструирование машин

УДК 539.3: 672.3

Бессеточный метод и его применение для расчета напряженно-деформированного состояния упругой матрицы при штамповке эластичными средами

М.В. Попков

На примере эластичной матрицы для листовой штамповки представлены формулировки и результаты решения задачи определения напряженно-деформированного состояния при больших деформациях резинотехнических изделий в условиях плоского деформированного состояния. Применялась модель неогукова слабосжимаемого материала. Задача решена бессеточным методом в нелинейной постановке, а для учета контактного взаимодействия упругой матрицы с жестким штампом использована итерационная схема — метод Удзавы. Бессеточный метод малоизвестен в нашей стране, поэтому в работе большое внимание уделено описанию его принципов и проверкам на тестовых задачах.

Ключевые слова: бессеточный метод, точечный метод, большие деформации, контактная задача, метод Удзавы, листовая штамповка эластичными средами.

Meshfree Method and its Application for Determining Stress-strain State of Elastic Matrix for Stamping by Elastic Medium

M. V. Popkov

This paper presents the formulation and solving the problem of determining the stress-strain state in rubber products in a state of plane strain and large deformations. As an example the stress-strain state in an elastic stamping matrix is determined. Neo-Hookean solid hyperelastic material model is used. When solving the meshfree method in the nonlinear formulation and Uzawa algorithm



ПОПКОВ
Михаил Викторович
(МГТУ им. Н.Э. Баумана)

POPKOV
Michael Viktorovich
(Moscow, Russian Federation,
MSTU named
after N.E. Bauman)

for taking account of the contact interaction of elastic matrix with a rigid stamp were being applied. Since the meshless method is relatively little known in this country, an in-depth explanation of the essential concepts and solving the test problems are given.

Keywords: meshfree method, point-method, large strain theory, contact problem, Uzawa method, sheet stamping by elastic medium.

В настоящее время существует много активно развивающихся численных методов расчета напряженно-деформированного состояния (НДС) деформируемых твердых тел. В большинстве своем методы основаны на разбиении расчетной области некоторой сеткой. Однако существуют методы, не использующие разбиение на какую-либо сетку, такие методы называют бессеточными или точечными (Mesh Free, MFree, Point-Method).

Идея отказа от аппроксимаций уравнений в частных производных на множестве узлов, образующих сетку, возникла еще в 60-х годах прошлого столетия. Впервые, по-видимому, было предложено использовать достаточно произвольно расположенные узлы в рамках лагранжевой газовой динамики. Это позволило преодолеть трудности, связанные с неприемлемыми искажениями сеток в процессе счета. В настоящее время построение, исследование и применение бессеточных методов (БМ) достаточно популярно за рубежом. Многие сторонники особо отмечают, что этот метод не требует при расчете решать задачу построения высококачественной сетки, которая зачастую сложнее исходной задачи; может быть полезен при крайне нерегулярной форме границы (например, в случае обледенения несущих поверхностей самолета), а также в случае больших деформаций.

Бессеточный метод — сравнительно новый и малоизвестный в нашей стране. Русскоязычная литература, которая описывала бы основы этого метода, отсутствует. Большинство имеющихся статей (например, [1]), описывающих особенности применения БМ к конкретным задачам, делают отсылку к зарубежным первоисточникам, таким как [2, 3].

В данной работе проведена апробация БМ на простых задачах с целью его изучения и распространение на контактную задачу с геометрической нелинейностью. Отметим, что на данном этапе не ставилось целью сравнение БМ с существующими «сеточными» аналогами, а исследовались принципы метода и возможность его применения к поставленной задаче.

Бессеточный метод можно применять при решении широкого круга задач. Автор предлагаемой статьи использовал его для расчета НДС упругой матрицы при штамповке эластичными средами.

При штамповке эластичными средами, в отличие от обычной листовой штамповки, пуансон, или матрица, заменяются эластичным инструментом из резины или полиуретана. Это позволяет снижать затраты на оснастку в мелкосерийном и опытном производствах. Кроме того, штамповка эластичными средами среди прочих методов выделяется высокой равномерностью прилагаемых к заготовке давлений, что исключает резкие концентрации контактных нагрузок. Данным методом из листовых заготовок могут быть получены разные детали, в том числе замкнутого (различные трубы и сильфоны) и незамкнутого профиля (детали крыльев самолета).

По данному виду штамповки литературы много (например, [4]), в том числе и диссертаций, но большинство исследователей интересуется НДС самого листа, а исследований, посвященных расчету НДС эластичной матрицы очень мало. Однако и с матрицей тоже бывают проблемы — высокие напряжения могут приводить к разрушению (в том числе усталостному) эластичной матрицы.

Расчетная модель. Для построения математической модели следует принять несколько допущений:

- рассматриваем контактную задачу о плоской деформации. Контур пуансона является цилиндрической поверхностью, матрица — прямоугольным параллелепипедом;
- матрица находится в «корыте», плотно прилегая к его стенкам, но не зажата в нем;

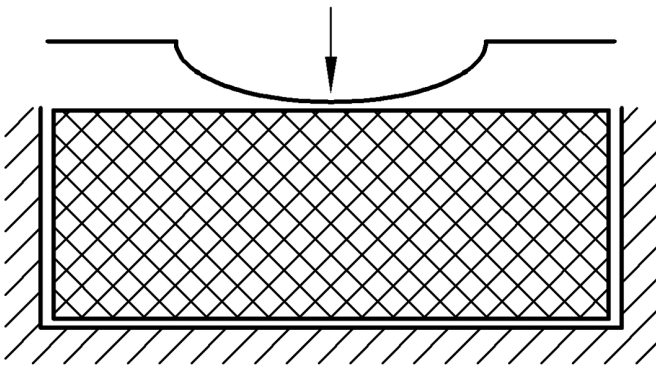


Рис. 1. Схема контактной задачи о штамповке в упругую матрицу

- рассматриваем конечный момент нагружения когда контур пуансона по всей поверхности прижат к матрице;
- имеют место большие деформации, материал является гиперупругим и практически несжимаемым (резина, полиуретан).

Расчетная схема представлена на рис. 1.

В данной работе рассмотрены несколько тестовых задач, в том числе в линейной и нелинейной постановках. Под линейной постановкой будем понимать задачу о малых перемещениях и деформациях, механические параметры для такой задачи выбираются стандартными для металла:

$$E = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа}; \mu = 0,3.$$

Под нелинейной постановкой будем понимать задачу о больших деформациях гиперупругих материалов, таких как резина или полиуретан. Их механические характеристики могут быть близки к следующим:

$$E = 4,49 \text{ МПа}; \mu = 0,495.$$

Бессеточный метод (основные понятия).

В книге [2] проведено сравнение между БМ и методом конечных элементов (МКЭ). Алгоритм обоих методов начинается с построения геометрии. Затем создается сетка, строится глобальная матрица, задаются граничные условия, вычисляются перемещения и напряжения. Построение сетки в принципе в обоих методах аналогичное, за исключением того, что в БМ сетка определяет *только положение* узлов, но не связь их между собой.

Отличие методов состоит в основном в функциях формы: в МКЭ она создается внутри каж-

дого элемента до решения задачи, в БМ — непосредственно во время решения задачи и, по сути, она меняется при изменении расстояния между узлами.

Когда известна расчетная область и узловая сетка, задается аппроксимация перемещений с помощью функций формы

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n \varphi_i(\mathbf{x}) u_i, \quad (1)$$

где n — число узлов в области поддержки (support domain) точки с координатами $\mathbf{x} = (x, y)$; $\varphi_i(\mathbf{x})$ — значение функции формы i -го узла в данной точке \mathbf{x} ; u_i — перемещение i -го узла.

Функция формы может быть выражена через весовую функцию посредством представления через некий базис, например полиномиальный. В простейшем случае можно также использовать весовую функцию в качестве функции формы, но это дает плохие результаты, особенно для напряжений в двумерных задачах. Поэтому в работе [2] советуют определять перемещения несколько более сложным образом — аппроксимацией перемещений по весовым функциям. Существует несколько методов аппроксимаций, одним из которых является метод движущихся наименьших квадратов (moving least square — MLS) [3]. Этот метод и был использован в настоящей работе. Он позволяет определить и значения компонент матрицы функций формы и вычислить их необходимые производные, которые встретятся ниже. Описание данного метода здесь не приводится.

Весовые функции могут быть разные, но все они имеют похожий графический вид (рис. 2). В работе применялась простая экспоненциальная зависимость:

$$W_3(d) = e^{-k(d)^2},$$

где d — нормированная по расстоянию между точками координата, $d = \frac{|x - x_I|}{d_c}$.

Построение системы уравнений для плоских задач. Приведем общее построение системы уравнений БМ на основе энергетического метода Ритца для двумерных задач при малых или больших деформациях. Для плоской задачи в

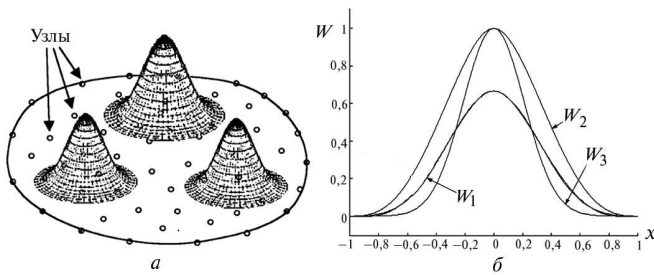


Рис. 2. Примеры функций формы для двумерной задачи (а), весовые функции (б):

W_1 — кубический сплайн; W_2 — сплайн 4-й степени; W_3 — экспонента

теории упругости (ТУ) имеются следующие уравнение и граничные условия:

$$[\mathbf{R}]^T \{\boldsymbol{\sigma}\} + \{\mathbf{b}\} = \{\mathbf{0}\};$$

$$\{\mathbf{u}\}|_{\Gamma_u} = \{\mathbf{u}^*\};$$

$$\{\mathbf{l}\}\{\boldsymbol{\sigma}\}|_{\Gamma_p} = \mathbf{q}^*,$$

где

$$[\mathbf{R}]^T = \begin{bmatrix} \frac{d}{dx} & 0 & \frac{d}{dy} \\ 0 & \frac{d}{dy} & \frac{d}{dx} \end{bmatrix}; \{\boldsymbol{\sigma}\} = \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix};$$

$$\{\mathbf{u}(x, y)\} = \begin{bmatrix} u(x, y) \\ v(x, y) \end{bmatrix};$$

$$\{\mathbf{q}\} = \begin{bmatrix} q_x(x, y) \\ q_y(x, y) \end{bmatrix} \text{ — вектор поверхностных нагрузок;}$$

$$\{\mathbf{b}\} = \begin{bmatrix} b_x(x, y) \\ b_y(x, y) \end{bmatrix} \text{ — вектор объемных нагрузок.}$$

Перемещения (1) в соответствии с методом MLS (см. [3]) описываются следующим образом:

$$\{\mathbf{u}\} = \begin{bmatrix} u(x, y) \\ v(x, y) \end{bmatrix} = [\Phi(\mathbf{x})]\{\mathbf{c}\}. \quad (2)$$

Здесь

$$[\Phi(\mathbf{x})] = \begin{bmatrix} \Phi_I(x, y) & 0 & \Phi_{II}(x, y) & \dots \\ 0 & \Phi_I(x, y) & 0 & \dots \end{bmatrix} \text{ —}$$

матрица функций формы. Ее компоненты определяются по методу MLS, о котором было сказано выше.

Запишем выражение энергий (плоский случай, объемные нагрузки не рассматриваются):

$$U = \frac{1}{2} \int_S W(\{\mathbf{u}\}) dS; \quad V = \int_{\Gamma_p} \{\mathbf{q}\}^T \{\mathbf{u}\} d\Gamma,$$

где $W(\{\mathbf{u}\})$ — упругий потенциал; S — расчетная область; Γ_p — нагруженная граница.

Таким образом, полная потенциальная энергия с учетом выражения (2), может быть представлена в следующем виде:

$$\Pi(\{\mathbf{c}\}) = \int_S W(\{\mathbf{c}\}) dS + \int_{\Gamma_p} \{\mathbf{q}\}^T [\Phi(\mathbf{x})]\{\mathbf{c}\} d\Gamma. \quad (3)$$

Константы $\{\mathbf{c}\}$ определяются из условия минимума полной энергии системы:

$$\frac{d\Pi}{dc_i} = 0.$$

Сначала проводится дифференцирование функции W по c_i , затем интегрирование по объему:

$$\frac{d\Pi}{d\{\mathbf{c}\}} = \int_S \frac{dW(\{\mathbf{c}\})}{d\{\mathbf{c}\}} dS + \int_{\Gamma_p} \{\mathbf{q}\}^T [\Phi(\mathbf{x})] d\Gamma = 0.$$

Для учета граничных условий используют метод множителей Лагранжа:

$$\lambda(\mathbf{x}) = \sum_I^{n_\lambda} N_I(s) \lambda_I, \quad \mathbf{x} \in \Gamma_u,$$

где n_λ — число узлов, используемых для данной интерполяции; s — координата вдоль соответствующей границы; λ_I — множители Лагранжа в I -м узле границы; Γ_u — линия граничного условия; N_I — интерполянт, может быть интерполянтом Лагранжа степени n , который используется в МКЭ, или другой. В данной работе используется интерполянт следующего вида:

$$N_k(s) = \left(\frac{s - 0,5L}{L} \right)^{k-1}, \quad k = 1, \dots, n_\lambda.$$

Здесь L — длина данной границы, на которую наложено граничное условие.

$$\begin{aligned} \{\lambda(\mathbf{s})\} &= \sum_{I=1}^{n_\lambda} \begin{bmatrix} N_I & 0 \\ 0 & N_I \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \lambda_{uI} \\ \lambda_{vI} \end{Bmatrix} = \\ &= \sum_{I=1}^{n_\lambda} [N_I] \begin{Bmatrix} \lambda_I \end{Bmatrix} = [N(\mathbf{s})] \{\lambda\}. \end{aligned}$$

Выражение для энергии (3) принимает вид:

$$\begin{aligned} \Pi(\{\mathbf{c}\}) &= \iint_S \tilde{W}(\{\mathbf{c}\}) dS + \int_{\Gamma_p} \{\mathbf{q}\}^T [\Phi(\mathbf{x})] \{\mathbf{c}\} d\Gamma + \\ &+ \int_{\Gamma_u} \{\lambda\}^T [N(\mathbf{s})]^T [\Phi(\mathbf{x})] \{\mathbf{c}\} d\Gamma. \end{aligned}$$

Минимизируя энергию, получим следующее уравнение:

$$\begin{aligned} \frac{d\Pi}{d\{\mathbf{c}\}} &= \iint_S \frac{dW(\{\mathbf{c}\})}{d\{\mathbf{c}\}} dS + \int_{\Gamma_p} [\Phi(\mathbf{x})]^T d\Gamma \{\mathbf{q}\} + \\ &+ \int_{\Gamma_u} [\Phi(\mathbf{x})]^T [N(\mathbf{s})] d\Gamma \{\lambda\} = 0. \end{aligned}$$

Это уравнение дополняется уравнениями для граничных условий:

$$\int_{\Gamma_u} [N(\mathbf{s})]^T [\Phi(\mathbf{x})] d\Gamma \{\mathbf{c}\} = \int_{\Gamma_u} \{\mathbf{u}_0(\mathbf{s})\} d\Gamma = \mathbf{U}_0.$$

Обозначив

$$\int_{\Gamma_u} [\Phi(\mathbf{x})]^T [N(\mathbf{s})] d\Gamma = [\mathbf{I}_{\Gamma_u}]; \quad \int_{\Gamma_p} [\Phi(\mathbf{x})]^T d\Gamma = [\mathbf{I}_{\Gamma_p}],$$

получим окончательную систему уравнений:

$$\begin{aligned} \left\{ \begin{array}{l} \iint_S \frac{dW(\{\mathbf{c}\})}{d\{\mathbf{c}\}} dS \\ [\mathbf{I}_{\Gamma_u}]^T \{\mathbf{c}\} \end{array} \right\} + \left\{ \begin{array}{l} [\mathbf{I}_{\Gamma_p}] \{\lambda\} \\ [\mathbf{0}] \end{array} \right\} = \\ = \left\{ \begin{array}{l} [\mathbf{I}_{\Gamma_p}] \{\mathbf{q}\} \\ \{\mathbf{U}_0\} \end{array} \right\}. \end{aligned} \quad (4)$$

В случае линейных малых деформаций

$$\begin{aligned} W(\{\mathbf{u}\}) &= \{\boldsymbol{\sigma}\}^T \{\boldsymbol{\varepsilon}\}; \\ \{\boldsymbol{\sigma}\} &= [\mathbf{D}] \{\boldsymbol{\varepsilon}\}; \quad \{\boldsymbol{\varepsilon}\} = [\mathbf{R}] \{\mathbf{u}\}; \end{aligned} \quad (5)$$

$$[D] = \frac{E}{1-\mu^2} \begin{bmatrix} 1 & \mu & 0 \\ \mu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\mu}{2} \end{bmatrix},$$

система примет вид

$$\begin{bmatrix} [\mathbf{K}] & [\mathbf{I}_{\Gamma_u}] \\ [\mathbf{I}_{\Gamma_u}]^T & [\mathbf{0}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\mathbf{c}\} \\ \{\lambda\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} [\mathbf{I}_{\Gamma_p}] \{\mathbf{q}\} \\ \mathbf{U}_0 \end{Bmatrix}, \quad (6)$$

где

$$[\mathbf{K}] = \iint_S [d\Phi(\mathbf{x})]^T [\mathbf{D}] [d\Phi(\mathbf{x})] dS.$$

Случай нелинейных больших деформаций рассмотрен ниже.

При определении матриц $[\mathbf{I}_{\Gamma_u}]$ и $[\mathbf{I}_{\Gamma_p}]$, а также при вычислении $[\mathbf{K}]$ при малых деформациях

или $\iint_S \frac{dW(\{\mathbf{c}\})}{d\{\mathbf{c}\}} dS$ при больших деформациях

необходимо выполнить интегрирование по площади или по границе. Для этого был использован метод гауссовых квадратур (см. [5]).

Нелинейная задача о больших деформациях.

Для моделирования свойств материала использовалась одна из возможных моделей — неогупков материал (Neo-Hookean solid hyperelastic material model). Достоинством этой модели является то, что входящие в выражение константы имеют понятное физическое значение. Упругий потенциал такой модели описывается следующим выражением:

$$W = \frac{G}{2} \left(I_1 J^{-\frac{2}{3}} - 3 \right) + \frac{k}{2} (J - 1)^2, \quad (7)$$

где G, k — модуль сдвига и модуль объемного сжатия; J — мера объемной деформации, $J = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3$; I_1 — первый инвариант тензора меры деформаций, $I_1 = \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2$; ($\lambda_i = \sqrt{1 + 2\varepsilon_i}$ — степени удлинения). Далее приняты коэффициенты $G = 1,5$ МПа, $k = 0,1$ ГПа.

Для вычисления инвариантов без определения степеней удлинения λ_i может быть использован тензор Грина:

$$\hat{\mathbf{G}} = \hat{\mathbf{A}}^T \hat{\mathbf{A}}.$$

Здесь $\hat{\mathbf{A}}$ — тензор дисторсии (искажения формы),

$$[\hat{A}] = \begin{bmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + 1 & \frac{\partial u_1}{\partial x_2} & \frac{\partial u_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial u_2}{\partial x_1} & \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + 1 & \frac{\partial u_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial u_3}{\partial x_1} & \frac{\partial u_3}{\partial x_2} & \frac{\partial u_3}{\partial x_3} + 1 \end{bmatrix}.$$

Поскольку λ^2 — собственные числа матрицы $[\hat{G}]$, то справедливы следующие выражения:

$$I_1 = \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 = I_{G1};$$

$$J = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 = \sqrt{\det[\hat{G}]}.$$

Напряжения вычисляются по формуле [6]

$$\sigma_i = \frac{\lambda_i}{J} \frac{\partial W}{\partial \lambda_i} = GJ^{-\frac{5}{3}} \left(\lambda_i^2 - \frac{1}{3} I_1 \right) + k(J - 1). \quad (8)$$

По формулам (8) можно найти главные напряжения, которых достаточно для расчета на прочность, но для проверки равновесия, а также для сравнения с линейной задачей, удобно оперировать напряжениями в осях x — y . Напряжения Коши определялись с помощью тензорных преобразований с использованием тензора Грина \hat{G} и тензора поворота \hat{L} .

Результаты решений тестовых задач. Решено несколько тестовых плоских задач теории упругости, в том числе: задача о растяжении полосы, об изгибе консольно закрепленной полосы и двупертой балки, задача Кирша о растяжении пластины с отверстием. Во всех задачах получено хорошее соответствие теоретическим результатам. Ниже приведены некоторые из полученных решений.

Решение задачи о *растяжении полосы*. Параметры для расчета: длина $L = 200$ мм, ширина $H = 50$ мм, нагрузка $P = 0,05$ МПа, количество узлов вдоль оси x и вдоль оси y : $nx = 5, ny = 4$.

При малых деформациях решение задачи в нелинейной постановке (4), (7) должно совпасть с решением в линейной постановке (6). Для сравнения решений параметры упругих потенциалов (5), (7) с помощью известных формул связи упругих постоянных (9) были заданы так, чтобы они соответствовали одному материалу:

Сравнение линейной и нелинейной постановки

	ΔL , мм	ΔH , мм	σ_x , МПа
<i>Малые деформации</i>			
Теоретическое решение	2,23	-0,27	0,05
Линейная постановка	2,24	-0,27	0,0500 (равномерно)
Нелинейная постановка	1,92	-0,41	0,0504—0,0509
<i>Большие деформации</i>			
Теоретическое решение	44,6668	-5,50	1,0
Линейная постановка	44,80	-5,45	1,0
Нелинейная постановка	45,25	-8,8	1,2

$$E = 9 \frac{GK}{G + 3K}; \quad \mu = -\frac{1}{2} \frac{2G - 3K}{G + 3K}. \quad (9)$$

Тогда

$$G = 1,5 \text{ МПа}; \quad K = 0,1 \text{ ГПа} \Leftrightarrow E = 4,4776 \text{ МПа};$$

$$\mu = 0,4925.$$

Результаты расчета представлены в таблице.

Решение в линейной постановке полностью совпадает с теоретическим. «Нелинейное» решение достаточно близко к ним. При увеличении нагрузки до 1 МПа, как и ожидалось, отличие решений возросло (см. таблицу). Напряжения в нелинейной постановке больше, что справедливо, так как в случае больших деформаций учитывается изменение ширины полосы.

Рассмотрим решение еще одной задачи в линейной постановке — *задачи Кирша* о растяжении квадратной пластины с небольшим отверстием (считается что при отношении диаметра к длине стороны порядка 1/5 краевой эффект затухает). Это известная тестовая задача. Традиционно рассматривалась четверть пластины, так как она имеет две оси симметрии. Пластина растягивалась в горизонтальном направлении. Решение проводилось при следующих параметрах: размер пластины $b = 500$ мм, радиус отверстия $a = 100$ мм, количество узлов по оси x и по оси y : $nx = ny = 41$.

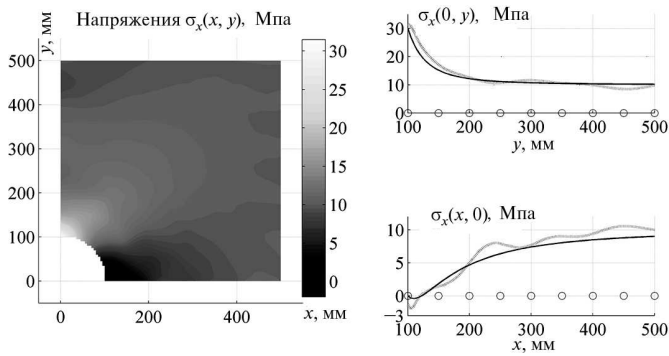


Рис. 3. Распределения напряжений:

— — численное решение;
 — — теоретическое решение

Распределение напряжений и сравнение с известными теоретическими распределениями вдоль осей симметрии показано на рис. 3. Полученные численно напряжения довольно близки теоретическим значениям, кроме того решение отражает и наличие области с отрицательным напряжением у отверстия.

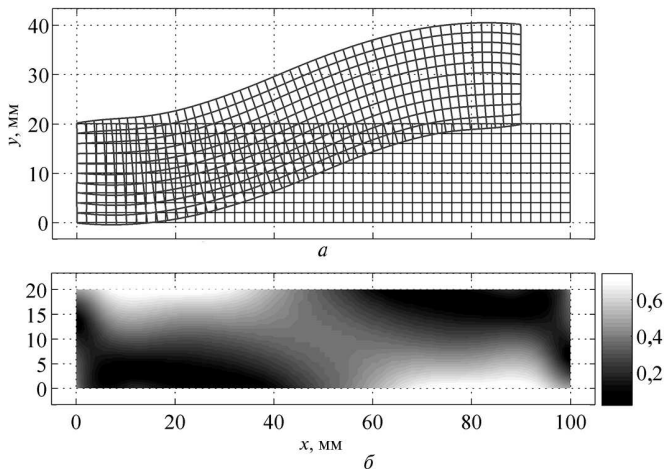


Рис. 4. Результат решения задачи изгиба консоли в нелинейной постановке:

a — деформированное состояние;
b — эквивалентные напряжения

В качестве примера одной из решенных задач в нелинейной постановке рассмотрим решение задачи об *изгибе консоли* с кинематическим нагружением. Размеры полосы 100×20 мм. Левый край пластины закреплен, второй перемещается на 20 мм вверх и на 10 мм влево. Таким образом, имеют место большие деформации и нелинейная задача. Материал — резина с теми же параметрами, что и в задаче о растяжении. Деформированное состояние и распре-

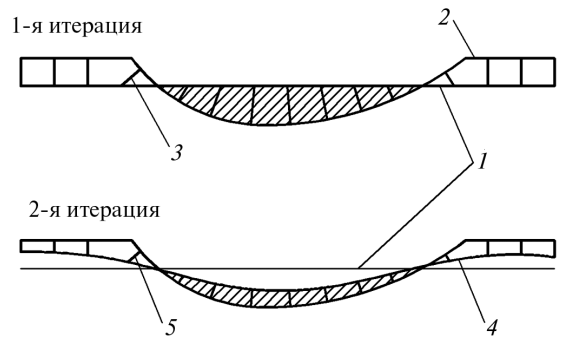


Рис. 5. Итерационная схема учета контактного взаимодействия:

1 — контур недеформированной матрицы;
2 — контур плунжера; *3, 5* — нормаль к плунжеру в *i*-й точке; *4* — контур деформированной матрицы;
 штриховка — проникновение тел; без штриховки — зазор

деление эквивалентных напряжений представлены на рис. 4.

Контактная задача. Поскольку пуансон считаем абсолютно жестким, требуется определить его воздействие на матрицу. Положение пуансона в конечный момент времени рассчитываем исходя из сохранения объема матрицы:

$$\int_0^L F_{\text{плун}}(x) dx = LH. \quad (10)$$

Затем к контуру матрицы прикладываем нагрузку, которая должна обеспечить заданное плунжером изменение контура. Функцию распределения этой нагрузки и нужно найти.

Закон распределенных сил определяли следующим образом. На линию матрицы, которая должна будет вступить в контакт, наносим множество специальных «контактных» узлов. Условием контакта является «проникновение тел» (на рис. 5 соответствующие области показаны штриховкой). Значение силы в каждом узле вычисляется суммированием малых добавок. Первоначально контактная сила принимается равной нулю, далее определяется ее приращение, пропорциональное длине нормали *i*-го узла d_i^{k-1} с соответствующим знаком (*k* — номер текущей итерации), Cd_i^{k-1} .

Приращение добавляется к соответствующему, накопленному к данному шагу, значению силы в узле:

$$P_i^k = P_i^{k-1} + Cd_i^{k-1}. \quad (11)$$

Определив значение и направление силы в каждом узле, можно интерполяцией построить закон распределения нагрузки по границе, разложив ее на вертикальную и горизонтальную составляющие:

$$\mathbf{P}^k(x) = \sum_i^{n_{ys}} N_i(x) P_i^k \mathbf{n}_i, \quad (12)$$

где \mathbf{n}_i — вектор в координатах x — y , направленный по нормали к контуру плунжера; $N_i(x)$ — интерполянт, использовавшийся для граничных условий.

Растягивающие контактные силы не допускаются, т. е. при возникновении растягивающей контактной силы она мгновенно заменяется нулевым значением. Таким образом, получаем силовое граничное условие, с учетом которого решается краевая задача. Через несколько десятков итераций контактные силы (12) перестают меняться, т. е. процесс сходится. Описанный алгоритм практически по-

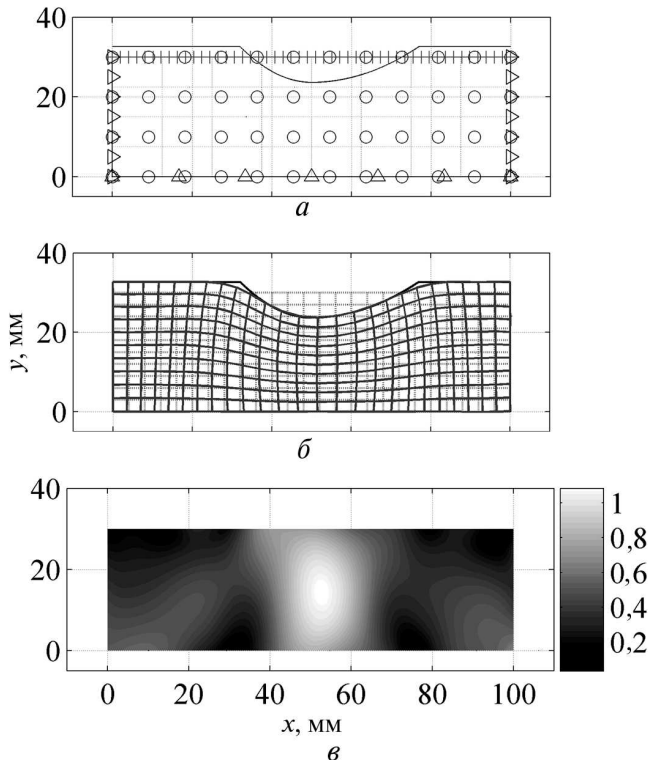


Рис. 6. Модель (а), деформированное состояние (б) и эквивалентные напряжения, МПа, (в) в упругой матрице при штамповке пуансоном:

○ — узлы; △ — закрепление линии, на которой они расположены в соответствующем (вертикальном или горизонтальном) направлении; + — линия контакта

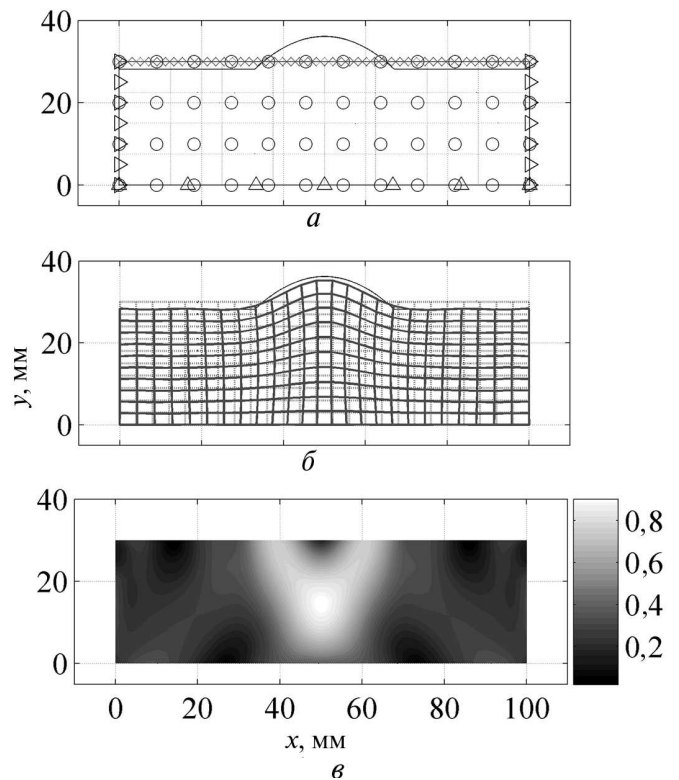


Рис. 7. Модель (а), деформированное состояние (б) и эквивалентные напряжения, МПа, (в) в упругой матрице при штамповке-вытяжке:

○ — узлы; △ — закрепление линии, на которой они расположены в соответствующем (вертикальном или горизонтальном) направлении; × — линия контакта

вторяет известный алгоритм решения контактных задач, предложенный Удзавой (см., например, [7]).

Решение задачи о штамповке. Схема задачи представлена на рис. 1. Были получены результаты некоторых практически важных задач: для симметричного и несимметричного пуансона, а также для штамповки-вытяжки. Ниже приведены результаты для двух последних задач.

Модель для пуансона, имеющего несимметричную форму, приближенную к форме крыла, изображена на рис. 6. На рисунке проведен контур пуансона. Эквивалентные напряжения получены по теории наибольших касательных напряжений.

На рисунке 7 представлен результат, иллюстрирующий, что разработанная программа может быть использована и для задачи штамповки-вытяжки упругим пуансоном по жесткой

матрице, поскольку она отличается только тем, что упругое тело «выпучивается» по форме матрицы.

Таким образом, разработаны алгоритмы и программы для решения плоских задач теории упругости БМ. Программы позволяют решать задачи при малых деформациях, задачи с геометрической нелинейностью (большие деформации), а также задачи с учетом контактного взаимодействия.

Рассматриваемые задачи относительно простые и решались для освоения и тестирования метода.

Выводы

1. Выполненное исследование показало применимость БМ для решения геометрически нелинейных задач расчета НДС эластичной матрицы при листовой штамповке эластичными средами.

2. Достоверность разработанных алгоритмов и программ, в которых реализован БМ, проверена на большом количестве тестовых задач.

3. Бессеточный метод показал полную совместимость с методом Удзавы при решении контактной задачи о взаимодействии упругой матрицы и жесткого штампа.

4. На основе БМ получено полное решение двумерной задачи о НДС эластичной матрицы при листовой штамповке эластичными средами для нескольких практически важных случаев.

5. Разработанные методики, алгоритмы и программы могут быть сравнительно легко модифицированы для решения других классов задач листовой штамповки эластичными средами.

Литература

1. Лукьянов А.А., Пеньков В.Б. Моделирование деформирования твердого тела с использованием бессеточных методов // Вестник СамГУ. Естественнонаучная серия. 2007. № 6 (56). С. 62—70.
2. Liu G.R. Mesh free methods: moving beyond finite element method. CRC Press LLC, 2003. P. 693.
3. Dolbow J., Belytschko T. An Introduction to Programming the Meshless Element Free Galerkin Method // Arch Computational Mechanics. 1998. Vol. 5. No. 3. P. 207—241.
4. Исаченков Е.И. Штамповка резиной и жидкостью. М.: Машиностроение, 1967. С. 367.
5. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике для научных работников и инженеров. М.: Наука, 1978. С. 832.
6. Расчеты на прочность в машиностроении / С.Д. Пономарев, В.Л. Бидерман, К.К. Лихарев и др.; под ред. С.Д. Пономарева. Т. II. М.: Машгиз, 1956. С. 974.
7. Белкин А.Е. Разработка системы моделей и методов расчета напряженно-деформированного и теплового состояния автомобильных радиальных шин. Дис. ... д-ра техн. наук. М.: МГТУ им. Н.Э. Баумана, 1998. С. 283.

References

1. Luk'ianov A.A., Pen'kov V.B. Modelirovanie deformirovaniia tverdogo tela s ispol'zovaniem bessetochnykh metodov [Numerical simulation of solids deformation by a meshless method]. *Vestnik of Samara State University. Natural science series*. 2007, no. 6 (56), pp. 62—70.
2. Liu G.R. Mesh free methods: moving beyond finite element method. CRC Press LLC, 2003. 693 p.
3. Dolbow J., Belytschko T. An Introduction to Programming the Meshless Element Free Galerkin Method. *Arch Computational Mechanics*, 1998. Vol. 5, no. 3, pp. 207—241.
4. Isachenkov E. I. *Shtampovka rezinoi i zhidkost' iu* [Rubber Stamping and fluid]. Moscow, Mashinostroenie publ., 1967. 367 p.
5. Korn G., Korn T. *Spravochnik po matematike dlia nauchnykh rabotnikov i inzhenerov* [Mathematical Handbook for Scientists and Engineers]. Moscow, Nauka publ., 1978, ed. 4. 832 p.
6. Ponomarev S.D., Biderman V.L., Likharev K.K., Makushin V.M., Malinin N.N., Feodos'ev V.I. *Raschety na prochnost v mashinostroenii* [Calculations of strength in engineering]. Ed. Ponomarev S.D. Vol. II. Moscow, Mashgiz publ., 1956. 974 p.
7. Belkin A.E. *Razrabotka sistemy modelei i metodov rascheta napriazhenno-deformirovannogo i teplovogo sostoiianiia avtomobil'nykh radial'nykh shin*. Diss. dokt. tekhn. nauk [Development of models and methods of calculating the stress-strain and thermal state of the road radial tires. Dr. of Tech. Sci. diss.]. Moscow, 1998, MSTU named after N.E. Bauman, 283 p.

Статья поступила в редакцию 08.02.2013

Информация об авторе

ПОПКОВ Михаил Викторович (Москва) — ассистент кафедры «Прикладная механика». МГТУ им. Н.Э. Баумана (105005, Москва, Российская Федерация, 2-я Бауманская ул., д. 5, стр. 1, e-mail: mih.pmv@gmail.com).

Information about the author

POPKOV Michael Viktorovich (Moscow) — Assistant «Applied mechanics» Department. MSTU named after N.E. Bauman (105005, BMSTU, building 1, 2-nd Baumanskaya 5, Moscow, Russian Federation, e-mail: mih.pmv@gmail.com).