

РАСЧЕТ И КОНСТРУИРОВАНИЕ МАШИН

539.311

РАСЧЕТ СОБСТВЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ В ВЕРТИКАЛЬНОЙ ПЛОСКОСТИ ОТРЕЗКА ТЯЖЕЛОЙ НИТИ

Канд. техн. наук, доц. П. Г. РУСАНОВ

Применены дискретные модели метода твердых тел для анализа малых колебаний в вертикальной плоскости отрезков однородной нити с одним и с двумя закрепленными концами. Получена численная информация о спектрах и формах низших собственных частот.

There are numerically analyzed spectrums and forms of fundamental oscillations in vertical plate for homogeneous thread pieces with one and two fixed ends by discrete models of solid bodies method.

Расчет собственных колебаний висящей нити с закрепленными концами имеет принципиальные отличия от аналогичной задачи для струны, где пренебрегают ее провисанием и считают F — силу натяжения постоянной для всех сечений. В поле силы тяжести равновесные формы тяжелой нити нетривиальны, вектор силы \vec{F} зависит от криволинейной координаты сечения, а в движении масс нити проявляются маятниковые эффекты.

Методы дискретизации позволяют избежать анализа дифференциальных уравнений (ДУ) в частных производных при изучении динамики деформируемых сред, сводя задачу к конечномерной модели или системе уравнений. На основе метода твердых тел (МТТ) [1] нами были исследованы малые колебания отрезка тяжелой нити в рамках системы обыкновенных ДУ. Указанный метод сочетает наглядность расчетной схемы с технологичностью процесса получения результатов, реализуемого с помощью пакетов компьютерных программ типа MAPLE, MATHCAD.

Постановка задачи. Ниже ограничимся изучением частот и форм собственных свободных колебаний в вертикальной плоскости отрезка однородной тяжелой нити с одним и с двумя неподвижно закрепленными концами (рис. 1, а, б): M, L — масса и длина нити, g — ускорение однородного поля силы тяжести. Нить считаем нерастяжимой и гибкой. Не учитываем движений основания и воздуха, а также потерь на трение.

Методика исследования. Согласно МТТ, о динамике деформируемой среды можно судить по поведению обобщенных координат, задающих положение главных центральных осей инерции дискретных масс — конечных элементов данного метода. Расчетные схемы рассматриваемых вариантов задачи для данной модели среды получим, заменив исходную нить на дискретную систему из n абсолютно твердых, одинаковых элементов (прямолинейных стержней), соединенных n (рис. 2, а) или $n + 1$ (рис. 2, б) цилиндрическими шарнирами с параллельными осями; $l = L/n$, $m = M/n$ — длина и масса стержня, $g_x = g_z = 0$, $g_y = -g$ — проекции вектора ускорения поля силы тяжести на оси инерциальной системы координат Охуз. Нумерацию стержней и шарниров начинаем от точки О.

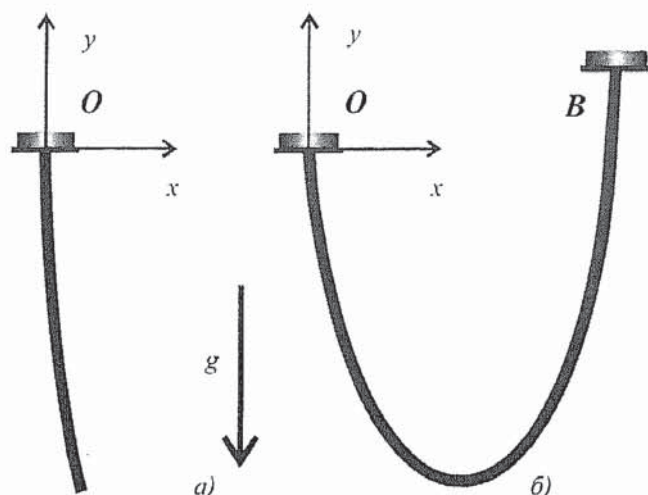


Рис. 1

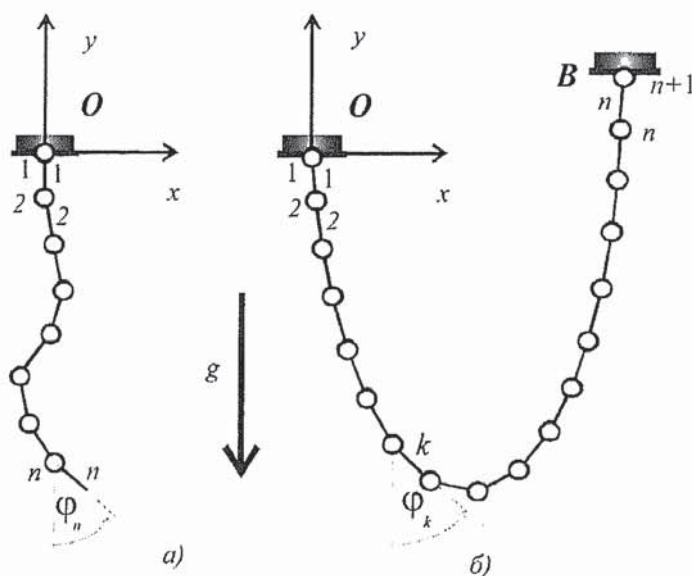


Рис. 2

З а м е ч а н и я. 1. Дискретный аналог нити соответствует простейшей модели отрезка цепной передачи. 2. Для повышения точности результатов расчета при сохранении n — общего числа элементов можно применить *неравномерный шаг* разбиения, увеличив число элементов на тех участках нити, которые в состоянии покоя имеют повышенную кривизну.

Этапы классического анализа малых колебаний системы с конечным числом степеней свободы таковы: расчет значений обобщенных координат в состоянии равновесия; формирование коэффициентов системы ДУ малых колебаний; анализ низших частот и форм собственных колебаний.

В качестве обобщенных координат для обоих вариантов закрепления нити применим φ_i ($i=1, r$) — углы отклонения стержней от вертикальной оси Oy . r — число степеней свободы дискретной схемы: $r = n$ для схемы рис. 2, а, и $r = n - 2$ для схемы рис. 2, б. У схемы рис. 2, б при $x_B \neq 0$ конфигурация имитационной системы стержней в состоянии покоя нетривиальны и значения обобщенных координат φ_i^* подлежат расчету. С помощью найденных значений φ_i^* переходим к новым обобщенным координатам $\tilde{\varphi}_i$, отсчитываемым на этот раз от положения равновесия: $\tilde{\varphi}_i = \varphi_i - \varphi_i^*$.

В поле силы тяжести динамика несвободных систем с конечным числом степеней свободы описывается системой нелинейных ДУ. Для анализа собственных колебаний дискретной схемы достаточно информации о $A = (a_{ij})$, $C = (c_{ij})$ — постоянных, симметричных матрицах инерции и жесткости линейной системы ДУ возмущенного движения

$$A\ddot{\bar{q}} + C\dot{\bar{q}} = 0, \quad (1)$$

где \bar{q} — вектор обобщенных координат — углов отклонений стержней от состояния равновесия. $\dim A = \dim C = r \times r$, $\dim \bar{q} = r$:

$$a_{ij} = \left. \frac{\partial^2 T}{\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_j} \right|_{\dot{\bar{q}}=0}, \quad T(\bar{q}, \dot{\bar{q}})|_{\dot{\bar{q}}=0} = 0,5 \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r a_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j,$$

$$c_{ij} = \left. \frac{\partial^2 \Pi}{\partial q_i \partial q_j} \right|_{\bar{q}=0}, \quad \Pi(\bar{q}) = 0,5 \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r c_{ij} q_i q_j,$$

$T = \sum_{k=1}^n T_k$, $\Pi = \sum_{k=1}^n \Pi_k$ — функции кинетической и потенциальной энергий дискретной

системы из n тел при плоском движении. В данном случае

$$T_k = 0,5(m\bar{V}_k^2 + J_z \omega_k^2), \quad J_z = ml^2/12, \quad \Pi_k = -mgy_{Ck}$$

$$\bar{V}_k = \sum_{i=1}^{k-1} \bar{\omega}_i \times \bar{l}_i + 0,5 \bar{\omega}_k \times \bar{l}_k, \quad y_{Ck} = l \sum_{i=1}^{k-1} \cos(\varphi_i^* + \bar{\varphi}_i) + 0,5l \cos(\varphi_k^* + \bar{\varphi}_k).$$

Далее считаем, что собственные частоты p_k [c^{-1}] ($k = \overline{1, r}$) — суть простые (некратные) корни частотного уравнения

$$\det(-p^2 A + C) = 0, \quad (2)$$

и решение (1) имеет вид

$$\bar{\varphi}_i = \sum_{k=1}^r A_{ik} \sin(p_k t + \gamma_k), \quad (3)$$

где A_{ik} , p_k , γ_k — постоянные. Каждой собственной частоте p_k отвечает форма колебаний, т.е. решение (3) с фиксированным соотношением амплитуд $A_{1k} : A_{2k} : A_{3k} : \dots : A_{rk}$, удовлетворяющих линейной системе

$$(a_{11}p_k^2 - c_{11})A_{1k} + (a_{12}p_k^2 - c_{12})A_{2k} + \dots + (a_{1r}p_k^2 - c_{1r})A_{rk} = 0,$$

$$(a_{21}p_k^2 - c_{21})A_{1k} + (a_{22}p_k^2 - c_{22})A_{2k} + \dots + (a_{2r}p_k^2 - c_{2r})A_{rk} = 0, \quad (4)$$

...

$$(a_{r1}p_k^2 - c_{r1})A_{1k} + (a_{r2}p_k^2 - c_{r2})A_{2k} + \dots + (a_{rr}p_k^2 - c_{rr})A_{rk} = 0,$$

где для определенности задания формы колебаний одну из амплитуд полагают равной 1, например, $A_{1k} = 1$.

Все элементы матриц A и C имеют общий множитель ml . Поэтому, подобно физическому маятнику с одной степенью свободы, решения однородных уравнений (2) и (4) для частот и форм собственных колебаний нити в поле силы тяжести не зависят от массы и плотности материала и полностью определяются L — длиной нити и g — ускорением

свободного падения. В связи с этим вместо размерных частот p_k будем рассчитывать безразмерные частоты s_k , положив $p_k = s_k \sqrt{g/L}$.

Случай 1 — отрезок нити OB с одним закрепленным концом (рис. 1, а). При движении в плоскости Oxy расчетная система стержней имеет $r = n$ степеней свободы, причем в состоянии равновесия $\varphi_i^* = 0$, $\dot{\varphi}_i = 0$, ($i = 1, n$).

Граф кинематических связей стержней имеет простейшую структуру *дерева*, что облегчает формирование функций $\Pi(\bar{q})$ и $T(0, \dot{\bar{q}})$. Функция потенциальной энергии системы стержней в поле силы тяжести имеет вид $\Pi = \Pi_0 + mgl \sum_{i=1}^n (n-i+0,5)(1 - \cos \bar{\varphi}_i)$. Поэтому матрица жесткости диагональна: $c_{ii} = mgl(n-i+0,5)$, $c_{ij} = 0$ ($j \neq i$).

Функция кинетической энергии i -го стержня при отвесном положении всех стержней

$$T_i = m l^2 / 24 [(3(2\omega_1 + 2\omega_2 + \dots + 2\omega_{i-1} + \omega_i)^2 + \omega_i^2)],$$

поэтому элементы матрицы $Aa_{ii} = m l^2 (n-i+1/3)$, $a_{ij} = m l^2 (n-j+0,5)$, ($j \neq i$).

Расчет значений первых 10-ти безразмерных собственных частот s_k при $n = 10$ и $n = 20$ частот по известным матрицам A , C выполнен по стандартной процедуре пакета *MAPLE* (табл. 1).

Таблица 1

n	s_1	s_2	s_3	s_4	s_5	s_6	s_7	s_8	s_9	s_{10}
10	1,2028	2,7867	4,4843	6,3629	8,4820	10,93	13,8	17,2	21,4	26,9
20	1,2025	2,7670	4,3714	6,0392	7,7913	9,642	11,60	13,70	15,94	18,35

При минимальном количестве элементов (физический маятник с $n = 1$), значение собственной частоты $s = \sqrt{3/2} = 1,2247$. Сравнив значения s_k для схем с разными числами элементов $n = 1, 10, 20$, приходим к выводу, что расчеты с применением дискретной схемы дают завышенные значения частот, т.е. производят их оценку сверху. При этом оценка первых пяти частот с погрешностью не более 9% достигается уже при $n = 10$.

Первые 10 форм собственных колебаний нити представлены в табл. 2.

Таблица 2

k номер тона	A_{k2}	A_{k3}	A_{k4}	A_{k5}	A_{k6}	A_{k7}	A_{k8}	A_{k9}	A_{k10}
1	1.100	1.206	1.318	1.435	1.559	1.688	1.824	1.964	2.096
2	1.026	.9541	.7490	.3676	-.2402	-1.131	-2.367	-3.990	-5.848
3	.8856	.5147	-.1162	-.9232	-1.680	-1.951	-1.029	2.026	7.517
4	.6677	-.0765	-.9851	-1.542	-1.108	.6089	2.630	1.614	-6.695
5	.3613	-.7230	-1.413	-.7920	1.047	2.066	-.3827	-3.626	4.666
6	-.0428	-1.251	-.9850	.9228	1.721	-.9327	-2.288	3.408	-2.661
7	-.5460	-1.407	.3242	1.743	-.7946	-1.825	2.907	-2.183	1.272
8	-1.134	-.9060	1.711	-.0337	-2.042	2.651	-1.964	1.033	-.4991
9	-1.780	.4651	1.519	-2.568	2.373	-1.568	.8038	-.3382	.1443
10	-2.470	2.841	-2.351	1.551	-.8530	.3999	-1.623	.05860	-.0229

Случай 2 — дискретная расчетная схема отрезка нити OB с неподвижными концами (рис. 2, б), $X_B = D > 0$, $Y_B = H \geq 0$, $\sqrt{D^2 + H^2} < L$. При движении в вертикальной плоскости Oxy система из n стержней имеет $r = n - 2$ степени свободы и замкнутую структуру графа кинематических связей вследствие двух уравнений геометрической связи в безразмерной форме (верхний индекс у φ_j^* опущен)

$$x_B = \frac{X_B}{L} = \frac{1}{n} \sum_j^n \sin \varphi_j = d = D/L; \quad y_B = \frac{Y_B}{L} = \frac{1}{n} \sum_j^n \cos \varphi_j = h = H/L. \quad (5)$$

При $H = 0$ форма покоящейся системы симметрична относительно вертикальной оси, что упрощает расчет конфигурации стержней в статике.

Итерационный расчет φ_j^* методом Ньютона—Рафсона можно выполнить двумя способами: на основании уравнений для обобщенных сил, для сумм моментов сил вокруг осей шарниров, преобразованных с учетом рекурсий к виду

$$\operatorname{tg} \varphi_j = f_x / [f_y + (0,5 - j)/n], \quad (6)$$

где f_x, f_y — безразмерные проекции \bar{F} — силы натяжения нити в узле O (для удобства f_x считаем неотрицательной). Размерные значения этих проекций: $F_x = -Mg f_x$, $F_y = Mg f_y$ (рис. 3). Из двух вариантов итераций при $H > 0$ и $n > 5$ лучшую сходимость имел второй способ, где достаточно итерировать всего два параметра f_x, f_y с корректировкой их начальных значений по $\Delta x = x_B - d$, $\Delta y = y_B - h$ — невязкам уравнений (5).

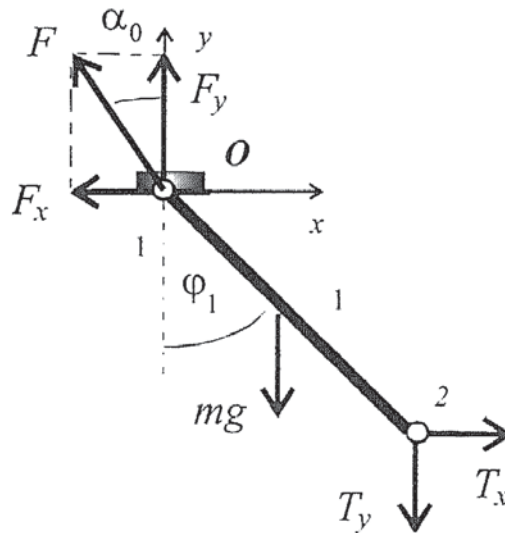


Рис. 3

Расчеты по второму алгоритму сходятся с точностью до 10^{-6} за 3—7 итераций. Для произвольных d, h рациональный выбор начальных значений сил f_x, f_y можно сделать, ориентируясь на данные табл. 3. Здесь при $n = 10$ представлены результаты решения обратной задачи, а именно, по заданным значениям f_x, f_y рассчитаны безразмерные координаты точки B .

Результаты численного расчета углов наклона стержней φ_j [град] в состоянии равновесия при $n=10, d=5$ и различных h указаны в табл. 4 (для большей наглядности результатов

углы отсчитаны от оси Ox). В последних столбцах табл. 4 приведены значения сил f_x, f_y в опоре O .

Таблица 3

	$x_B = d; y_B = h$				
	$f_y = 0,1$	$f_y = 0,2$	$f_y = 0,3$	$f_y = 0,4$	$f_y = 0,5$
$f_x = 0,1$	0,37865 0,76549	0,42244 0,58297	0,44636 0,39100	0,45863 0,19601	0,46243 0
$f_x = 0,2$	0,53898 0,69981	0,59607 0,54247	0,63278 0,36776	0,65298 0,18536	0,65942 0
$f_x = 0,3$	0,64430 0,63360	0,70047 0,49458	0,74015 0,33772	0,76332 0,17099	0,77091 0
$f_x = 0,4$	0,71945 0,57346	0,77050 0,44787	0,80824 0,30663	0,83109 0,15561	0,83871 0
$f_x = 0,5$	0,77490 0,52035	0,81998 0,40543	0,85395 0,27750	0,87490 0,14089	0,88196 0

Таблица 4

h	φ_1^*	φ_2^*	φ_3^*	φ_4^*	φ_5^*	φ_6^*	φ_7^*	φ_8^*	φ_9^*	φ_{10}^*	f_x	f_y
0,0	-75,70	-71,85	-65,35	-52,59	-23,55	23,55	52,59	65,3	71,85	75,70	,1147	,5000
0,1	-73,90	-68,93	-59,92	-40,62	0,648	41,36	60,25	69,10	74,00	77,07	,1151	,4497
0,2	-71,43	-64,74	-51,61	-22,04	24,35	52,64	65,23	71,70	75,55	78,08	,1167	,3972
0,3	-68,03	-58,63	-38,69	2,182	41,26	59,77	68,63	73,59	76,71	78,85	,1192	,3455
0,4	-63,05	-49,16	-19,16	24,80	51,82	64,33	70,92	74,88	77,50	79,35	,1235	,2929
0,5	-55,45	-34,39	4,770	40,41	58,30	67,27	72,41	75,70	77,97	79,62	,1302	,2391
0,6	-43,01	-12,77	25,62	49,85	62,14	68,95	73,16	76,00	78,03	79,55	,1416	,1821
0,7	-21,89	11,79	39,33	55,03	63,89	69,33	72,96	75,52	77,42	78,89	,1638	,1158
0,8	13,05	33,54	47,56	56,74	62,92	67,27	70,46	72,89	74,80	76,33	,2321	-,0038

Точность расчета параметров статического состояния нити протестирована на примере симметричной формы, когда $H = 0$, а вертикальные проекции сил реакций в шарнирах O и B равны $F_y = 0,5Mg$, т.е. $f_y = 0,5$. Горизонтальную проекцию f_x при известном угле наклона стержня l находим по уравнению статики (6) $f_x = \operatorname{tg}\varphi_1^* (f_y - 0,5/n)$. Для нити направление касательной к ней в точке закрепления (т. O) совпадает с направлением вектора \vec{F} . Поэтому α_0 — угол между касательной и вертикалью

$$\operatorname{tg}\alpha_0 = \frac{f_x}{f_y} = \left(1 - \frac{1}{n}\right) \operatorname{tg}\varphi_1^* \quad (7)$$

Формула (7) указывает на асимптотическое стремление величин углов φ_1^*, φ_n^* к величине угла α_0 в точках закрепления при неограниченном увеличении n — числа элементов.

Для заданных $L, D, H = 0$ и по методу МТТ, и по теории нити [2] $w = |y_{\min}|/L$ — стрела прогиба нити, α_0 — угол наклона и f_x — проекция силы натяжения нити в точке O в статике могут быть рассчитаны лишь с помощью итераций. Результаты расчетов приведены в табл. 5, причем теоретические значения параметров помечены индексом «0». Приемлемая точность результатов дискретной модели имеет место даже при малом количестве элементов

$n = 7$ и сравнительно больших провисах нити ($w_0 \approx 0.3$). При $D \leq l = L/n$ дискретная схема в статике искажает реальную форму нижней части линии нити, имея большую разность углов между смежными элементами. Это привело к повышенной погрешности результатов в нижней строке табл. 5.

Таблица 5

d	w_0	W	$\Delta w \%$	$\pi/2 - \alpha_0$	$\pi/2 - \alpha$	$\Delta \alpha \%$	f_{x0}	f_x	$\Delta f_x \%$
0.69	.051125	.050573	1.08	.29006	.29279	-0.94	1.173	1.161	0.98
0.64	.12387	.12221	1.34	.68031	.68407	-0.55	0.4325	0.4292	0.76
0.58	.17282	.16995	1.67	.91731	.92015	-0.31	0.2680	0.2664	0.59
0.52	.20871	.20444	2.05	1.0754	1.0773	-0.18	0.1891	0.1882	0.46
0.46	.23750	.23148	2.53	1.1924	1.1937	-0.11	0.1392	0.1386	0.39
0.40	.26151	.25315	3.20	1.2834	1.2846	-0.10	0.1035	0.1030	0.46
0.34	.28192	.27033	4.11	1.3562	1.3583	-0.16	0.07630	0.07552	1.02
0.30	.29948	.28344	5.34	1.4154	1.4202	-0.34	0.05484	0.05311	3.16
0.22	.31444	.29268	6.92	1.4639	1.4743	-0.71	0.03757	0.03388	9.84
0.10	.33783	.30000	11.2	1.5354	1.5708	-2.28	0.01239	0.0000	100.

В отличие от варианта закрепления только одного конца нити в расчетах матриц A , C необходимо учесть зависимости угловых положений и угловых скоростей двух последних элементов с номерами $n-1$ и n , что следует из уравнений связи (5). Влияние h — ординаты правого конца нити на собственные частоты s_k колебаний нити при $d = 0,5$ и $n = 12$ отражено в табл. 6. Там же приведены значения проекций силы натяжения покоящейся нити в точке O .

Таблица 6

h	Значения s_k — низших частот собственных колебаний					Проекция силы натяжения покоящейся нити в точке O	
	$k=1$	$k=2$	$k=3$	$k=4$	$k=5$	f_x	f_y
0	2.196	3.989	5.896	7.677	9.892	.138	.500
0,2	2.212	4.044	5.959	7.789	9.872	.140	.477
0,4	2.275	4.220	6.182	8.153	10.07	.148	.352
0,6	2.475	4.600	6.714	8.898	11.03	.170	.218
0,8	3.595	6.136	8.836	11.52	14.44	.279	-.00595

С ростом h от 0 до 0,8 происходит перераспределение сил натяжения левой и правой ветвей нити от нижней точки, сопровождаемое увеличением значений частот. По мере увеличения h до уровня $h \approx 0,7 \dots 0,8$ и приближения точки максимального провисания к опоре O величина опорной силы F уменьшается примерно до 1/3 своего «начального» значения при $h = 0$. Значения всех 5-ти низших частот у нити без провиса выше на 20—40 %, чем у нити с провисом. Формы колебаний первых 5 тонов при $h=0$ приведены в табл. 7, где принято, что $A_{k1} = 1$.

Таблица 7

k	A_{k2}	A_{k3}	A_{k4}	A_{k5}	A_{k6}	A_{k7}	A_{k8}	A_{k9}	A_{k10}
1	1.095	1.082	.8105	-.0722	-1.619	-1.200	.1535	.7774	.9773
2	.9001	.4002	-.6265	-1.882	-1.198	1.617	1.443	.3591	-.4331
3	.5825	-.4760	-1.653	-1.229	1.914	.8660	-1.370	-1.226	-.2328
4	1880	-1.207	-1.483	1.059	1.800	-2.411	-.09628	1.600	.9574
5	-.2773	-1.575	-.1236	2.346	-1.792	.1390	1.382	-.5718	-1.038

Выводы

1. Метод МТТ позволяет применять классические приемы для оценки частот и форм собственных колебаний нелинейной системы с распределенными параметрами.

2. Результаты расчета статики нити с закрепленными концами при помощи дискретной модели совпадают с теоретическими данными.

3. Закрепление второго конца нити приводит к сдвигу спектра собственных частот в область более высоких частот. Если нить имеет две опоры, то при их расположении на одном уровне в поле силы тяжести первые 5 частот собственных колебаний имеют меньшие значения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Русанов П. Г. Отличия расчетов формы упругой линии гибкого стержня методами дискретизации МКЭ и МТТ // Известия вузов. Машиностроение. — 2006. — № 7. — С. 3—9.
2. Усюкин В. И. Строительная механика конструкций космической техники. — М.: Машиностроение, 1988. — 392 с.