№ 1 2008

539.3

ИССЛЕДОВАНИЕ АДЕКВАТНОСТИ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ КОНСОЛЬНОЙ БАЛКИ ПРИ ПРОДОЛЬНОМ ИЗГИБЕ

Канд. физ.-мат. наук, доц. МИНАЕВА Н.В., асп. С. А. ШАШКИНА

На основе теоремы о неявных функциях найдена граница адекватности решения нелинейной задачи в лагранжевых переменных, описывающей поведение консольной балки при продольном изгибе.

On the basis of the implicit functions theorem the border of adequacy for the solution of a nonlinear problem in Lagrangian variables that describes the cantilever beam behavior at a longitudinal bend is found.

Рассмотрим поведение упругой балки длины ℓ, жестко закрепленной на одном конце и нагруженной на другом конце и в точке на расстоянии $\ell-\ell_1$ от заделки продольными силами P_1 и P_2 соответственно.

В лагранжевых переменных ось балки будет описываться решением следующих уравнений в безразмерном виде [1]:

$$\begin{aligned} &\frac{1}{\rho}-\frac{1}{\rho_0}+m_1=0, \qquad s\in[0,a] \\ &\frac{1}{\rho}-\frac{1}{\rho_0}+m_2=0, \qquad s\in[a,1] \end{aligned} \tag{1}$$

где $\dfrac{1}{\rho}-\dfrac{1}{\rho_0}=\dfrac{\dfrac{d^2u}{ds^2}}{\left[1-\left(\dfrac{du}{ds}\right)^2\right]^{1/2}}-\dfrac{\dfrac{d^2f}{ds^2}}{\left[1-\left(\dfrac{df}{ds}\right)^2\right]^{1/2}}$; $m_1=\alpha_1 u$; $m_2=(\alpha_1+\alpha_2)u-\alpha_2 u(a)$;

$\alpha_1=\dfrac{P_1\ell^2}{EI}$; $\alpha_2=\dfrac{P_2\ell^2}{EI}$; $a=\dfrac{\ell_1}{\ell}$; функция f описывает форму оси балки в свободном состоянии (начальное несовершенство).

Граничные условия имеют вид

$$u(0)=\frac{du(1)}{ds}=0. \tag{2}$$

К условиям (2) следует добавить условия сопряжения решений уравнений (1) на $s=a$.

При $f\equiv 0$ задача (1), (2) допускает решение

$$u(s)=u_0(s). \tag{3}$$

Будет ли это решение приближенно описывать изогнутую ось балки в том случае, когда функция $f(s)$ достаточно мало отличается от нуля? Для ответа на этот вопрос необходимо рассмотреть непрерывность зависимости решения задачи (1), (2) от $f(s)$ при $f(s)\equiv 0$. Для проведения анализа, как следует из теоремы о неявных функциях [2,3], необходимо в (1),(2) сделать замену

$$u=u_0+\zeta \qquad \text{при } f(s)\equiv 0. \tag{4}$$

Рассмотрим случай (для упрощения выкладок), когда

$$u_0(s) \equiv 0, \tag{5}$$

аналогично можно исследовать и другие решения нелинейной задачи (1),(2).

В результате подстановки (4),(5) в (1), (2) и последующей линеаризации (согласно теореме о неявных функциях) по ζ получаем следующую задачу:

$$\begin{aligned} &\frac{d^2\zeta}{ds^2} + \alpha_1\zeta = 0, && s \in [0, a] \\ &\frac{d^2\zeta}{ds^2} + (\alpha_1 + \alpha_2)\zeta - \zeta(a)\alpha_2 = 0, && s \in [a, 1] \end{aligned} \tag{6}$$

$$\zeta(0) = \frac{d\zeta(1)}{ds} = 0. \tag{7}$$

К граничным условиям (7) следует добавить условия сопряжения решений уравнений (6) при $s=a$.

Общие решения уравнений (6) запишутся в виде

1) $\alpha_1 > 0$, $\alpha_2 > 0$

$$\begin{aligned} &\zeta = c_1 \cos(\mu_1 s) + c_2 \sin(\mu_1 s), \quad s \in [0, a], \\ &\zeta = c_3 \cos(\mu_2 s) + c_4 \sin(\mu_2 s) + \lambda\zeta(a), \quad s \in [a, 1], \end{aligned} \tag{8}$$

где $\mu_1{}^2 = \alpha_1$; $\mu_2{}^2 = \alpha_1 + \alpha_2$; $\lambda = \dfrac{\alpha_2}{\alpha_1 + \alpha_2}$ $\beta_3 = \alpha_2 \cos\gamma_2$.

2) $\alpha_1 > 0$, $\alpha_2 < 0$

2а) $\alpha_1 > 0$, $\alpha_1 + \alpha_2 > 0$ — общие решения имеют вид (8).

2б) $\alpha_1 > 0$, $\alpha_1 + \alpha_2 < 0$

$$\begin{aligned} &\zeta = c_1 \cos(\mu_1 s) + c_2 \sin(\mu_1 s), \quad s \in [0, a], \\ &\zeta = c_3 \exp(\mu_2 s) + c_4 \exp(-\mu_2 s) + \lambda\zeta(a), \quad s \in [a, 1]. \end{aligned} \tag{9}$$

3) $\alpha_1 < 0$, $\alpha_2 > 0$

3а) $\alpha_1 < 0$, $\alpha_1 + \alpha_2 > 0$

$$\begin{aligned} &\zeta = c_1 \exp(\mu_1 s) + c_2 \exp(-\mu_1 s), \quad s \in [0, a], \\ &\zeta = c_3 \cos(\mu_2 s) + c_4 \sin(\mu_2 s) + \lambda \cdot \zeta(a), \quad s \in [a, 1]. \end{aligned} \tag{10}$$

3б) $\alpha_1 < 0$, $\alpha_1 + \alpha_2 < 0$

$$\begin{aligned} &\zeta = c_1 \exp(\mu_1 s) + c_2 \exp(-\mu_1 s), \quad s \in [0, a], \\ &\zeta = c_3 \exp(\mu_2 s) + c_4 \exp(-\mu_2 s) + \lambda\zeta(a), \quad s \in [a, 1]. \end{aligned} \tag{11}$$

4) $\alpha_1 < 0$, $\alpha_2 < 0$ — общие решения имеют вид (10).

Определив произвольные постоянные c_i в (8)–(11) из граничных условий и условий сращивания при $s = a$, требование существования только тривиальных решений в каждом из рассмотренных выше случаев приведет к выполнению следующих условий:

1) $\mu_1 \mathrm{tg}\mu_1 a \mathrm{tg}\mu_2(1 - a) = \mu_2$

$(\alpha_1 > 0;\ \alpha_2 > 0);\ (\alpha_1 > 0;\ \alpha_2 < 0;\ \alpha_1 + \alpha_2 > 0)$

2) $\mu_2\left(e^{\mu_2 a} + e^{\mu_2(2-a)}\right)\mathrm{tg}\mu_1 a = \mu_1\left(e^{\mu_2 a} - e^{\mu_2(2-a)}\right)$

$$(\alpha_1 > 0;\ \alpha_2 < 0;\ \alpha_1 + \alpha_2 < 0) \qquad (12)$$

3) $\mu_1 \mathrm{th}\mu_1 a \mathrm{tg}\mu_2(1-a) = \mu_2$

$$(\alpha_1 < 0;\ \alpha_2 > 0;\ \alpha_1 + \alpha_2 > 0)$$

4) $\mu_1\left(e^{\mu_2 a} - e^{\mu_2(2-a)}\right)\mathrm{th}\mu_1 a = \mu_2\left(e^{\mu_2 a} + e^{\mu_2(2-a)}\right)$

$$(\alpha_1 < 0;\ \alpha_2 > 0;\ \alpha_1 + \alpha_2 < 0) \quad (\alpha_1 < 0;\ \alpha_2 < 0).$$

На рис. 1 представлен график зависимости между величинами α_1 и α_2, полученный на основе уравнений (12) при a=0,7 (последнее из уравнений (12) корней не имеет).

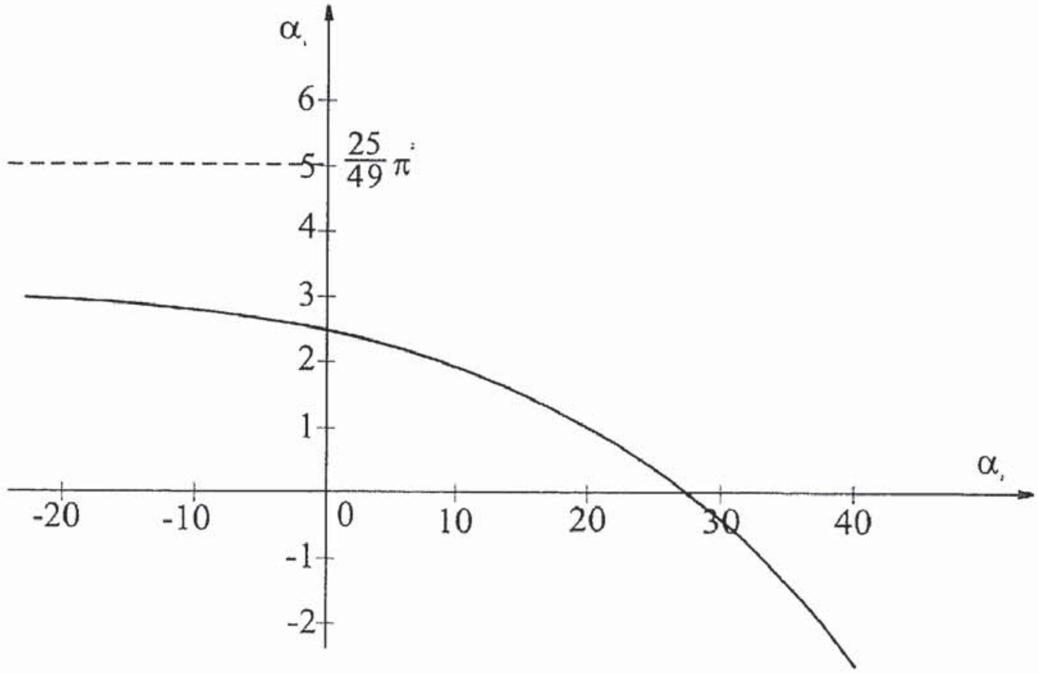

Рис. 1

Итак, решение (5) задачи (1),(2) при $f \equiv 0$ будет иметь смысл лишь в пределах границы, определяемой графиком на рис. 1. При параметрах нагрузки, лежащих за ней необходимо рассматривать другие решения этой нелинейной задачи.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Болотин В. В. Статистические методы в строительной механике. М.: Изд-во «Литература по строительству», 1965. — 279 с.
2. Колмогоров А. Н., Фомин С. В. Элементы теории функций и функционального анализа. — М.: Наука, 1976. — 542 с.
3. Минаева Н. В. Адекватность математических моделей деформируемых тел. — М.: Научная книга, 2006. — 235 с.