РАСЧЕТ И КОНСТРУИРОВАНИЕ МАШИН

539.311

РАСЧЕТ СОБСТВЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ ОТРЕЗКА ТЯЖЕЛОЙ НИТИ С ЗАКРЕПЛЕННЫМИ КОНЦАМИ «ИЗ ВЕРТИКАЛЬНОЙ ПЛОСКОСТИ»

Канд.техн.наук, доц. П. Г. РУСАНОВ

Методом твердых тел численно исследованы частоты собственных колебаний отрезка нити с неподвижными концами в однородном поле силы тяжести в направлении «из плоскости покоя нити». Установлено, что частоты этих форм собственных колебаний отличны от частот форм собственных колебаний в вертикальной плоскости покоя нити.

Fundamental frequencies of thread piece with fixed ends in homogeneous gravity space in direction "out of stationary plate thread" are numerically analyzed by "Solid Bodies Method". It is established, spectrum of these oscillation forms is different from spectrum of fundamental oscillations in vertical plate of stationary thread

Расчет собственных колебаний нити с закрепленными концами в *вертикальной* плоскости на основе метода твердых тел (МТТ) рассмотрен в [1]. Ниже излагается методика расчета собственных колебаний нити в направлении, перпендикулярном к вертикальной плоскости, при сохранении исходных предпосылок и условных обозначений [1].

МТТ позволяет избежать анализа дифференциальных уравнений (ДУ) в частных производных в задачах динамики для систем с распределенными параметрами, ставя в соответствие исходной среде дискретную расчетную схему, инерционные свойства элементов которой тождественны свойствам абсолютно твердых тел. При этом в вектор состояния отдельного элемента МТТ входят лишь параметры положения его главных центральных осей инерции. Модели силовых взаимодействий элементов между собой и с внешними телами зависят от типа среды, но во всех случаях эти модели могут быть выражены через глобальный вектор состояния элементов. В частности (например, для гибкой нити) силовая модель может иметь вид кинематического соотношения. В общем случае МТТ сводит задачу динамики к конечной системе обыкновенных ДУ относительно вектора состояния всей совокупности элементов. Точность МТТ асимптотически связана с числом степеней свободы принятой расчетной схемы. При одинаковой размерности векторов состояний точность результатов МТТ выше, чем у методов физической макро- дискретизации, представляющих тело конечного объема в виде нескольких точечных масс, и методов математической дискретизации, типа МКЭ [2] .

По определению, математические модели малых колебаний систем с конечным числом степеней свободы – это линейные системы ДУ с постоянными коэффициентами. МТТ позволяет распространить данную технологию анализа и на континуальные системы. При этом, благодаря простоте расчетных схем, особенно для одномерных объектов - таких как нить и стержень, проблема исследования упрощается настолько, что ее решение может быть выполнено с помощью компьютерных программ типа *Maple* и *Mathcad,* сочетающих вычисления в символьной и численной формах.

Методика анализа. Оба варианта малых колебаний отрезка нити (в вертикальной плоскости Oxy и перпендикулярно к ней) можно рассматривать как независимые, т.е. начальные возмущения покоящейся нити в вертикальной плоскости Oxy не вызывают перемещений точек нити в направлении ось Oz. А после возмущения покоящейся нити в направлении горизонтальной оси Oz для любой точки нити проекции ее последующего перемещения на плоскость Oxy имеют более высокий порядок малости по сравнению с проекцией на ось Oz .

Для решения задачи воспользуемся дискретной схемой нити [1], состоящей из n ($n>1$) абсолютно твердых, одинаковых элементов (прямолинейных стержней), но на этот раз последовательно соединенных между собой и с основанием $n+1$ идеальными *сферическими* шарнирами. Заметим, что мы принимаем длины элементов одинаковыми лишь ради упрощения изложения. Применение меньшего шага дискретизации на участке покоящейся нити с повышенной кривизной при сохранении n - общего числа элементов приводит к увеличению точности результатов.

Вопросы расчета статического положения дискретной системы тел рассмотрены в [1]. Поэтому методику исследования ее собственных частот колебаний «из вертикальной плоскости» сводим к формированию $A=(a_{ij})$, $C=(c_{ij})$ - матриц *инерции* и *жесткости* линейной системы ДУ возмущенного движения 1-го приближения

$$A\ddot{\overline{q}}+C\overline{q}=0\,, \tag{1}$$

где $\vec{q}$ - вектор обобщенных координат q_i, $dimA=dimC=r\times r$, $dim\,\vec{q}=r$, $a_{ij}=\dfrac{\partial^2 T}{\partial\dot{q}_i\partial\dot{q}_j}$,

$$c_{ij}=\frac{\partial^2 \Pi}{\partial q_i\partial q_j},\ T=\sum_{k=1}^{n}T_k=T(\overline{q},\dot{\overline{q}})\Big|_{\overline{q}=0}=0.5\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{r}a_{ij}\dot{q}_i\dot{q}_j\,.$$

$\Pi=\sum\limits_{k=1}^{n}\Pi_k=\Pi(\overline{q})=0.5\sum\limits_{i=1}^{r}\sum\limits_{j=1}^{r}c_{ij}q_iq_j$ - кинетическая и потенциальная энергии n тел при малых колебаниях;

($i=\overline{1,\ r}$, $r=n$ - 1 – число степеней свободы)

Положительные корни частотного уравнения $det(-p^2A+C)=0$ доставляют значения первым r собственным, размерным частотам p_k.

Чтобы сократить список компонентов глобального вектора состояния, в качестве обобщенных координат в этой простой ситуации вместо традиционных параметров положения главных центральных осей инерции отдельных элементов применим z_k – координаты подвижных шарнирных узлов ($k=\overline{2,\ n}$) в системе координат $Oxyz$. Элементы матрицы инерции a_{ij} формируем на основании явного выражения для квадратичной функции T в равновесном положении дискретной схемы, когда z_k=0, параллельны скорости $v_{k,z}=\dot{z}_k\neq 0$, кинетическая энергия каждого элемента имеет простой вид: $T_k=m(v_{k-1,z}{}^2+v_{k-1,z}v_{k,z}+v_{k,z}{}^2)/6$; $v_{1,z}=v_{n+1,z}=0$, и матрица A имеет ленточную структуру: $a_{ii}=2m/3$, $a_{ij}=m/6$, $j=i\pm1$, $a_{ij}=a_{ji}=0$, $j>i+1$.

Матрица жесткости C обусловлена только силами однородного поля силы тяжести, поэтому для упрощения ее расчета исходную систему распределенных сил тяжести, приложенных ко всем стержням, заменяем эквивалентной в виде n+1 вертикальной силы mg, приложенной в каждом шарнирном узле. Тогда функция $\Pi(z_1,z_2,...,z_n)=mg\sum\limits_{k=2}^{n}(y_k-y_{0,k})$, где y_k, $y_{0,k}$ - ординаты узла с номером k в текущем и статическом положениях системы. При этом полагаем, что перемещения всех подвижных узлов, кроме узла с номером $k=n$, из состояния покоя вызваны независимыми малыми углами поворота вокруг вертикальных осей стержней с номерами 1,.., n–2. В этом случае ординаты этих узлов не изменяются и поэтому $\Pi = mg(y_n - y_{0,n})$. Оценим $h_n = y_n - y_{0,n}$ - изменение координаты y_n вследствие указанных поворотов стержней при $z_n \neq 0$ по системе двух уравнений связи узлов с номерами n–1, n, n+1 относительно двух неизвестных Δx_n, h_n.

$$\begin{aligned}
&(l_{n-1,x} - \Delta x_{n-1} + \Delta x_n)^2 + (l_{n-1,y} + h_n)^2 + (z_n - z_{n-1})^2 = l^2 = l^2_{n-1,x} + l^2_{n-1,y}, \\
&(l_{n,x} - \Delta x_n)^2 + (l_{n-1,y} - h_n)^2 + z_n^2 = l^2 = l^2_{n,x} + l^2_{n,y},
\end{aligned} \qquad (2)$$

где Δx_{n-1} - изменение x_{n-1} узла с номером n–1 вследствие поворотов стержней является величиной второго порядка малости по сравнению с l,

$$\Delta x_{n-1} = -0,5\sum_{k=2}^{n-1}\frac{(z_k - z_{k-1})^2}{l_{k,x}}, \quad l_{k,x} = l \sin \varphi_k, \quad l_{k,y} = - l \cos \varphi_k.$$

Решив систему (2) с точностью до величин порядка z_k^2, находим

$$h_n = 0.5\frac{l_{n,x}(z_n - z_{n-1})^2 + l_{n-1,x}z_n^2 - 2l_{n-1,x}l_{n,x}\Delta x_{n-1}}{l_{n-1,x}l_{n,y} - l_{n-1,y}l_{n,x}},$$ что позволяет рассчитывать в явном виде значения элементов матрицы C по коэффициентам квадратичной функции $\Pi(z_1, z_2, ..., z_n) = mgh_n$.

Как и в случае малых колебаний нити в вертикальной плоскости (с одной или с двумя опорами) [1], все элементы матриц A и C имеют общий множитель ml. Тем самым приходим к заключению, что в поле силы тяжести частоты любых форм собственных колебаний однородной нити с заданным положением опор не зависят от ее массы и материала и определяются L - длиной нити и g- ускорением свободного падения. Поэтому далее вместо размерных частот p_k рассчитываем безразмерные $s_k = p_k\sqrt{L/g}$.

Основные результаты расчетов. При $n > 2$ формирование матриц A, C и расчеты частот колебаний, согласно представленной выше методике, выполнены с помощью программы *Maple*. Влияние числа элементов n = 4, 12, 20, 40 дискретной схемы на значения первых 10-ти безразмерных собственных частот s_k дискретной схемы нити при симметричном варианте расположения опор h=0 на расстоянии d=0,5 отражено в табл. 1.

На основании данных табл. 1 приходим к следующим выводам.

1. Результаты расчетов имеют более высокую скорость сходимости для низших тонов колебаний.

2. С ростом n снижаются значения всех частот, т.е. расчеты с применением дискретной схемы приводят к завышенным значениям частот и дают им оценку сверху. Это соответствует положениям теории о влиянии дополнительных связей на рост значений собственных частот.

3. Спектры низших частот собственных колебаний нити двух видов, в вертикальной плоскости [1] и в направлении «из вертикальной плоскости», не содержат одинаковых или «почти совпадающих» частот.

Таблица 1

n	s_1	s_2	s_3	s_4	s_5	s_6	s_7	s_8	s_9	s_{10}
4	1.8451	3.6906	5.1429							
12	1.8237	3.1747	4.8440	6.5560	8.3673	10.407	12.155	14.980	15.728	20.940
20	1.8208	3.1495	4.7591	6.3479	8.0053	9.7137	11.487	13.332	15.237	17.247
40	1.8195	3.1389	4.7220	6.2598	7.8332	9.4178	11.022	12.647	14.294	15.966

Влияние h - ординаты точки B на низшие частоты при n=20, d=0,5 отражено в табл. 2. Увеличение h от 0 до 0.8 приводит к прогрессивному росту значений всех частот на 22 - 42% от своих «начальных» значений при h= 0. Это объясняется ростом среднего значения силы натяжения по мере подъема точки B и «выпрямления» статической формы нити.

Таблица 2

h	s_1	s_2	s_3	s_4	s_5	s_6	s_7	s_8	s_9	s_{10}
0	1.821	3.150	4.759	6.348	8.005	9.714	11.49	13.33	15.24	17.25
0.2	1.819	3.199	4.798	6.417	8.087	9.816	11.61	13.47	15.41	17.40
0.4	1.824	3.343	4.951	6.641	8.372	10.16	12.02	13.96	15.97	18.03
0.6	1.872	3.601	5.340	7.153	9.025	10.96	12.97	15.07	17.23	19.47
0.8	2.238	4.464	6.718	9.021	11.39	13.83	16.37	19.00	21.74	24.58

Зависимость низших частот от d - расстояния между опорами при n=20, h=0 отражена в табл. 3. Здесь также прослеживается прогрессивный рост частот при увеличении расстояния между опорами.

Таблица 3

d	s_1	s_2	s_3	s_4	s_5	s_6	s_7	s_8	s_9	s_{10}
0.01	1.701	2.434	3.942	5.166	6.343	8.135	9.000	11.44	12.00	15.16
0.1	1.705	2.473	3.989	5.215	6.459	8.183	9.145	11.48	12.11	15.19
0.5	1.821	3.150	4.759	6.348	8.005	9.714	11.49	13.33	15.24	17.25
0.9	2.559	5.013	7.530	10.10	12.73	15.45	18.25	21.17	24.20	27.35
0.99	4.496	8.999	13.56	18.21	22.97	27.87	32.94	38.20	43.68	49.38

Тестирование. Точность дискретных моделей МТТ оценим на примерах малых колебаний нити симметричной формы (случай h=0 при различных значениях d), так как свойство симметрии позволяет автономно исследовать симметричные и косо-симметричные формы колебаний.

При минимальном количестве элементов ($n = 2$) система стержней представляет собой одностепенной физический маятник с горизонтальной осью вращения, для которого при d=0,5 значение единственной собственной частоты $s = \sqrt{2\sqrt{3}}$ =1,86120, что согласуется с данными табл. 1.

Несмотря на неравномерную плотность распределения масс по вертикали, собственные колебания дискретной схемы симметричной формы физически подобны плоским маятниковым колебаниям отрезка однородной нити с одной закрепленной точкой.

При сближении опор $d \to 0$ частоты колебаний двухопорной нити длиной L и нити длиной $L/2$ с одной опорой должны совпадать. Это подтверждают данные табл. 3 и расчеты [1]. У двух отрезков нити одинаковой длины L (с двумя опорами на расстоянии d=0,01 и с одной опорой) отношение безразмерных частот 1-го тона 1,701/1,2028 = 1,4142 практически равно $\sqrt{2}$.

Расчетом спектра частот строго симметричных форм колебаний при d=0,5, n=20 по методике, схожей с методом расчета частот нити с одной закрепленной точкой [1], получены значения первых пяти частот s_k (1,8208, 4,7591, 8,0053, 11,487, 15,237), совпадающие с точностью до 10^{-5} с нечетными частотами
(табл. 1 для n=20). Из этого факта следует, что четные частоты в табл. 1 отвечают кососимметричным формам колебаний.

В указанном расчете вместо координат z_k вводились α_k ($k = \overline{1,\ r}$, $r = n/2$) - углы отклонения от вертикальной плоскости Oxy плоскостей расположения синхронно движущихся элементов. Кроме того, для расчета матрицы жесткости вместо функции $\Pi(z_1, z_2, ..., z_n)$ использовалась скалярная функция S от a_{ky} - проекций ускорений подвижных шарнирных узлов на вертикальную ось Oy, вызванных ненулевыми обобщенными скоростями $\dot{\alpha}_k \neq 0$ в положении равновесия, когда все координаты α_k =0:

$$S = \sum_{k=2}^{n} S_k\ , \qquad 2S_k = mga_{ky}\ , \qquad a_{k,y} = a_{k-1,y} + \dot{\alpha}_k^2 l \cos\varphi_k\ , \ a_{0,y}=0.$$

Частные производные второго порядка функции S по обобщенным скоростям $\dot{\alpha}_k$ определяют значения элементов матрицы жесткости: $c_{ij} = \dfrac{\partial^2 S}{\partial \dot{\alpha}_i \partial \dot{\alpha}_j}$.

В простом эксперименте с отрезком витой пеньковой веревки (диаметр сечения 6 мм, длина L=2.4 м, d=0.5, h=0) первая форма кососимметричных (бифилярных) колебаний устойчиво возникала при кинематическом возмущении одной опоры вдоль оси Oz с периодом $\tau \approx 1$ с, что соответствует безразмерной частоте $s = \sqrt{L/g}\;2\pi/\tau\,3.0$. Тем самым подтверждается теоретический прогноз (табл. 1), согласно которому $s_2 \approx 3{,}14$.

При малых статических провисаниях нити, когда h=0 и $d \to 1$, ее колебания в направлении «из вертикальной плоскости» становятся подобными поперечным колебаниям горизонтально натянутой струны, теоретические значения размерных частот p_k^* которой зависят от полагаемой неизменной проекции силы натяжения F_{ox} на продольную ось согласно формуле $p_k^* = \mathrm{p}\,k\sqrt{\dfrac{F_{ox}}{ML}}$, k=1, 2, 3,.... Преобразуем эту формулу к виду $p_k^* = \pi k\sqrt{\dfrac{g\,\mathrm{tg}\varphi_0}{2L}}$, не содержащему F_{ox}, приняв во внимание связь проекций $F_{ox} = F_{oy}\,\mathrm{tg}\varphi_0$ и уравнение статики $2F_{oy} = Mg$, где φ_0 - угол отклонения струны от вертикали в точке закрепления. В итоге получаем возможность оценивать безразмерные частоты колебаний струны по формуле $s_k^* = \pi k\sqrt{0.5\,\mathrm{tg}\varphi_0}$. Подставив в нее значение угла φ_0= 1,339 рад (используемого в расчете частот колебаний нити при d = 0,99 для табл. 3), получаем результаты (табл. 4), демонстрирующие совпадение спектров низших частот колебаний, рассчитанных по теории струны и методом МТТ, даже для сравнительно слабо натянутой нити с провисанием 0,06122 L.

Таблица 4

d=0.99	s_1	s_2	s_3	s_4	s_5	s_6	s_7	s_8	s_9	s_{10}
Струна	4.571	9.142	13.71	18.28	22.86	27.43	32.00	36.57	41.14	45.71
Нить	4.496	8.999	13.56	18.21	22.97	27.87	32.94	38.20	43.68	49.38

Далее сделаем замечание о влиянии n - числа элементов и его четности на точность результатов. Практикой расчетов проверено, что при малых числах n (n < 10) более точные результаты дают дискретные схемы с меньшими значениями углов смежности в узлах соединения элементов. Так, при малых углах $\varphi_0 \ll 1$ и $d/l \leq 1$ схемы с нечетным n имеют заметно более низкую точность, чем с четным n. Если φ_0 соизмерим с 1, то отличия результатов у схем с четным и нечетным n незначительны. В то же время в отношении конструкции с n одинаковыми жесткими звеньями (например, для цепи) результаты, получаемые по изложенной методике, следует считать точными при любых реальных n, h, d.

Выводы

1. Метод твердых тел позволяет эффективно выполнять анализ собственных колебаний нелинейной одномерной среды (нити).

2. Спектры собственных частот колебаний отрезка нити с закрепленными концами различны для случаев колебаний в вертикальной плоскости и в направлении «из вертикальной плоскости».

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Русанов П.Г. Расчет собственных колебаний в вертикальной плоскости отрезка тяжелой нити методом физической дискретизации.//Известия вузов. Машиностроение. –2007. –№10. –С. 3 - 9.

2. Русанов П.Г. Отличия расчетов формы упругой линии гибкого стержня методами дискретизации МКЭ и МТТ //Известия вузов. Машиностроение. –2006. –№7. –С. 3 - 9.

531.383

РАЗРАБОТКА КОНСТРУКТИВНОГО ОСНОВАНИЯ СИСТЕМЫ НАЧАЛЬНЫХ УСЛОВИЙ

проф. П.А. КОТОВ

Предлагаются возможные варианты формирования и обоснования действительных безрезонансных начальных условий нерелятивистских динамических систем с исследуемыми моделями представимых дифференциальными уравнениями с сосредоточенными параметрами детерминированных задач разработанные с соблюдением основного закона динамики, классического дифференциального и интегрального исчисления функции вещественного переменного.