

После преобразований окончательно получаем

$$f'(1) = -\mu\psi(1) + (1-\bar{h})^3 \psi(1) \left[1 + \mu - \lambda \frac{J_2(\lambda)}{J_1(\lambda)} \right] + \bar{h}^3 [\psi'(1) + (1+\mu)\psi(1)] + \frac{\sqrt{6(1\mu^2)}}{2} \left[\lambda^2 (\bar{h})^3 \bar{h}^2 (\bar{h}) Q_3(1) \right].$$

Таким образом, нами получены в явном виде характеристические уравнения для определения критической нагрузки и закритического поведения пластины с дефектами типа круглых отслоений в элементах конструкций из слоистых материалов, при одновременно локальной и глобальной потере устойчивости.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бохоева Л.А. Устойчивость круглых отслоений в слоистых элементах конструкций с учетом поперечного сдвига// Межвуз сборник науч. трудов. Чита.- 1994.- С.21-25.

539.3

СВЯЗАННАЯ НЕСТАЦИОНАРНАЯ ЗАДАЧА ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ И ТЕРМОУПРУГОСТИ БАЛКИ-ПЛАСТИНКИ ИЗ ПОРИСТОГО МАТЕРИАЛА

Д-р физ-мат. наук, проф. С.М. ШЛЯХОВ, асп. А.В. ЕФРЕМОВ, канд. техн. наук Э.Ф. КРИВУЛИНА

В работе получено решение конструктивно-связанной задачи теплопроводности и термоупругости для тел пористой структуры. Учтено влияние зависимости коэффициента теплопроводности от напряжений. В основу решения положены вариационные принципы, реализация которых осуществлена методом конечных элементов.

In article the solution of the constructional-connected problem of thermal conductivity and thermo elasticity for bodies of porous structure is receive. Influence of dependence of coefficient of thermal conductivity from voltages is considered. In a basis of a solution, the variation principles which implementation is realized by a finite element method are supposed.

Многие элементы конструкций теплоэнергетического оборудования выполнены из материалов, полученных методом порошкового спекания или порошковой металлургии. Речь идет о жаростойких и тугоплавких материалах как металлических, так и неметаллических – это карбиды различных металлов, графит, пенокерамика и т.д. Структура таких материалов изначально пористая, причем пористость может быть как кажущаяся (не сквозная), так и сквозная (капиллярная). Изделия из пористого материала выполняются методами прессования, при этом плотность материала и, следовательно, пористость распределяется по массиву самого материала неравномерно. Возникает изначальное нарушение гипотез сплошности и однородности материала, принимаемых в механике твердого деформируемого тела как основные. Поскольку все чаще требуется решение задач механики деформируемого твердого тела именно для таких материалов, приходится возвращаться к гипотезе сплошности, но учитывать пористость введением поправок в исходные зависимости состояния материала, т.е. подходить к решению задач механики деформируемого твердого тела с позиции механики неоднородных тел. При этом механические и теплофизические характеристики принимаются как некоторые функции пористости и температуры, законы изменения которых определяются экспериментально.

Сформулируем конструкционно–связанную задачу теплопроводности, т.е. учтем зависимость коэффициента теплопроводности от нормальных напряжений $\lambda(P(\sigma), T)$. Это стало необходимым, поскольку пористость, строго говоря, не остается неизменной при наложении на твердое тело поля напряжений.

Так как коэффициент теплопроводности зависит от пористости то поле температур становится зависящим от поля напряжений. В [1] имеются экспериментальные данные зависимости λ от напряжений сжатия близкой к линейной функции $\lambda = a - b\sigma$.

Условимся в дальнейшем считать эту зависимость справедливой и для растяжения. При этом для пористых огнеупорных материалов увеличение сжимающих напряжений на каждые $\Delta\sigma = 100$ МПа приводит к увеличению коэффициента теплопроводности до 3% (Рис.1.)

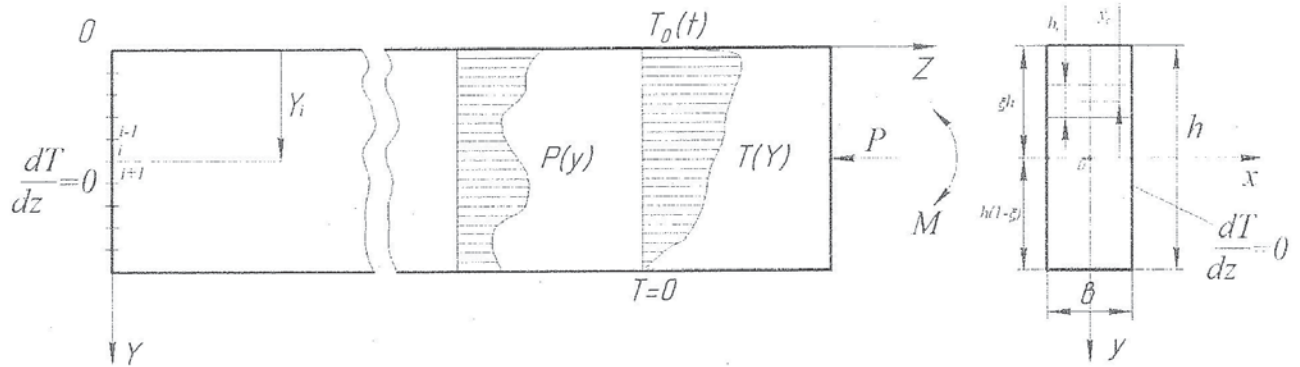


Рис.1. Схема балки-пластинки в одномерном поле температур

Минимальная, технологически получаемая пористость для тугоплавких материалов равна $P=3\%$. Рассмотрим тонкую пластинку (балку-стенку) постоянного прямоугольного сечения (рис.2), выполненную из пористого материала.

Пластинка находится в одномерном поле температур, вызванном внутренним тепловым источником. Она может быть как закрепленной, так и свободной. На верхней и нижней ее границах поддерживаются постоянные различные температуры. Боковые поверхности теплоизолированы. Пористость материала переменна по высоте сечения. Теплофизические и механические характеристики зависят от температуры T и пористости P . Тепловой режим в пластине - нестационарный. Решение задачи теплопроводности сводится к интегрированию нелинейного дифференциального уравнения [2],[3]:

$$\frac{d}{dZ} \left[\lambda(P(\sigma), T) \frac{dT}{dZ} \right] + W(T, P) = \rho C_p \frac{\partial T}{\partial t} \quad (1)$$

при удовлетворении начальным и граничным условиям

$$\begin{aligned} &\text{при } t = 0, T(Y) = 0, W = W_0 \\ &\text{при } t > 0, T = T_1 \text{ при } Y = 0, T = T_2 \text{ при } Y = h \end{aligned} \quad (2)$$

Где $\lambda(P(\sigma), T)$ - коэффициент теплопроводности как функция температуры, пористости и напряжения, $P(Y)$ - объемная пористость, $\rho C_p(T, P)$ - объемная удельная теплоемкость, $W(T, P)$ - удельная объемная мощность теплового источника.

В соответствии с [1],[4], [5] аппроксимируем $\lambda(P(\sigma), T)$, $W(T, P)$ функциями

$$\lambda = (\lambda_0 \sqrt{1-P})^3 - b\sigma)(1 + B_1 T + B_2 T + \dots),$$

где $b, \beta_1, \beta_2, \dots, \gamma_1, \gamma_2, \dots$ - экспериментальные коэффициенты.

Решение нелинейного уравнения с переменными коэффициентами (1) ищется методом последовательных приближений [6], [7] на основе метода конечных элементов (МКЭ) [8]. Краевую задачу (1),(2) заменяем эквивалентной ей вариационной с поиском минимума функционала в фиксированный момент времени t^1 для $m_{\text{го}}$ приближения:

$$J = \int_0^h \left\{ \frac{\lambda^{(m-1)}}{2} \left[\frac{\partial T^m}{\partial y} \right]^2 - T^{(m)} W^{(m-1)} + T^{(m)} \rho C_p^{(m-1)} \frac{\partial T}{\partial t} \Big|_{t=t^*} \right\} dY, m = 1, 2, \dots \quad (3)$$

Для реализации минимума функционала (3) используем метод конечных элементов (МКЭ) [8]. При $m=1$ принимаем

$$\lambda^{(0)}(Y) = \lambda_0 \sqrt{(1-P)^3}, W^{(0)}(Y) = W_0(1-P),$$

При $m>1$ имеем

$$\lambda^{(m-1)}(Y) = (\lambda_0 \sqrt{(1-P)^3} - b\sigma)(1 + \beta_1 T_{(m-1)} + \beta_2 T_{(m-1)}^2 + \dots), W(T, P) = W_0(1-P)(1 + \gamma_1 T + \gamma_2 T^2 + \dots)$$

Разбиваем пластину по высоте сечения h на n элементов (отрезков) $i=1, 2, \dots, n+1$.

Обозначая T_i - искомую температуру в i -ом узле, соответственно будем иметь $T=T1$ при $i=1$, $T=T2$ при $i=n+1$. Рассматривая два смежных элемента 1 и 2, примыкающих к узлу i и представим функционал J в виде суммы: , где - средние по элементам коэффициенты теплопроводности, , - средние по элементам мощности источников тепла. Другие элементы в сумме не учитываем, так как они не содержат узел i . Аппроксимируем функцию температур в каждом из элементов линейным сплайном . Здесь через $N11, \dots, N22$ обозначены функции . Выполняя процедуру Рунта, приходим к системе линейных дифференциальных уравнений вида:

$$\frac{\partial T_i}{\partial t} A_1 + \frac{\partial T_{i-1}}{\partial t} A_2 + \frac{\partial T_{i+1}}{\partial t} A_3 + A_4 T_i - A_5 T_{i+1} - A_6 T_{i-1} - A_7 = 0 \quad (4)$$

Решение системы (4) ищем на основе разностной схемы Кранка-Николсона, сведя ее к линейной алгебраической системе уравнений и используя метод итераций на каждом временном шаге.

Вводя разностный аналог согласно [8], получим окончательно алгебраическую систему уравнений относительно узловых температур:

$$T_i^{(m)} = \frac{1}{\alpha_1} \left[\Phi_i^{(n)} \alpha_2 + T_{i-1}^{(m)} \alpha_3 + \Phi_{i-1}^{(n)} \alpha_4 + T_{i+1}^{(m-1)} \alpha_5 + \Phi_{i+1}^{(n)} \alpha_6 + \frac{1}{2} (h_1 W_1 + h_2 W_2) \right], i = 2, \dots, n, \quad (5)$$

$$\text{где } \alpha_1 = \left\langle 2 \frac{\omega_1 h_1 + \omega_2 h_2}{3\Delta t} + \frac{\lambda_1 h_2 + \lambda_2 h_1}{h_1 h_2} \right\rangle, \alpha_2 = \left\langle 2 \frac{\omega_1 h_1 + \omega_2 h_2}{3\Delta t} - \frac{\lambda_1 h_2 + \lambda_2 h_1}{h_1 h_2} \right\rangle, \alpha_3 = \left\langle \frac{\lambda_2}{h_2} - \frac{\omega_2 h_2}{3\Delta t} \right\rangle,$$

$$\alpha_4 = \left\langle \frac{\lambda_2}{h_2} + \frac{\omega_2 h_2}{3\Delta t} \right\rangle, \alpha_5 = \left\langle \frac{\lambda_1}{h_1} - \frac{\omega_1 h_1}{3\Delta t} \right\rangle, \alpha_6 = \left\langle \frac{\lambda_1}{h_1} + \frac{\omega_1 h_1}{3\Delta t} \right\rangle.$$

Решение системы (5) на каждом временном шаге ищем итерационным методом Гаусса-Зейделя до сходимости с заданной точностью. Далее уточняем теплофизические характеристики и повторяем решение на следующем временном шаге, итерации повторяем до сходимости двух приближений по

$$m: (T^{(m)} - T^{(m-1)}) / T^{(m)} \cdot 100\% \leq \varepsilon,$$

. Для поиска нормальных температурных напряжений в балке-стенке исходим из посылки, что длина бруса велика и краевыми эффектами можно пренебречь. В этом случае с достаточной точностью можно использовать прием, основанный на принципе освобожденности от связей [9, 10]. При полном закреплении пластинки по краям в ней возникнут напряжения, обусловленные стесненным тепловым расширением [10]

$$\sigma_z(y) = -E(y) \cdot \alpha(T) \cdot T(y), \quad (6)$$

где $\alpha(T)$ - средний в рабочем диапазоне температур коэффициент линейного расширения материала как функция координаты y , $E(Y)$ - переменный по высоте сечения модуль Юнга, зависящий от пористости и температуры. На основании [4] представим модуль Юнга следующей функциональной зависимостью:

$$E(y) = E(T) \cdot E(P), \quad (7)$$

$$\text{где } E(T) = E_0(1 + b_1 T + b_2 T^2), \quad E(P) = 1 + a_1 P + a_2 P^2.$$

Входящие в (7) коэффициенты определяются экспериментально. Заметим, что координатная ось x проходит по нейтральному слою сечения так, что $y = Y - \xi h$. Нормальные напряжения (6) вызывают в сечении продольную силу N и момент M , определяемые по абсолютному значению по формуле

$$N = -b \int_{-\xi h}^{h-(1-\xi)} \sigma_z'(y) dy, \quad M = -b \int_{-\xi h}^{h-(1-\xi)} \sigma_z'(y) y dy, \quad (8)$$

где ξ – определяет положение нейтральной оси [11]. Если освободить брус от связей, то для

расчета действительных напряжений необходимо к напряжениям (6) добавить напряжения $\sigma_z^n(y), \sigma_z^m(y)$, обусловленные силой N и моментом M , согласно (8), $\sigma_z = \sigma_z' + \sigma_z^n(y) + \sigma_z^m(y)$

. Для поиска напряжений σ_z^n , обусловленных силой N , используем следующий прием. Разбиваем брус по высоте на n слоев постоянного сечения $A_i = b \times h_i$ (рис. 2.) с постоянными физико-механическими характеристиками по слою $Ei = const$.

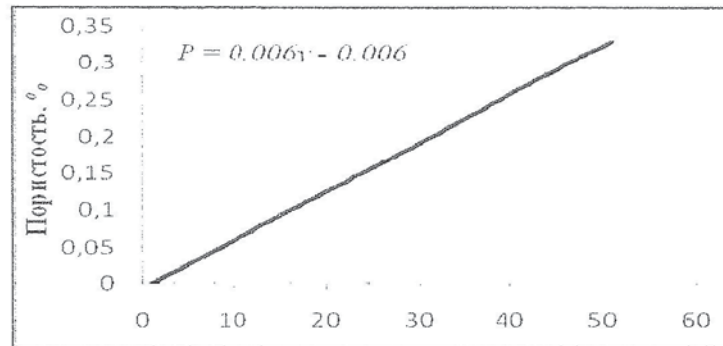


Рис. 2. Закон изменения пористости

Распределим продольную силу N по слоям, то есть $N1+N2+...=N$.

Так как $\Delta l_i = N_i L / E_i A_i$, то из уравнения равновесия и условий совместности деформаций получим, соответственно напряжения будут равны

$$\sigma_{z(i)}^n = \frac{N}{A_i \sum_{k=1}^n \frac{E_k A_k}{E_i A_i}}, \quad i=1,2,\dots,n,$$

Считая брус многослойным, с постоянными характеристиками по толщине слоя и следуя [11], положение нейтральной линии из условия равенства нулю продольной силы при чистом изгибе бруса получаем равным:

$$\xi = \frac{0,5 E_1 h_1 + \sum_{i=2}^n E_i h_i \left[0,5 h_i + \sum_{k=1}^{i-1} h_k \right]}{h \sum_{i=1}^n E_i h_i}$$

Соответственно по теории изгиба многослойного бруса [11] имеем

$$\sigma_z^m(y) = \frac{E(y) y M}{\sum_{i=1}^n E_i \left[\frac{b h_i^3}{12} + b h_i y_{ci}^2 \right]}$$

На основании полученных решений, используя принцип суперпозиции, получим расчетные формулы для температурных напряжений в стержне при различных способах его закрепления:

$$\sigma_z(y) = -E(y) \cdot \alpha(T) \cdot T(Y) + \frac{N}{A_i \sum_{k=1}^n \frac{E_k A_k}{E_i A_i}} + \frac{E(y) y M}{\sum_{i=1}^n E_i \left[\frac{b h_i^3}{12} + b h_i y_{ci}^2 \right]}, \quad (9)$$

При наличии подвижной заделки, разрешающей радиальное перемещение, но запрещающей поворот, в (9) убирается последнее слагаемое. В случае жесткой заделки в (9) остается лишь первое слагаемое. После определения поля напряжений на первом шаге, уточняем коэффициент теплопроводности как функцию напряжений $\lambda(P(\sigma), T)$ заново решаем задачу теплопроводности для второго шага по времени, а затем и термоупругости. Количество шагов по времени регламентируется достижением установившегося режима. Из решения (9) как частный случай вытекает решение для однородной задачи термоупругости для балки-пластинки [9].

Проведем практическое исследование полей температур и напряжений балки-пластинки, выполненной из пористого железа. Высота пластины $h=0,02$ м, ширина – произвольная ($b < h$). Температурное поле вызвано внутренним тепловым источником с удельной объемной мощностью $W_0 = 275000 \frac{\text{кВт}}{\text{м} \cdot \text{К}}$. На верхней границе сечения пластины поддерживается постоянная температура $T=120^\circ\text{C}$, на нижней границе $T=20^\circ\text{C}$. Боковые поверхности теплоизолированы. Закон изменения пористости по высоте сечения имеет линейную зависимость $P=0,006 y - 0,006$ (Рис.3.)

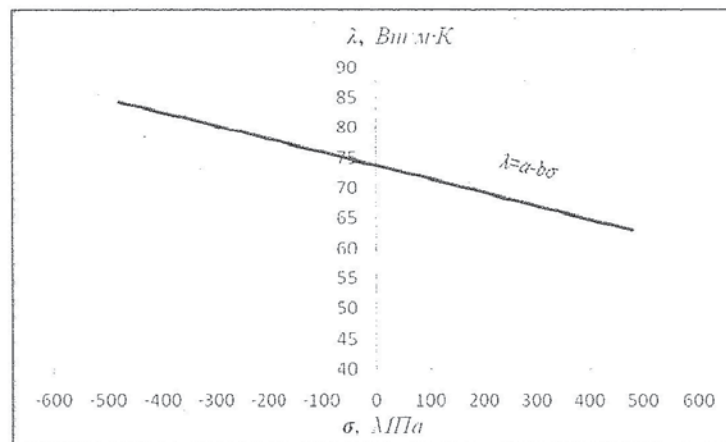


Рис.3. График зависимости теплопроводности от напряжений

Количество разбиений n по толщине h принято равным $n=50$. Поля температур и напряжений при связанной постановке задачи представлены для моментов времени 1 и 3 с. Для сравнения приведены значения в случае несвязанной задачи соответственно для 1 и 3 с. Поля

напряжений приведены для случая закрепления пластинки по схеме скользящей заделки рис.4. На графиках по оси абсцисс показан номер конечного элемента.

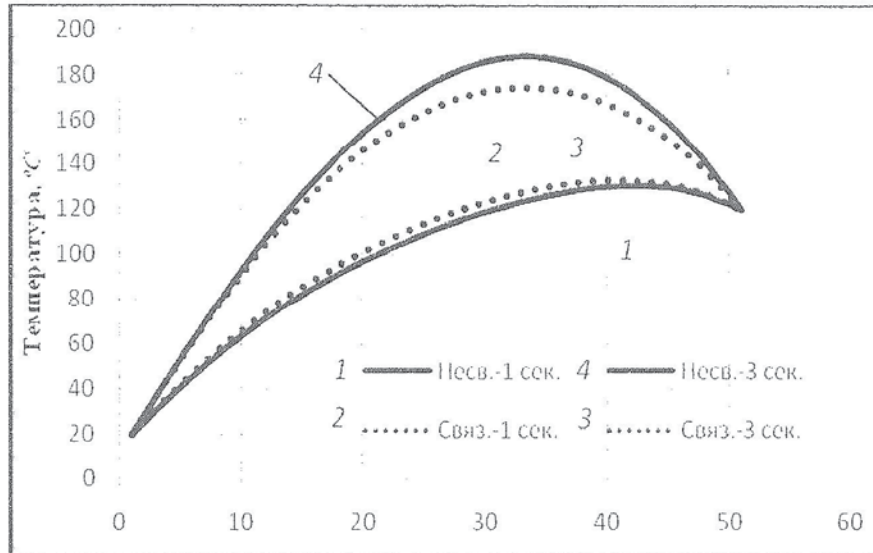


Рис.4. Поле температур

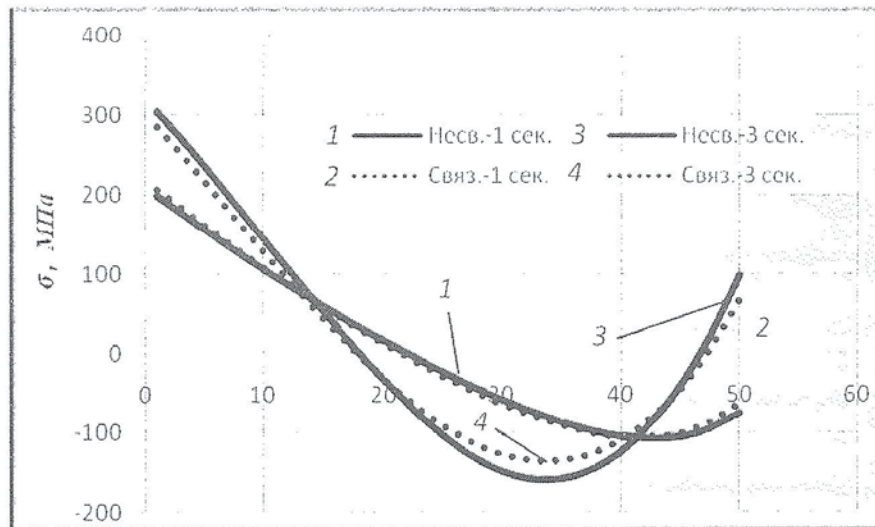


Рис.4. Поле напряжений для пластинки, закрепленной по схеме скользящей заделки

Выводы

Оценено влияние закона изменения пористости, температуры и способа закрепления пластинки на НДС. Установлено, что роль пористости, термочувствительности и связанности при нестационарном режиме нагрева существенно и требует обязательного учета ее при расчетах НДС и проектировании различных конструкций.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Литовский Е. Я. Теплофизические свойства огнеупоров / Е. Я. Литовский, Н.А.Пучкелевич. М.: Металлургия. 1982. 152 с.
2. Коздоба Л. А. Методы решения нелинейных задач теплопроводности / Л. А. Коздоба. М.: Наука. 1975. 228 с.
3. Шнейдер П. Инженерные проблемы теплопроводности / П. Шнейдер М.: Изд-во И. Л. 1960. 479 с.
4. Капталян Ю. А. Характеристики упругости материалов при высоких температурах / Ю. А. Капталян. Киев: Наукова думка. 1970. 112 с.
5. Чиркин В. С. Теплофизические свойства материалов / В. С. Чиркин. М.: Мир. 1970. 356 с.
6. Шляхов С. М. Задача термоупругости для балки-пластины из пористого материала в одномерном поле температур / С. М. Шляхов, Э. Ф. Кривулина // Проблемы прочности элементов конструкций под действием нагрузок и рабочих сред: Межвуз. научн. сб. Саратов: СГТУ. 2003. С. 58-63.
7. Шляхов С. М. Термоупругое состояние балки-пластины из пористого материала в нестационарном поле температур / С. М. Шляхов, А. В. Ефремов //Авиакосмические технологии «АКТ-2006»:Труды седьмой Международной научно-технической конференции-Воронеж: Воронеж. гос. техн. ун-т, 2006, 604с. С. 355-360.
8. Сегерлинд Ларри Дж. Применение метода конечных элементов / Ларри Дж. Сегерлинд. Под ред. Б. Е. Победри. М.: Мир. 1979. 392 с.
9. Тимошенко С. П. Теория упругости / С. П. Тимошенко, Дж. Гудьер. Под ред. Г. С. Шапиро. 2-е изд. М.: Наука. 1979. 560 с.
10. Гейтвуд Б. Е. Температурные напряжения / Б. Е. Гейтвуд. М.: Изд-во И. Л. 1959. 349 с.
11. Королев В. И. Упруго-пластические деформации оболочек / В. И. Королев. М.: Машиностроение. 1971. 304 с.