

519.246

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ДИНАМИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК СИСТЕМ С ТУРБУЛЕНТНЫМ ТРЕНИЕМ НА ОСНОВЕ СТОХАСТИЧЕСКИХ РАЗНОСТНЫХ УРАВНЕНИЙ

Канд. физ.-мат. наук, доц. В.Е. ЗОТЕЕВ

Рассматривается математическая модель колебаний системы с турбулентным трением в форме стохастических разностных уравнений. На основе этой модели предлагается новый метод определения динамических характеристик системы по мгновенным значениям виброграммы затухающих колебаний. Приведены результаты численно-аналитических исследований эффективности данного метода; дается оценка погрешности вычислений при обработке экспериментальных данных.

The mathematical model of fluctuations of system with turbulent friction in the form of stochastic difference equations is considered. On the basis of this model the new method for determination of dynamic characteristics of system according to instantaneous values of damped oscillations trace is offered. Results of numerically-analytical investigations of effectiveness of suggested method are provided. The estimation of inaccuracy of calculations is given when processing experimental data.

Один из важнейших классов в машиностроении образуют нелинейные диссипативные механические системы. Мониторинг их технического состояния обычно построен на основе анализа процессов изменения динамических характеристик системы при ее эксплуатации либо при прочностных промышленных испытаниях. При этом нередко оказывается, что одним из основных диагностических признаков технического состояния механической системы является степень нелинейности действующих в ней сил трения. В таких случаях игнорирование нелинейности диссипативной силы при математическом моделировании и в методах параметрической идентификации может привести к систематической погрешности в оценках диссипативных характеристик и существенному искажению результатов мониторинга.

Известные методы определения характеристик рассеяния энергии колебаний нелинейной диссипативной системы обычно используют различного рода линеаризацию. В частности, при анализе вынужденных колебаний нелинейную характеристику сопротивления часто заменяют эквивалентной ей линейной. Коэффициент в ней определяют, исходя из условия энергетической эквивалентности [1]. Другой, широко распространенный в практике эксперимента, метод определения параметров характеристики сопротивления предполагает линеаризацию математической модели силы трения по отдельным

участкам виброграммы свободных колебаний и вычисление декремента колебаний на каждом участке с последующим построением его амплитудной зависимости [2]. Существенным недостатком этих методов определения динамических характеристик (ДХ) нелинейных диссипативных систем является и то, что они не ориентированы на современный уровень развития средств вычислений и алгоритмов статистической обработки экспериментальных данных. Решить задачу повышения точности вычислений параметров нелинейной диссипативной системы можно только на основе новых математических моделей, описывающих временную последовательность мгновенных значений динамического процесса в системе и учитывающих как нелинейность сил трения, так и аддитивную помеху в результатах эксперимента. Этим требованиям в полной мере удовлетворяют линейно параметрические дискретные модели (ЛПДМ) в форме стохастических разностных уравнений, описывающих результаты измерений отклика системы на типовое тестовое воздействие [3, 4]. Применение моделей этого класса позволяет определять динамические характеристики нелинейной диссипативной системы через среднеквадратичные оценки коэффициентов ЛПДМ и тем самым обеспечить высокую точность оценки за счет эффективного использования современных методов и средств вычислений.

Рассмотрим класс нелинейных диссипативных механических систем, в которых рассеяние энергии колебаний обуславливает турбулентное или гидродинамическое трение: $R = by'(t)y'(t)$. Механические системы с турбулентным трением (например, гидро и пневмодемпферы) относятся к диссипативным системам с частотно зависимым трением, пропорциональным n -ой степени скорости движения: $R = by'(t)y'(t)^{n-1}$, где b и n – параметры характеристики сопротивления, и являются их частным случаем при $n = 2$ [1]. Свободные колебания систем с турбулентным трением описываются функцией

$$\tilde{y}_k = a_0 \left(1 + \frac{\delta_0 \tau}{T} k \right)^{-1} \cos(\omega \tau k + \psi_0), \quad (1)$$

где ω и δ_0 – частота и декремент колебаний; $T = 2\pi\omega^{-1}$ – период колебаний; a_0 и ψ_0 – начальные амплитуда и фаза колебаний.

При разработке метода определения динамических характеристик систем с турбулентным трением на основе стохастических разностных уравнений, описывающих временную последовательность результатов измерений виброграммы свободных колебаний, должны быть решены следующие основные задачи:

- построение линейно параметрической дискретной модели колебаний систем с турбулентным трением в форме стохастических разностных уравнений;
- разработка и исследование эффективности алгоритма вычисления динамических характеристик

на основе итерационной процедуры среднеквадратичного оценивания коэффициентов стохастического разностного уравнения;

– оценка погрешности вычисления динамических характеристик системы с турбулентным трением в процессе обработки результатов эксперимента.

Построение ЛПДМ колебаний систем с турбулентным трением выполняется в два этапа. Вначале строится модель в виде рекуррентной формулы, связывающей три последовательных отсчета \tilde{y}_{k-2} , \tilde{y}_{k-1} и \tilde{y}_k непрерывной функции (1). Затем на основе этой формулы, с учетом случайной аддитивной помехи ε_k в результатах наблюдений $y_k = \tilde{y}_k + \varepsilon_k$, формируются два стохастических разностных уравнения. Первое из них рекуррентно описывает выборку экспериментальных данных, а второе представляет собой стохастическую модель процесса скользящего среднего с переменными коэффициентами для эквивалентного случайного возмущения.

Полагая в формуле (1) $t = \tau k$, $k = 0, 1, 2, \dots$, где τ – период равномерной дискретизации временной функции, получаем ее дискретный аналог

$$\tilde{y}_k = a_0 \left(1 + \frac{\delta_0 \tau}{T} k \right)^{-1} \cos(\omega \tau k + \psi_0),$$

$$\text{Отсюда } (1 + \lambda_1 k) \tilde{y}_k = a_0 \cos(\omega \tau k + \psi_0), \text{ где } \lambda_1 = \frac{\delta_0 \tau}{T}.$$

Применяя к обеим частям данного выражения z -преобразование, имеем:

$$Z \{ \tilde{y}_k (1 + \lambda_1 k) \} = a_0 \frac{\cos \psi_0 - z^{-1} \cos(\omega \tau - \psi_0)}{1 - 2 \cos \omega \tau z^{-1} + z^{-2}}.$$

Отсюда можно получить:

$$Z \{ \tilde{y}_k (1 + \lambda_1 k) \} - z^{-1} \lambda_0 Z \{ \tilde{y}_k (1 + \lambda_1 k) \} + z^{-2} Z \{ \tilde{y}_k (1 + \lambda_1 k) \} = a_0 \cos \psi_0 - z^{-1} a_0 \cos(\omega \tau - \psi_0),$$

где $\lambda_0 = 2 \cos \omega \tau$. Возвращаясь в пространство оригиналов, используя первую теорему сдвига: $z^{-r} Z \{ \tilde{y}_k \} = \tilde{y}_{k-r}$, $r = 0, 1, 2$, с учетом того, что $\tilde{y}_{k-r} = 0$ при условии $k - r < 0$, получаем линейное разностное уравнение, $k = 0, 1, 2, \dots$, где $\delta_k = \begin{cases} 1, & \text{при } k = 0; \\ 0, & \text{при } k \neq 0 \end{cases}$ – символ Кронекера.

При $k = 0$ и $k = 1$, отсюда соответственно получаем:

$$\tilde{y}_0 = a_0 \cos \psi_0, \quad \tilde{y}_1 = \frac{a_0}{1 + \lambda_1} (\cos \omega \tau \cos \psi_0 - \sin \omega \tau \sin \psi_0), \quad (2)$$

При $k \geq 2$ приходим к разностному уравнению второго порядка:

$$(1 + k \lambda_1) \tilde{y}_k - \lambda_0 [1 + (k-1) \lambda_1] \tilde{y}_{k-1} + [1 + (k-2) \lambda_1] \tilde{y}_{k-2} = 0,$$

из которого после простых преобразований получаем линейно параметрическую дискретную

модель, рекуррентно описывающую временную последовательность дискретных значений исследуемой функции:

$$\lambda_0 \tilde{y}_{k-1} - \lambda_1 [k\tilde{y}_k + (k-2)\tilde{y}_{k-2}] + \lambda_2 (k-1)\tilde{y}_{k-1} = \tilde{y}_k + \tilde{y}_{k-2}, \quad k = 2, 3, \dots \quad (3)$$

Коэффициенты в модели (3) связаны с динамическими характеристиками системы соотношениями:

$$\lambda_0 = 2 \cos \omega \tau, \quad \lambda_1 = \frac{\delta_0 \tau}{T}, \quad \lambda_2 = \lambda_0 \lambda_1. \quad (4)$$

При обработке экспериментальной виброграммы свободных колебаний формируется выборка результатов наблюдений y_k , $k = \overline{0, N-1}$, где N – объем выборки. Результаты наблюдений y_k содержат аддитивную случайную помеху ε_k : $y_k = \tilde{y}_k + \varepsilon_k$, где \tilde{y}_k – дискретные значения, соответствующие теоретической модели колебаний, и, следовательно, соотношениям (2) и (3). Обозначим

$$\lambda_3 = a_0 \cos \psi_0, \quad \lambda_4 = \frac{a_0}{1 + \lambda_1} \cos(\omega \tau + \psi_0) \quad (5)$$

Тогда с учетом случайной помехи в результатах измерений линейно параметрическую дискретную модель в форме стохастических разностных уравнений можно представить в виде

$$\begin{cases} y_0 = \lambda_3 + \varepsilon_0, \\ y_1 = \lambda_4 + \varepsilon_1, \\ y_k + y_{k-2} = \lambda_0 y_{k-1} - \lambda_1 [k y_k + (k-2) y_{k-2}] + \lambda_2 (k-1) y_{k-1} + \eta_k, \\ \eta_k = [1 + (k-2)\lambda_1] \varepsilon_{k-2} - \lambda_0 [1 + (k-1)\lambda_1] \varepsilon_{k-1} + [1 + k\lambda_1] \varepsilon_k, \quad k = \overline{2, N-1}. \end{cases} \quad (6)$$

В матричной форме ЛПДМ, описывающая последовательность результатов измерений свободных колебаний системы с турбулентным трением, имеет вид обобщенной регрессионной модели

$$\begin{cases} b = F \lambda + \eta, \\ \eta = P_2 \varepsilon. \end{cases} \quad (7)$$

Здесь $\lambda = (\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4)^T$ – вектор неизвестных коэффициентов ЛПДМ;

$\varepsilon = (\varepsilon_0, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{N-1})^T$ – N -мерный вектор случайной помехи в результатах

наблюдений; $\eta = (\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_N)^T$ – N -мерный вектор эквивалентного случайного возмущения в соответствующем стохастическом разностном уравнении;

$b = (y_0, y_1, y_0 + y_2, \dots, y_{k-3} + y_{k-1}, \dots, y_{N-3} + y_{N-1})^T$ – N -мерный вектор правой части;

F – матрица регрессоров размера $N \times 5$, столбцы которой описываются формулами:

$$f_{k1} = (0, 0, y_1, y_2, \dots, y_{N-2})^T,$$

$$f_{k2} = (0, 0, -2y_2, -(y_1 + 3y_3), -(2y_2 + 4y_4), \dots, -[(N-3)y_{N-3} + (N-1)y_{N-1}])^T,$$

$$f_{k3} = (0, 0, y_1, 2y_2, 3y_3, \dots, (k-2)y_{k-2}, \dots, (N-2)y_{N-2})^T,$$

$$f_{k4} = (1, 0, \dots, 0)^T, f_{k5} = (0, 1, 0, \dots, 0)^T; k = \overline{1, N}.$$

Матрица P_λ размера $N \times N$ – нижняя треугольная, ленточная, трех диагональная – описывает линейное преобразование вектора случайной помехи ε в стохастическом уравнении эквивалентного возмущения. Первые две строки матрицы P_λ имеют вид: $P_j = \begin{cases} 1, & \text{при } j=i, \\ 0, & \text{при } j \neq i, \end{cases} \quad i = 1, 2, \quad j = \overline{1, N}$.
Остальные строки матрицы P_λ , $i = \overline{3, N}$, описываются формулами:

$$P_{ij} = \begin{cases} 0, & 1 \leq j < i-2 \text{ и } i < j \leq N, \\ 1 + (i-1)\lambda_1, & j = i, \\ -\lambda_0 [1 + (i-2)\lambda_1], & j = i-1, \\ 1 + (i-3)\lambda_1, & j = i-2. \end{cases} \quad (8)$$

Алгоритм вычисления оценок динамических характеристик систем с турбулентным трением на основе ЛПДМ в форме стохастических разностных уравнений (6) включает следующие основные шаги.

1. *Формирование выборки результатов наблюдений y_k* . На этом этапе решается задача выбора периода дискретизации τ экспериментальной виброграммы и объема выборки N . Очевидно, что параметры обработки экспериментальной виброграммы τ и N связаны соотношением $t_{\text{набл}} = \tau(N-1)$, где $t_{\text{набл}}$ – время наблюдения, за которое происходит затухание амплитуды свободных колебаний на 80 - 90%. Стремление увеличить объем выборки N при заданном времени наблюдения $t_{\text{набл}}$ приводит к уменьшению периода дискретизации τ . Однако, как показали исследования, при малых значениях τ (в относительных к периоду колебаний единицах) резко ухудшается устойчивость вычисления среднеквадратичных оценок коэффициентов ЛПДМ, что приводит к большой погрешности оценок динамических характеристик системы.

2. *Формирование элементов обобщенной регрессионной модели (7)*. На этом этапе по приведенным выше формулам, описывающим элементы матрицы $F = (f_{ij})$, $j = \overline{1, 5}$, и правой части $b = (b_i)$, $i = \overline{1, N}$, вычисляются элементы обобщенной регрессионной модели (7) и формируется переопределенная система линейных алгебраических уравнений относительно коэффициентов λ_j , $j = \overline{1, 5}$.

3. *Вычисление среднеквадратичных оценок $\hat{\lambda}_j$ коэффициентов стохастического разностного уравнения*. Данный этап является определяющим в процессе формирования погрешности оценок динамических характеристик. От того, насколько обоснованно и корректно будет выбран метод среднеквадратичного оценивания, существенно зависит точность вычисления коэффициентов ЛПДМ, а, следовательно, и параметров системы.

4. Вычисление динамических характеристик системы с турбулентным трением. С учетом полученных соотношений (4) по среднеквадратичным оценкам $\hat{\lambda}_j$ коэффициентов ЛПДМ вычисляются динамические характеристики диссипативной системы:

$$\omega = \frac{1}{\tau} \arccos \frac{\hat{\lambda}_0}{2}, \quad \delta_0 = \frac{2\pi\hat{\lambda}_1}{\omega\tau} = \frac{2\pi\hat{\lambda}_1}{\arccos(0,5\hat{\lambda}_0)}. \quad (9)$$

Используемая линейно параметрическая дискретная модель с учетом формул (5) позволяет также оценивать начальную амплитуду и фазу колебаний:

$$\mu = \frac{\hat{\lambda}_0\hat{\lambda}_3 - 2\hat{\lambda}_4(1 + \hat{\lambda}_1)}{\sqrt{4 - \hat{\lambda}_0^2}}, \quad \alpha_0 = \sqrt{\hat{\lambda}_3^2 + \mu^2}, \quad \psi_0 = \arctg \frac{\mu}{\hat{\lambda}_3}. \quad (10)$$

5. Оценка погрешности результатов вычислений. На заключительном этапе алгоритма оценивается погрешность полученных результатов. Построение доверительных интервалов для найденных оценок позволит указать предельные (с заданной доверительной вероятностью) абсолютную и относительную погрешности.

Применение статистических методов обработки экспериментальных данных при вычислении коэффициентов линейно параметрической дискретной модели I_j позволяет существенно повысить точность оценивания. Алгоритм среднеквадратичного оценивания коэффициентов λ_j на основе минимизации функционала $\sum_{k=1}^N \left[r_k - \sum_{j=0}^3 \lambda_j f_{k,j+1} \right]^2 = \sum_{k=1}^N \eta_k^2 \Rightarrow \min$ эффективен только при достаточно малых значениях случайной помехи в результатах наблюдений. В противном случае он приводит к значительному асимптотическому смещению в оценках из-за корреляции между отсчетами случайного эквивалентного возмущения η_k и элементами матрицы f_{kj} , $j = \overline{1,3}$. Этот существенный недостаток можно устранить за счет применения итерационной процедуры последовательного вычисления оценок элементов матрицы P_λ и коэффициентов λ_j .

Так как при $\delta_0 \neq 0$ в соответствии с (4) $\lambda_1 > 0$, то всегда существует обратная матрица P_λ^{-1} . Тогда после преобразования обобщенной регрессионной модели (7) получаем $P_\lambda^{-1}b = P_\lambda^{-1}F\lambda + \varepsilon$. Вычисление среднеквадратичных оценок коэффициентов λ_j на основе минимизации функционала $J_\lambda = \|P_\lambda^{-1}b - P_\lambda^{-1}F\lambda\|^2 = \|\varepsilon\|^2 \Rightarrow \min$ позволяет практически устранить асимптотическое смещение и тем самым повысить точность вычислений динамических характеристик. Итерационная процедура вычисления среднеквадратичных оценок коэффициентов λ_j имеет следующий алгоритм. Вначале вычисляется первое, соответствующее $P_\lambda = E$, где E – единичная матрица, приближение для среднеквадратичных оценок $\hat{\lambda}_j^{(0)}$: $\|b - F\lambda\|^2 = \|\eta\|^2 \Rightarrow \min$. Затем по формулам (8) вычисляется приближение матрицы $P_\lambda \approx P_\lambda^{(1)}(\hat{\lambda}_0^{(0)}, \hat{\lambda}_1^{(0)})$, преобразуется обобщенная регрессионная модель (7), и находятся новые, уточненные оценки $\hat{\lambda}_j^{(1)}$ коэффициентов ЛПДМ. Эти оценки используются для

вычисления второго приближения матрицы $P_{\lambda} \approx P_{\lambda}^{(2)}(\hat{\lambda}_0^{(1)}, \hat{\lambda}_1^{(1)})$ и т.д. Процесс уточнения повторяется до тех пор, пока не будет выполнено условие останова $\|\hat{\lambda}^{(i)} - 2\hat{\lambda}^{(i-1)} + \hat{\lambda}^{(i-2)}\| < 0,01 \|\hat{\lambda}^{(i)}\|$. Найденные на последней итерации оценки $\hat{\lambda}^{(i)}$ принимаются за истинные значения коэффициентов ЛПДМ и по ним далее вычисляются динамические характеристики диссипативной системы. Результаты численно-аналитических исследований показали хорошую сходимость итерационной процедуры в широком диапазоне изменения параметров системы.

Достоверная оценка погрешности результатов вычислений в процессе эксперимента является необходимым элементом при параметрической идентификации диссипативной системы. Процедуру вычисления результирующей погрешности можно разбить на следующие этапы. Вначале находятся оценки средних квадратических отклонений (СКО) $s[\hat{\lambda}_j]$, $j = \overline{0, 4}$, коэффициентов стохастического разностного уравнения. По этим оценкам вычисляются оценки СКО динамических характеристик диссипативной системы $s[\hat{\delta}_0]$ и $s[\hat{\omega}]$, а также, при необходимости, оценки СКО начальных амплитуды и фазы колебаний. Затем с заданной вероятностью вычисляются доверительные границы случайной погрешности для оценок параметров системы. Эти границы могут рассматриваться как предельные абсолютные погрешности $\Delta\delta_0$ и $\Delta\omega$ (с заданной доверительной вероятностью) динамических характеристик: $\delta_0 = \hat{\delta}_0 \pm \Delta\delta_0$, $\omega = \hat{\omega}_0 \pm \Delta\omega$. На заключительном этапе процедуры вычисления результирующей погрешности находятся предельные относительные погрешности Δ_{δ} и Δ_{ω} оценок динамических характеристик диссипативной системы.

Применение итерационной процедуры вычисления коэффициентов ЛПДМ приводит к оценкам $\hat{\lambda} = (F^T \Omega_{\lambda}^{-1} F)^{-1} F^T \Omega_{\lambda}^{-1} b$, где матрица $\Omega_{\lambda} = P_{\lambda} P_{\lambda}^T$. Отсюда можно получить $\hat{\lambda} = \lambda + (F^T \Omega_{\lambda}^{-1} F)^{-1} F^T (P_{\lambda}^{-1})^T \varepsilon$. Тогда математическое ожидание вектора оценок имеет вид $M[\hat{\lambda}] = \lambda + \Delta\hat{\lambda}$, где $\Delta\hat{\lambda} = M[(F^T \Omega_{\lambda}^{-1} F)^{-1} F^T (P_{\lambda}^{-1})^T \varepsilon]$ — смещение, обусловленное корреляцией между случайным возмущением ε и элементами матрицы F . Полагая случайные возмущения ε_k в результатах наблюдений некоррелированными, имеющими одинаковые дисперсии σ_{ε}^2 и нулевые математические ожидания $M[\varepsilon_k] = 0$, ковариационную матрицу оценок коэффициентов ЛПДМ $V[\hat{\lambda}] = M[(\hat{\lambda} - M[\hat{\lambda}])(\hat{\lambda} - M[\hat{\lambda}])^T]$ можно представить в виде $V[\hat{\lambda}] = M[(F^T \Omega_{\lambda}^{-1} F)^{-1}] \sigma_{\varepsilon}^2 - \Delta\hat{\lambda} \Delta\hat{\lambda}^T$. При использовании итерационной процедуры смещение в оценках незначительно, и в первом приближении им можно пренебречь. Кроме того, при малых значениях случайного возмущения ε_k можно принять $M[(F^T \Omega_{\lambda}^{-1} F)^{-1}] \approx (F^T \Omega_{\lambda}^{-1} F)^{-1}$. Тогда, обозначив диагональные элементы матрицы $C = (F^T \Omega_{\lambda}^{-1} F)^{-1}$ через c_j , $i, j = \overline{1, 5}$, оценки дисперсий и ковариаций для коэффициентов $\hat{\lambda}_i$ можно вычислить по формулам $\sigma_{\hat{\lambda}_{i-1}}^2 \approx s^2[\hat{\lambda}_{i-1}] = c_{ii} s^2$, $\text{cov}[\hat{\lambda}_{i-1}, \hat{\lambda}_{j-1}] = c_{ij} s^2$,

где S^2 – оценка дисперсии σ_ε^2 случайного возмущения в результатах наблюдений. Если эта величина априори неизвестна, то ее можно оценить по выражению

$$s = \sqrt{\frac{\sum_{k=1}^N (e_k - \bar{e})^2}{N - 4}}, \quad \bar{e} = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N e_k,$$

где e_k – остатки, которые находятся по формуле $e = P_{\hat{\lambda}}^{-1}b - P_{\hat{\lambda}}^{-1}F\hat{\lambda}$.

Оценки дисперсий результатов вычисления ДХ можно найти по формулам [5]:

$$s^2[\hat{\omega}] = \frac{s^2[\hat{\lambda}_0]}{\tau^2(4 - \hat{\lambda}_0^2)}, \quad s^2[\hat{\delta}_0] = \left(\frac{\partial \delta_0}{\partial \lambda_0}\right)^2 s^2[\hat{\lambda}_0] + 2 \frac{\partial \delta_0}{\partial \lambda_0} \frac{\partial \delta_0}{\partial \lambda_1} \text{cov}[\hat{\lambda}_0, \hat{\lambda}_1] + \left(\frac{\partial \delta_0}{\partial \lambda_1}\right)^2 s^2[\hat{\lambda}_1]$$

где $\frac{\partial \delta_0}{\partial \lambda_0} = \pi \hat{\lambda}_1 (\hat{\omega}^2 \tau^2 \sin \hat{\omega} \tau)^{-1}$, $\frac{\partial \delta_0}{\partial \lambda_1} = 2\pi (\hat{\omega} \tau)^{-1}$. При вычислении дисперсий оценок начальных амплитуды и фазы колебаний можно воспользоваться одной и той же формулой [5]:

$$s^2[f] = \left(\frac{\partial f}{\partial \lambda_0}\right)^2 s^2[\hat{\lambda}_0] + \left(\frac{\partial f}{\partial \lambda_3}\right)^2 s^2[\hat{\lambda}_3] + \left(\frac{\partial f}{\partial \lambda_4}\right)^2 s^2[\hat{\lambda}_4] + 2 \frac{\partial f}{\partial \lambda_0} \frac{\partial f}{\partial \lambda_3} \text{cov}[\hat{\lambda}_0, \hat{\lambda}_3] + 2 \frac{\partial f}{\partial \lambda_0} \frac{\partial f}{\partial \lambda_4} \text{cov}[\hat{\lambda}_0, \hat{\lambda}_4] + 2 \frac{\partial f}{\partial \lambda_3} \frac{\partial f}{\partial \lambda_4} \text{cov}[\hat{\lambda}_3, \hat{\lambda}_4],$$

в которой следует полагать $f \equiv \hat{a}_0$ для начальной амплитуды и $f \equiv \hat{\psi}_0$ для начальной фазы колебаний. При этом соответствующие частные производные имеют вид:

$$\frac{\partial a_0}{\partial \lambda_0} = \frac{\hat{a}_0 \sin \hat{\psi}_0 \sin(\hat{\omega} \tau + \hat{\psi}_0)}{2 \sin^2 \hat{\omega} \tau}, \quad \frac{\partial a_0}{\partial \lambda_3} = \frac{\sin(\hat{\omega} \tau + \hat{\psi}_0)}{\sin \hat{\omega} \tau}, \quad \frac{\partial a_0}{\partial \lambda_4} = -\frac{(1 + \hat{\lambda}_1) \sin \hat{\psi}_0}{\sin \hat{\omega} \tau},$$

$$\frac{\partial \psi_0}{\partial \lambda_0} = \frac{\cos \hat{\psi}_0 \sin(\hat{\omega} \tau + \hat{\psi}_0)}{2 \sin^2 \hat{\omega} \tau}, \quad \frac{\partial \psi_0}{\partial \lambda_3} = \frac{\cos(\hat{\omega} \tau + \hat{\psi}_0)}{\hat{a}_0 \sin \hat{\omega} \tau}, \quad \frac{\partial \psi_0}{\partial \lambda_4} = -\frac{(1 + \hat{\lambda}_1) \cos \hat{\psi}_0}{\hat{a}_0 \sin \hat{\omega} \tau}.$$

Так как при нелинейной зависимости функция распределения погрешности результата измерения неизвестна, то доверительный интервал для случайной погрешности целесообразно строить не на основе распределения Стюдента, а с использованием неравенства Чебышева [5]. Считая распределение погрешности результата вычислений симметричным и одномодальным, неравенство Чебышева, например, при оценке доверительного интервала для декремента колебаний, можно представить в виде: $P\{|\Delta \delta_0| \geq t \sigma[\hat{\delta}_0]\} \leq \frac{4}{9t^2}$ [5]. В этом случае граница доверительного интервала (оценка предельной абсолютной погрешности) вычисляется по формуле $\Delta \delta_0 = t \sigma[\hat{\delta}_0]$, где величина t находится из формулы доверительной вероятности $p = 1 - \frac{4}{9t^2}$. Так при $p = 0,95$ величина $t = 2,98$

. Аналогично находятся оценки предельных абсолютных погрешностей остальных параметров нелинейной функции (1), описывающей свободные колебания системы с турбулентным трением. На заключительном этапе процедуры оценивания погрешности вычисления параметров диссипативной системы находятся предельные относительные погрешности, например $\Delta_\delta = \frac{\Delta\delta_0}{|\hat{\delta}_0|}$, и делается вывод о соответствии точности оценок ДХ системы заданным требованиям.

Следует отметить, что достоверная оценка амплитуды колебаний a_0 , соответствующей декременту колебаний δ_0 , позволяет существенно расширить функциональные возможности предлагаемого метода определения параметров диссипативных систем. Так как для систем с турбулентным трением зависимость декремента колебаний от их амплитуды описывается формулой $\delta(a) = \frac{8b}{3m}a$ [6], где b – коэффициент в уравнении диссипативной силы, m – инерционный коэффициент, то величина δ_0 не может быть использована для идентификации и мониторинга систем с турбулентным трением в научно-технических или промышленных экспериментах. Однако, декремент, приведенный к амплитуде колебаний, $\frac{\delta(a)}{a} = \frac{8b}{3m}$ является инвариантной характеристикой сопротивления, отражающей только внутренние свойства системы с турбулентным трением, и поэтому может служить диагностическим признаком ее технического состояния.

Проведенные численно-аналитические исследования подтверждают эффективность разработанного метода параметрической идентификации систем с турбулентным трением, а также достоверность полученных формул оценки погрешности вычисления динамических характеристик системы.

На рис. 1 представлены зависимости относительной погрешности вычисления декремента колебаний от величины случайной помехи в результатах измерений мгновенных значений свободных колебаний системы с турбулентным трением.

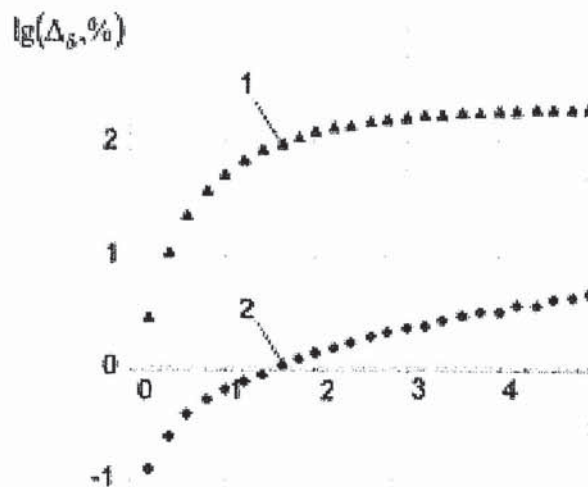


Рис. 1 Зависимости погрешности вычисления декремента колебаний

(в логарифмическом масштабе) от величины случайной помехи в результатах наблюдений

Для описания погрешности использовался второй статистический момент оценки декремента колебаний относительно его истинного значения, который равен сумме дисперсии оценки и квадрата ее смещения: $\Delta_{\delta} = \frac{\sqrt{M[(\hat{\delta}_0 - \delta_0)^2]}}{|\delta_0|}$, где $M[(\hat{\delta}_0 - \delta_0)^2] = D[\hat{\delta}_0] + (M[\hat{\delta}_0] - \delta_0)^2$.

Точки 1 соответствуют среднеквадратичным оценкам коэффициентов ЛПДМ без предварительного преобразования обобщенной регрессионной модели, а точки 2 – вычислениям с использованием итерационной процедуры среднеквадратичного оценивания. Очевидно, что применение итерационной процедуры к преобразованной обобщенной регрессионной модели за счет устранения смещения в оценках позволяет в сотни раз увеличить точность результатов вычисления.

На рис. 2 представлены результаты численно аналитических исследований достоверности и корректности предложенной методике оценивания погрешности результатов вычисления ДХ по экспериментальным данным на основе разработанного метода параметрической идентификации.

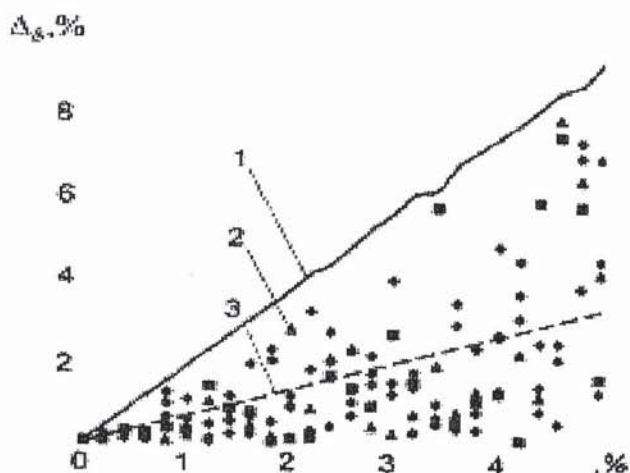


Рис. 2 Зависимости оценки предельной относительной погрешности (кривая 1) и относительных погрешностей (точки 2) вычисления декремента колебаний

Кривая 1 описывает зависимость предельной относительной погрешности вычисления декремента колебаний от величины случайной помехи. Точки 2 соответствуют относительной погрешности результатов вычислений при компьютерном моделировании. Для каждого значения случайной помехи $\varepsilon, \%$ из промежутка от 0 % до 5 % на рис. 2 представлено по 5 точек, соответствующих результатам численно-аналитических исследований. Очевидно, что все полученные точки укладываются в построенные границы для предельной относительной погрешности. Прямая 3 на рис. 2 отражает усредненную по 500 опытов зависимость результатов вычислений относительной погрешности от величины случайной помехи.

Таким образом, проведенные численно-аналитические исследования подтвердили высокую

эффективность метода определения динамических характеристик систем с турбулентным трением, в основе которого лежит итерационная процедура среднеквадратичного оценивания коэффициентов стохастического разностного уравнения, и достоверность полученных формул для оценки погрешности результатов вычислений по экспериментальным данным.

Выводы

1. Разработан эффективный метод определения динамических характеристик систем с турбулентным трением, существенно повышающий точность вычислений по сравнению с известными методами.
2. В основе нового метода лежит итерационная процедура среднеквадратичного оценивания коэффициентов линейно параметрической дискретной модели в форме стохастических разностных уравнений, описывающих результаты измерений свободных колебаний диссипативной системы.
3. Разработана методика и описаны формулы, позволяющие достоверно оценить погрешность результатов вычисления динамических характеристик на основе статистической обработки экспериментальных данных.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Вибрации в технике: Справочник. В 6 т. / Ред. совет: В.Н. Челомей (пред.). Т. 2. Колебания нелинейных механических систем / Под ред. И.И. Блехмана. – М.: Машиностроение, 1979. – 351 с.
2. Писаренко Г.С., Яковлев А.П., Матвеев В.В. Вибропоглощающие свойства конструкционных материалов. Справочник. – Киев: Наук. думка, 1971. – 376 с.
3. Зотеев В.Е. Разработка и исследование линейных дискретных моделей колебаний диссипативных систем // Вестник СамГТУ. Серия: физико – математические науки. – Вып. 7. – 1999. – С. 170–177
4. Радченко В.П., Зотеев В.Е. Определение динамических характеристик механической системы на основе стохастических разностных уравнений колебаний // Известия вузов. Машиностроение. 2007. – №1. – С. 3–10.
5. Грановский В.А., Сирая Т.Н. Методы обработки экспериментальных данных при измерениях. – Л.: Энергоатомиздат. Ленингр. отд-ние, 1990. – 288 с.
6. Павлов А.Г. Основы прикладной теории колебаний и удара. – Л.: Машиностроение, 1976. – 320 с.