№ 5 2008

539.3

О ПРЕДЕЛЬНЫХ СОСТОЯНИЯХ УПРУГО ПОДКРЕПЛЕННОЙ ПЛАСТИНЫ ПРИ ПРОДОЛЬНО-ПОПЕРЕЧНОМ ИЗГИБЕ

Д-р физ-мат.наук, проф. А.И. ШАШКИН, канд. физ-мат.наук, доц. Н.В.МИНАЕВА

Найдена граница предельных состояний упруго подкрепленной пластины, находящейся под воздействием распределенных продольной и поперечной нагрузок.

Характеристики рассматриваемого объекта и внешних воздействий на него обозначим через λ и p, а характеристику, описывающую поведение объекта, обозначим через u.

В процессе эксплуатации характеристики объекта (и физические, и геометрические) изменяются, например, происходит процесс старения. Очевидно также, что для нормального функционирования рассматриваемого объекта зачастую необходимо, чтобы незначительные изменения его характеристик приводили к незначительным изменениям в поведении рассматриваемого объекта. Это означает, что непрерывность зависимости u от λ- необходимое условие нормальной работы изучаемого объекта.

Граница области непрерывности зависимости $u(\lambda)$ и будет верхней границей эксплуатации объекта, т.е. верхней границей его предельных состояний. Верхней она будет потому, что причиной нарушения нормального функционирования объекта могут быть и другие явления, например разрушение.

Нарушение непрерывности зависимости характеристики, описывающей поведение объекта, от характеристики его свойств часто называют «катастрофой». В частности, если учитываемое изменение характеристики объекта происходит из-за его старения, то – «техногенной катастрофой». Следует отметить, что причиной нарушения нормального функционирования рассматриваемого объекта может быть, например, старение одного или нескольких его элементов.

Под требованием непрерывности $u(\lambda)$ при $\lambda = \lambda_0$ в дальнейшем будем понимать существование окрестности у точки $\lambda = \lambda_0$, в которой $u(\lambda)$ однозначна и непрерывна.

Рассмотрим поведение упругой, шарнирно закрепленной по всем краям прямоугольной пластины, нагруженной поперечной нагрузкой интенсивности $p_1(x, y)$, а на краях при $x = 0$ и $x = a$ – продольными усилиями интенсивности p_2. Пластина находится на упругой постели с коэффициентом жесткости λ_1.

Функция $u(x,y)$, описывающая продольно-поперечный изгиб пластины, в рассматриваемой задаче по линейной теории является решением следующего уравнения [1]:

$$D\nabla^4 u + hp_2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \lambda_1 u = 0, \tag{1}$$

где $\nabla^4 u = \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 u}{\partial y^4}$; h – толщина пластины, $D = D_0 \lambda_2(x,y)$ – цилиндрическая жесткость; $\lambda_2(x,y)$ – функция, описывающая изменение цилиндрической жесткости пластины.

Граничные условия имеют вид

$$u(0,y) = u(a,y) = u(x,0) = u(x,b) = 0$$

$$\left.\frac{\partial^2 u}{\partial^2 x}\right|_{x=0} = \left.\frac{\partial^2 u}{\partial^2 x}\right|_{x=a} = \left.\frac{\partial^2 u}{\partial^2 y}\right|_{y=0} = \left.\frac{\partial^2 u}{\partial^2 y}\right|_{y=b} = 0 \tag{2}$$

Пусть при $\lambda_1 = \lambda_{10}(x,y)$, $\lambda_2 = \lambda_{20}(x,y)$ задача (1),(2) допускает решение $u = u_0(x,y)$. Тогда состояние пластины, соответствующее этому решению ,не будет предельным, если решение задачи (1),(2) непрерывно зависит от $\lambda_1(x,y)$, $\lambda_2(x,y)$ при $\lambda_1 = \lambda_{10}(x,y)$, $\lambda_2 = \lambda_{20}(x,y)$.

Для проверки этой непрерывности, как следует из теоремы о неявных функциях [2], надо составить следующую задачу относительно вспомогательной функции $\zeta(x,y)$:

$$D_0\lambda_{20}\nabla^4(u_0+\zeta) + hp_2\frac{\partial^2(u_0+\zeta)}{\partial x^2} + \lambda_{10}(u_0+\zeta) = 0, \tag{3}$$

$$u_0(0,y)+\zeta(0,y) = u_0(a,y)+\zeta(a,y) = u_0(x,0)+\zeta(x,0) = u_0(x,b)+\zeta(x,b) = 0$$

$$\left.\frac{\partial^2(u_0+\zeta)}{\partial^2 x}\right|_{x=0} = \left.\frac{\partial^2(u_0+\zeta)}{\partial^2 x}\right|_{x=a} = \left.\frac{\partial^2(u_0+\zeta)}{\partial^2 y}\right|_{y=0} = \left.\frac{\partial^2(u_0+\zeta)}{\partial^2 y}\right|_{y=b} = 0 \tag{4}$$

Поскольку $u = u_0(x,y)$ является решением задачи (1),(2) при $\lambda_1 = \lambda_{10}(x,y)$, $\lambda_2 = \lambda_{20}(x,y)$, то краевая задача относительно функции $\zeta(x,y)$ примет следующий вид:

$$D_0\lambda_{20}\nabla^4\zeta + hp_2\frac{\partial^2\zeta}{\partial x^2} + \lambda_{10}\zeta = 0\ , \tag{5}$$

$$\zeta(0,y) = \zeta(a,y) = \zeta(x,0) = \zeta(x,b) = 0$$

$$\left.\frac{\partial^2\zeta}{\partial^2 x}\right|_{x=0} = \left.\frac{\partial^2\zeta}{\partial^2 x}\right|_{x=a} = \left.\frac{\partial^2\zeta}{\partial^2 y}\right|_{y=0} = \left.\frac{\partial^2\zeta}{\partial^2 y}\right|_{y=b} = 0 \tag{6}$$

Итак, исследование непрерывности зависимости решения задачи (1),(2) от λ_1, λ_2 свелось к нахождению условия, при котором задача (5),(6) имеет нетривиальное решение.

При равномерном по пластине изменении цилиндрической жесткости ее и коэффициента упругого основания $\lambda_1(x,y) \equiv \text{const}$ и $\lambda_2(x,y) \equiv \text{const}$. Тогда $\lambda_{10}(x,y) \equiv \text{const}$ и $\lambda_{20}(x,y) \equiv \text{const}$.

Удовлетворяя граничным условиям (6), решение задачи (5),(6) ищем в виде

$$\zeta = d \sin\frac{m\pi x}{a} \sin\frac{n\pi y}{b} \quad . \tag{7}$$

В результате подстановки (7) в (5) получаем следующее условие нетривиальности решения задачи (5),(6):

$$\lambda_2(m^4k^4 + 2m^2n^2k^2 + n^4) - m^2k^2\alpha + \beta = 0 \ . \tag{8}$$

где $\alpha = \dfrac{hb^2}{\pi^2 D_0} p_2$, $\beta = \dfrac{b^4}{\pi^4 D_0}\lambda_1$, $k = \dfrac{b}{a}$.

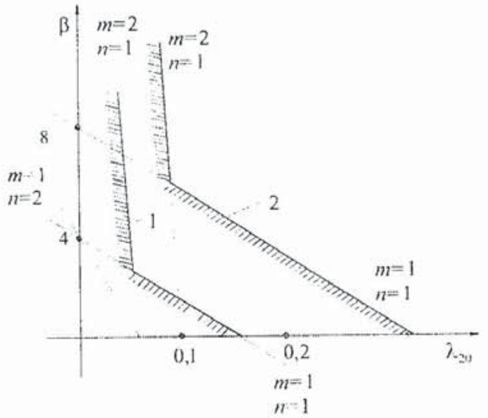

Рис. 1

На рис. 1 приведены графики, соответствующие соотношению (8) при $k = 2$ и «1» – $\alpha = 1$; «2» – $\alpha = 2$.

Уменьшению цилиндрической жесткости, т.е. старению, соответствуют графики этого рисунка при $\lambda_{20} \le 1$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1 Вольмир А.С. Устойчивость упругих систем.- М.: Физматгиз, 1963.- 880 с.

2 Минаева Н.В. Адекватность математических моделей деформируемых тел.-М.: Научная книга, 2006. 235 с.