

РАСЧЕТ И КОНСТРУИРОВАНИЕ МАШИН

539.311

ВЛИЯНИЕ УПРУГОГО ЗВЕНА НА ЧАСТОТЫ СОБСТВЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ ВЕРТИКАЛЬНО РАСПОЛОЖЕННОГО ОТРЕЗКА ТЯЖЕЛОЙ НИТИ

Канд. техн. наук, доц. П. Г. Русанов

Методом твердых тел численно исследовано влияние ориентации конструкции в поле силы тяжести, силы предварительного натяжения и длины упругого звена на спектр низших собственных частот.

Данное исследование дополняет [1, 2], посвященные анализу собственных колебаний нити с помощью дискретных расчетных моделей сплошной среды, сформированных на основе метода твердых тел (МТТ), с сохранением основных исходных предпосылок и обозначений. В задачах динамики гибких стержней МТТ имеет неоспоримые преимущества перед МКЭ в технологии формирования математической модели и учета физических условий, а также в точности итоговых результатов.

Цель исследования – оценка значений низших частот плоских собственных колебаний однородной, нерастяжимой, гибкой нити с несвободными концами (т. O , т. B) в окрестности вертикального положения равновесия для двух вариантов ее предварительного натяжения посредством безмассовой, линейно-упругой, гибкой пружины AB (рис.1,а). Неподвижные опорные точки O , A ($OA = D$) расположены на вертикальной оси Oy инерциальной системы координат $Oxyz$. M , L – масса и длина нити; c , λ – коэффициент жесткости пружины при растяжении и ее длина в недеформированном состоянии; $\Delta = D - L - \lambda > 0$ – статическое удлинение пружины; \vec{g} – вектор ускорения однородного поля силы тяжести; $g_x = g_z = 0$, $g_y = -g$.

От традиционной задачи анализа колебаний струны данную задачу отличает учет влияния однородного поля силы тяжести. Для ее решения воспользуемся плоской дискретной схемой [1], состоящей из n абсолютно твердых, одинаковых элементов (прямолинейных стержней),

длиной $l = \frac{L}{n}$, массой $m = \frac{M}{n}$ каждый, последовательно соединенных между собой, с опорой и с пружиной идеальными шарнирами с параллельными осями и пронумерованных от 1 до

$n+1$, начиная от т. O (рис. 1б).

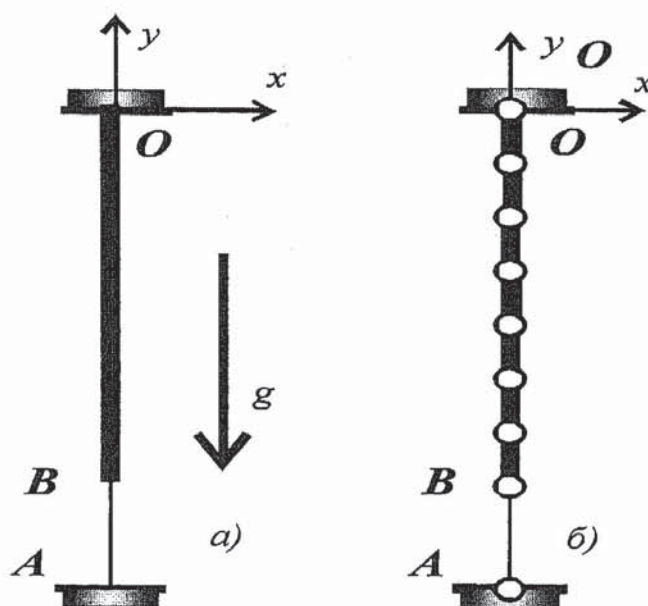


Рис. 1

Для рассматриваемых вариантов расположения опорных точек O , A отпадает необходимость расчета статического положения дискретной системы тел. Поэтому исследование ее собственных частот колебаний в вертикальной плоскости Oxy сводим к формированию $A = (a_{ij})$, $C = (c_{ij})$ - матриц инерции и жесткости линейной системы ДУ возмущенного движения 1-го приближения

$$A \ddot{\vec{q}} + C \vec{q} = 0, \quad (1)$$

где \vec{q} - вектор обобщенных координат q_i , $Dim A = Dim C = n \times n$, $Dim \vec{q} = n$, $a_{ij} = \frac{\partial^2 T}{\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_j}$,
 $c_{ij} = \frac{\partial^2 \Pi}{\partial q_i \partial q_j}$, $T = \sum_{k=1}^n T_k = T(\vec{q}, \dot{\vec{q}}) \Big|_{\vec{q}=0} = 0.5 \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j$,
 $I = \sum_{k=1}^n I_k = I(\vec{q}) = 0.5 \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n c_{ij} q_i q_j$ - кинетическая и потенциальная энергии n тел при малых колебаниях; n - число степеней свободы.

Положительные корни частотного уравнения $\det(-p^2 A + C) = 0$ доставляют значения первым n собственным, размерным частотам p_k .

В качестве обобщенных координат применим x_k – координаты подвижных шарнирных узлов ($k = \overline{2, n+1}$). Элементы матрицы инерции a_{ij} формируем на основании явного выражения для квадратичной функции T в равновесном положении дискретной схемы, когда $x_k=0$, параллельны скорости $v_{k,x} = \dot{x}_k \neq 0$, $v_{1,x} = 0$, кинетическая энергия каждого элемента имеет простой вид: $T_{k-1} = m(v_{k-1,x}^2 + v_{k-1,x}v_{k,x} + v_{k,x}^2)/6$; и матрица A имеет ленточную структуру: $a_{ii}=2m/3$, $a_{ij}=m/6$, $j=i\pm 1$, $a_{ij}=a_{ji}=0$, $j > i+1$.

Потенциальная энергия Π дискретной системы тел в положении отличном от отвесного положения равновесия обусловлена силами тяжести и упругой силой пружины: Поэтому ее изменение по сравнению с состоянием равновесия равно сумме изменений энергий, вызванных изменением положений центров масс тел в поле силы тяжести и дополнительным удлинением пружины $\Delta \ddot{I} = \Delta \ddot{I}_g + \Delta \ddot{I}_c$. $\Delta \ddot{I}_g = e \frac{mg}{2l} \sum_{i=1}^n (n-i+0.5)x_i^2$; где e -признак расположения пружины: если пружина находится ниже нити, то $e=+1$, иначе $e=-1$. Одновременное изменение потенциальной энергии пружины $\Delta \ddot{I}_c = 0.5c[(\Delta + \delta)^2 - \Delta^2]$,

где $\delta = \sqrt{(\lambda + \Delta + \eta)^2 + x_n^2} - (\lambda + \Delta)$ - дополнительное удлинение пружины, η - величина вертикального смещения точки B из положения равновесия. При малых x_k , $|x_k|/l = \varepsilon \ll 1$, $\eta = \frac{1}{2l} \sum_{k=1}^n (x_k - x_{k-1})^2$. Поэтому с точностью до величин второго порядка малости $O(\varepsilon^2)$, $\Delta \ddot{I}_c = N[\eta + 0.5x_n^2 / (\lambda + \Delta)]$, где $N=c\Delta$ - сила натяжения пружины в состоянии покоя нити.

Получив выражение для $\Delta \ddot{I}$ в виде квадратичной формы $\Delta \ddot{I}(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0.5(\bar{x}, C\bar{x})$, приходим к выводу, что C - матрица жесткости имеет ленточную структуру, аналогичную A , с ненулевыми элементами: $c_{nn} = e \frac{mg}{2l} + N(\frac{1}{l} + \frac{1}{\lambda + \Delta})$, $c_{ii} = 2e \frac{mg}{l}(n-i) + 2\frac{N}{l}$,
 $c_{ij} = c_{ji} = e \frac{mg}{2l}(i+j-2n) - \frac{N}{l}$, если $i < n$, $j=i+1$.

Для устойчивости вертикального положения равновесия дискретной системы тел с верхним расположением пружины ($e=-1$) ее матрица жесткости должна быть положительно определенной. Для чего, согласно критерию Сильвестра (КС), необходимо, чтобы все ее диагональные элементы были положительны: $c_{ii} > 0$. Наименьшим значением обладает элемент c_{11} . Откуда получаем требование к величине силы N , необходимое для устойчивости: $N > Mg(1-1/n)$.

При $n \rightarrow \infty$ оно имеет вид: $N > Mg$. При этом условии также выполняются и остальные независимые требования КС.

Если соотнести силу N к Mg - силе тяжести нити, а $\lambda + \Delta$ - длину пружины в статическом состоянии - к длине нити L : $N = \mu Mg = \mu nmg$, $\lambda + \Delta = \xi L = \xi nl$, то все элементы матриц A и C будут

содержать общий множитель m . Откуда следует, что при заданных величинах L, g, μ, ξ, n, e значения низших частот собственных колебаний дискретной системы не зависят от M - массы нити. Поэтому далее вместо размерных частот p_k рассчитываем безразмерные $s_k = p_k \sqrt{L/g}$ для фиксированных μ, ξ .

Аналитическое формирование матриц A, C и расчеты частот колебаний, согласно выше представленной методике, выполнены с помощью программы *Maple*. Исследованиями [1, 2] установлено, что уже при $n > 5$ точность результатов МТТ для нити приемлема для инженерной практики. В связи с этим вопросы анализа влияния числа элементов на сходимость результатов ниже не обсуждаются.

Влияние μ, ξ на первые три безразмерных собственных частоты s_k ($k=1, 2, 3$) дискретной схемы нити с $n=20$ отражено в таблице. Согласно представленным результатам, увеличение длины пружины в статическом состоянии при фиксированном значении ее силы натяжения N приводит к снижению значений частот. Кроме того частоты собственных колебаний у схемы с нижней «маятниковостью» нити ($e = +1$, центр масс нити расположен ниже точки O) имеют более высокие значения, чем у схемы с верхней маятниковостью ($e = -1$), что качественно соответствует законам механики. Причем указанное различие частот снижается с ростом силы статического натяжения пружины N . При $\mu=1$ ($N=Mg$) частоты для разных вариантов расположения пружины отличаются более чем в 2 раза.

Таблица

	$\xi=0.1$	$\xi=0.5$	$\xi=1.0$
μ	Пружина расположена снизу, $e = +1$		
1	3.4016, 6.8931, 10.502	2.7212, 6.1270, 9.8202	2.4541, 5.9501, 9.6994
4	6.0408, 12.199, 18.539	4.8263, 10.785, 17.252	4.2994, 10.433, 17.012
10	9.2643, 18.697, 28.401	7.4031, 16.511, 26.398	6.5750, 15.956, 26.018
20	12.960, 26.150, 39.715	10.357, 23.084, 36.899	9.1889, 22.300, 36.362
μ	Пружина расположена сверху, $e = -1$		
1	1.5352, 3.2240, 4.9606	1.2678, 2.8262, 4.5309	1.0792, 2.6673, 4.4138
4	5.3729, 10.833, 16.435	4.3003, 9.5403, 15.228	3.7882, 9.1924, 14.989
10	8.8452, 17.840, 27.079	7.0728, 15.729, 25.126	6.2538, 15.177, 24.747
20	12.664, 25.544, 38.781	10.124, 22.532, 36.000	8.9620, 21.749, 35.464

С ростом силы N снижается влияние сил тяжести на элементы матрицы жесткости. Согласно теории колебаний струны, не учитывающей влияния сил тяжести, значения частот натя-

нудой нити должны быть пропорциональны порядковому номеру тона и \sqrt{N} : $p_k = \pi k \sqrt{N / ML} = \pi k \sqrt{\mu g / L}$, то есть безразмерные частоты $s_k = p_k \sqrt{L / g} = \pi k \sqrt{\mu}$.

При больших μ ($n=20$, $e=+1$, $\mu=20$, $\xi=0.1$) схожим свойством обладает список расчетных значений 20-ти низших частот s_k рассматриваемой дискретной схемы нити в поле силы тяжести: 12.96, 26.15, 39.72, 53.72, 68.20, 83.21, 98.79, 115.0, 131.9, 149.6, 168.0, 187.1, 206.9, 226.9, 246.9, 266.2, 283.7, 298.5, 309.4, 314.3.

Выполненное исследование позволяет сделать заключение об эффективности применения дискретных моделей МТТ для численного анализа влияния ориентации конструкции в поле силы тяжести, величины силы предварительного натяжения и длины пружины в статическом состоянии на спектр низших безразмерных частот собственных колебаний вертикально расположенного отрезка нити. Предложенная методика расчета и полученные результаты могут быть применены для оценки погрешности показаний конструкции струнного акселерометра.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Русанов П.Г. Расчет собственных колебаний в вертикальной плоскости отрезка тяжелой нити методом физической дискретизации. //Известия вузов. Машиностроение. – 2008. –№1. –С. 3 - 9.
2. Русанов П.Г. Расчет собственных колебаний отрезка тяжелой нити с закрепленными концами «из вертикальной плоскости». //Известия вузов. Машиностроение. –2008. –№2. –С. 3 - 9.

539.3

НЕЛИНЕЙНАЯ ДИНАМИКА БАЛОК ЭЙЛЕРА-БЕРНУЛЛИ И ТИПА ТИМОШЕНКО

Д-р.техн.наук, проф. В.А Крысько, канд.техн.наук, доц. М.В Жигалов, асп. О. А.Салтыкова

Представленная работа посвящена исследованию нелинейных колебания балки Эйлера-Бернулли и балки типа Тимошенко. Исследование проведено посредством двух методов: конечных разностей с аппроксимацией $O(\epsilon^2)$ и конечных элементов в форме Бубнова-Галеркина, что обеспечивает достоверность получаемых результатов. Выявлены сценарии перехода системы от гармонических колебаний к хаотическим.

Анализ литературы по тематике работы показывает, что в настоящее время значительное внимание уделяется относительно новому явлению в нелинейной динамике – хаотическим