

нудой нити должны быть пропорциональны порядковому номеру тона и \sqrt{N} : $p_k = \pi k \sqrt{N / ML} = \pi k \sqrt{\mu g / L}$, то есть безразмерные частоты $s_k = p_k \sqrt{L / g} = \pi k \sqrt{\mu}$.

При больших μ ($n=20$, $e=+1$, $\mu=20$, $\xi=0.1$) схожим свойством обладает список расчетных значений 20-ти низших частот s_k рассматриваемой дискретной схемы нити в поле силы тяжести: 12.96, 26.15, 39.72, 53.72, 68.20, 83.21, 98.79, 115.0, 131.9, 149.6, 168.0, 187.1, 206.9, 226.9, 246.9, 266.2, 283.7, 298.5, 309.4, 314.3.

Выполненное исследование позволяет сделать заключение об эффективности применения дискретных моделей МТТ для численного анализа влияния ориентации конструкции в поле силы тяжести, величины силы предварительного натяжения и длины пружины в статическом состоянии на спектр низших безразмерных частот собственных колебаний вертикально расположенного отрезка нити. Предложенная методика расчета и полученные результаты могут быть применены для оценки погрешности показаний конструкции струнного акселерометра.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Русанов П.Г. Расчет собственных колебаний в вертикальной плоскости отрезка тяжелой нити методом физической дискретизации. //Известия вузов. Машиностроение. – 2008. –№1. –С. 3 - 9.
2. Русанов П.Г. Расчет собственных колебаний отрезка тяжелой нити с закрепленными концами «из вертикальной плоскости». //Известия вузов. Машиностроение. –2008. –№2. –С. 3 - 9.

539.3

НЕЛИНЕЙНАЯ ДИНАМИКА БАЛОК ЭЙЛЕРА-БЕРНУЛЛИ И ТИПА ТИМОШЕНКО

Д-р.техн.наук, проф. В.А Крысько, канд.техн.наук, доц. М.В Жигалов, асп. О. А.Салтыкова

Представленная работа посвящена исследованию нелинейных колебания балки Эйлера-Бернулли и балки типа Тимошенко. Исследование проведено посредством двух методов: конечных разностей с аппроксимацией $O(\epsilon^2)$ и конечных элементов в форме Бубнова-Галеркина, что обеспечивает достоверность получаемых результатов. Выявлены сценарии перехода системы от гармонических колебаний к хаотическим.

Анализ литературы по тематике работы показывает, что в настоящее время значительное внимание уделяется относительно новому явлению в нелинейной динамике – хаотическим

колебаниям. Хаотические колебания – это возникновение неупорядоченных движений в совершенно детерминированных системах. Много внимания уделяется хаотическим колебаниям таких сложных детерминированных систем, как пластины, конические, сферические и цилиндрические оболочки [1-6]. Среди работ посвященных исследованиям хаотических колебаний балок, можно отметить статью [7] в которой исследуется динамическое поведение нелинейно-упругой балки при большом отклонении и проводится исследование хаотического движения. А также работу [8] где представлены результаты исследования глобальных бифуркаций и хаотической динамики в нелинейных неплоских колебаниях консольной балки под действием осевых гармонических возбуждений и поперечных возбуждений на свободном конце балки.

Однако, несмотря на это стохастические колебания диссипативных, геометрически нелинейных балок Эйлера-Бернулли и балки типа Тимошенко мало изучены. Данная работа ставит своей целью частично заполнить указанный пробел.

1. Нелинейные колебания балки Эйлера-Бернулли

Введем систему координат XOZ (рис.1). Пусть в области

$$\Omega = \left\{ x \in [0, a]; -h \leq z \leq h; -\frac{b}{2} \leq y \leq \frac{b}{2} \right\} \text{ рас-}$$

сматривается тонкая, упругая балка, деформация срединной поверхности которой $\varepsilon_x = u'_x + 1/2(w'_x)^2$, где $w(x, t)$ - прогиб балки, $u(x, t)$ - перемещение срединной линии вдоль оси Ox . Предполагается, что по гипотезе Эйлера – Бернулли нормаль к срединной линии остается перпендикулярной к ней в процессе де-

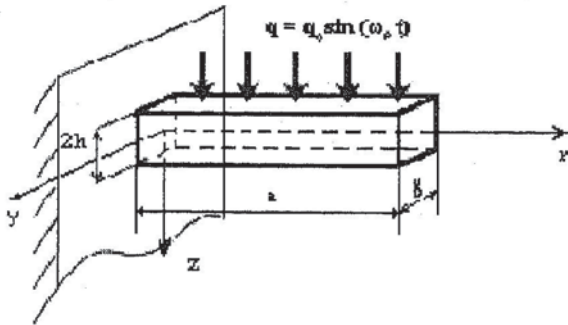


Рис. 1

формирования балки: $\varepsilon_{xx} = \varepsilon_x - zw''_{xx}$, где ε_x - деформация в срединной линии, $N_x = \int_{-h}^h \sigma_{xx} dz$

- продольное усилие, $M_x = \int_{-h}^h \sigma_{xx} z dz = -\frac{(2h)^3}{12} Ew''_{xx}$ - момент [9].

Система дифференциальных уравнений в перемещениях, описывающих движения балки с учетом диссипации энергии, при безразмерных параметрах

$$\bar{w} = \frac{w}{(2h)}, \quad \bar{u} = \frac{ua}{(2h)^2}, \quad \bar{x} = \frac{x}{a}, \quad \lambda = \frac{a}{(2h)}, \quad \bar{q} = q \frac{a^4}{(2h)^4 E},$$

$$\bar{t} = \frac{t}{\tau}, \quad \tau = \frac{a}{c}, \quad c = \sqrt{\frac{Eg}{\gamma}}, \quad \bar{\varepsilon}_i = \varepsilon_i \frac{a}{c}, \quad i=1,2 \quad (1)$$

принимает вид:

$$\begin{cases} u''_{xx} + L_3(w, w) - \ddot{u} - \varepsilon_2 \dot{u} = 0, \\ \left\{ \frac{1}{\lambda^2} \left[L_2(w, w) + L_1(u, w) - \frac{1}{12} w''''_{xxxx} \right] - \ddot{w} - \varepsilon_1 \dot{w} + q = 0, \right. \end{cases} \quad (2)$$

здесь черточки над безразмерными параметрами для простоты опущены. Введены следующие обозначения: $L_1(u, w) = u''_{xx} w'_x + u'_x w''_{xx}$, $L_2(w, w) = \frac{3}{2} w''_{xx} (w'_x)^2$, $L_3(w, w) = w''_{xx} w'_x$, $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ - коэффициенты диссипации; $q = q(x, t)$ - поперечная нагрузка, E - модуль Юнга, ρ, γ - плотность и объемный вес материала балки, g - ускорение свободного падения.

К уравнениям (2) присоединим уравнения на границе:

«защемление – защемление»:

$$w(0, t) = w(a, t) = u(0, t) = u(a, t) = w'_x(0, t) = w'_x(a, t) = 0. \quad (3)$$

«шарнир – шарнир»

$$w(0, t) = w(a, t) = u(0, t) = u(a, t) = w''_{xx}(0, t) = w''_{xx}(a, t) = 0 \quad (4)$$

«защемление – шарнир»

$$w(0, t) = u(0, t) = w(a, t) = u(a, t) = w'_x(0, t) = w''_{xx}(a, t) = 0. \quad (5)$$

«защемление – свободный край»

$$w(0, t) = w'_x(0, t) = u(0, t) = 0; \quad M_x(a, t) = N_x(a, t) = Q_x(a, t) = 0 \quad (6)$$

К системе уравнений (2) – (6) присоединим уравнения для начальных условий:

$$w(x, t)|_{t=0} = \dot{w}(x, t)|_{t=0} = u(x, t)|_{t=0} = \dot{u}(x, t)|_{t=0} = 0. \quad (7)$$

1.1 Решение нелинейных дифференциальных уравнений методом конечных разностей

Бесконечномерная задача (2) – (7) с помощью метода конечных разностей, с аппроксимацией $O(c^2)$ сводится к конечномерной – системе обыкновенных дифференциальных уравнений. В каждом узле сетки получим следующую систему обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} L_{1,c}(w_i, u_i) &= \varepsilon_1 (\dot{w})_i + (\dot{u})_i \\ L_{2,c}(w_i, u_i) &= \varepsilon_2 (\dot{u})_i + (\ddot{u})_i \\ (i &= 0, \dots, n) \end{aligned} \quad (8)$$

где, n - число разбиений по пространственной координате, c - шаг по пространственной координате.

При $i = 1, i = n - 1$ в уравнениях (8) приходится учитывать значения W в законтурных точках, которые, в этих точках, определяется граничными условиями.

Для граничных условий (3): $w_{-i} = w_i$.

Для граничных условий (4): $w_{-i} = -w_i$.

К системе уравнений (8) присоединим уравнения на границе:

для граничных условий (3)-(5):

$$w_0 = 0; w_n = 0; u_0 = 0; u_n = 0; \quad (9)$$

для граничных условий (6):

$$w_0 = 0; u_0 = 0; M_x = 0; N_x = 0; Q_x = 0. \quad (10)$$

Начальные условия для всех граничных в разностном виде перепишем:

$$\begin{aligned} w(x_i)|_{t=0} = 0; u(x_i)|_{t=0} = 0; \dot{w}(x_i)|_{t=0} = 0; \dot{u}(x_i)|_{t=0} = 0. \\ (i = 0, \dots, n) \end{aligned} \quad (11)$$

Полученную систему (8), с граничными и начальными условиями (9) и (11) решаем методом Рунге-Кутты четвертого порядка точности. Обоснование выбора данного метода с решения подробно рассмотрено в [10].

1.2 Решение нелинейных дифференциальных уравнений методом конечных элементов

Наряду с методом конечных разностей большую популярность при расчете конструкций получили метод конечных элементов (МКЭ) и метод граничных элементов (МГЭ). Основная идея последних состоит в том, что любую непрерывную величину можно аппроксимировать дискретной моделью, которая строится на множестве кусочно-непрерывных функций, определенных на конечном числе подобластей – МКЭ или границы – МГЭ.

Методы построения дискретных моделей МКЭ делятся на две большие группы. Первая использует минимизацию различных энергетических функционалов, вторая группа основана на вариантах метода взвешенных невязок, одним из которых является метод Бубнова-Галеркина.

Рассмотрим его основные положения на примере некоторой одномерной задачи, описываемой дифференциальным уравнением:

$$L(u) - f = 0 \quad (12)$$

на отрезке $[a; b]$ при граничных условиях

$$S(u) = 0 \quad (13)$$

в граничных точках.

В методе Бубнова-Галеркина неизвестная функция $u(x)$ представляется приближенно в виде

$$\hat{u} = \sum_{i=1}^N \varphi_i(x) u_i, \quad (14)$$

где u_i - значение функции $u(x)$ в узлах ($i = \overline{1, N}$), подлежащие определению; $\varphi_i(x)$ - известные аналитические (пробные) функции; также называемые в литературе по МКЭ функциями формы. Подстановка (14) в уравнение (12) приводит к отличной от нуля невязке R :

$$R(u_0, u_1, \dots, u_N, x) = \sum_{i=1}^N u_i L(\varphi_i) - f_i, \quad (15)$$

Неизвестные u_i определяются из решения следующей системы уравнений

$$(R, \varphi_k) = 0, \quad k = 1, \dots, N, \quad (16)$$

где $(R, \varphi_k) = \int (R \cdot \varphi_k) dx$ - внутреннее произведение; φ_k - весовая функция, принадлежащая к тому же семейству функций, что и φ_i из (14). Полученные коэффициенты u_i подставляются в формулу (14), что дает искомое приближенное решение \hat{u} .

Заметим, что высший порядок производных присутствующих в операторе $L(u)$ не ограничен, он определяется физическим смыслом задачи. Однако порядок производных, который допустим в (16), должен быть на единицу больше порядка непрерывности интерполяционного многочлена в (14). Это ограничение можно преодолеть сокращением порядка $L(u)$, используя интегрирование по частям.

Согласно теории МКЭ, для построения балочного элемента необходимо ввести пробные функции. На элементе рассматривается 4 степени свободы $(w_1, w_2, \theta_1, \theta_2)$ и для аппроксимации используется кубический полином:

$$w(x) = a_1 + a_2 x + a_3 x^2 + a_4 x^3, \quad \theta(x) = -\frac{dw}{dx} = -(a_2 + 2a_3 x + 3a_4 x^2)$$

После определения значения констант выражение для аппроксимации функции $w(x)$ имеет вид:

$$w = [N_w] \{W\},$$

где $[N_w] = (1 - 3\xi^2 + 2\xi^3; -1\xi(\xi - 1)^2; 3\xi^2 - 2\xi^3; -1\xi(\xi^2 - \xi))$ - матрица формы;

$\{\mathbf{W}\} = (w_1 \quad \theta_1 \quad w_2 \quad \theta_2)^T$ - матрица узловых смещений; $\xi = x/l$ - безразмерная величина (локальная координата).

Аппроксимация перемещения $u(x)$ выглядит следующим образом:

$$u = [\mathbf{N}_u] \{\mathbf{U}\},$$

здесь, $[\mathbf{N}_u] = (1 - \xi; \xi) \{\mathbf{U}\} = (u_1 \quad u_2)^T$.

Применяя процедуру метода Бубнова-Галеркина с учетом введенных аппроксимаций получаем следующие разрешающие уравнения МКЭ

$$\begin{cases} M_1[\ddot{W}] + C_1[\dot{W}] + K_1[W] = F_1(q, U) \\ M_2[\ddot{U}] + C_2[\dot{U}] + K_2[U] = F_2(p, W) \end{cases} \quad (17)$$

где M_i, C_i, K_i - матрицы масс, демпфирования и жесткости соответственно.

1.3 Численные результаты

Исследование колебаний нелинейных конструкций на различных режимах (от гармонических до хаотических) предъявляет повышенные требования, как к самой математической модели, так и к численным методам. В связи с тем, что аналитических методов решения практически не существует, для проверки достоверности получаемых результатов необходимо сравнение с результатами, полученными по разным численным методам. В данной были использованы разные по самой сути методы: прямой – метод конечных разностей и вариационный – метод конечных элементов в форме Бубнова-Галеркина. Сопоставление проводилось для различных режимов колебаний. При этом геометрические и физические параметры балки выбирались одинаковые.

На рассматриваемую балку действует знакопеременная поперечная нагрузка вида:

$$q = q_0 \sin(\omega_p t) \quad (18)$$

где ω_p - частота вынуждающей силы, q_0 - ее амплитуда. Рассматриваемая система является диссипативной. В уравнениях учтены демпфирующие члены, с коэффициентами затухания $\varepsilon_1, \varepsilon_2$, соответственно для прогиба w и перемещения u .

Исследования поведения балок под действием знакопеременной поперечной нагрузки проведены посредством разработанного пакета программ, который позволяет строить карты характера колебаний в зависимости от управляющих параметров $\{q_0, \omega_p\}$. Для построения карты, с разрешением 300×300 точек, необходимо решить задачу динамики, построить и проанализировать спектр мощности и Ляпуновские показатели для каждого набора управляющих параметров. Алгоритм позволяет выделять на картах зоны гармонических колебаний, зоны бифуркаций, зоны колебания балки на независимых частотах, зоны хаоса.

Для апробации процедуры исследования колебаний балки с помощью МКЭ и МКР рассмотрена поставленная задача, со следующими данными: коэффициенты демпфирования $\varepsilon_1 = 1$, $\varepsilon_2 = 0$, $\omega_p = 6.9$ - частота вынуждающей силы, относительная длина балки $\lambda = \frac{a}{2h} = 50$. На балку также действует поперечная знакопеременная нагрузка с амплитудой $q_0 \in [0; 6 \cdot 10^4]$. Шаг по пространственной координате c и шаг по времени Δt выбирались из условий устойчивости получаемых решений по принципу Рунге. Задача решалась при разбиении $n = 40$, $c = 1/40$, и шагом по времени $\Delta t = 3.9052 \cdot 10^{-3}$. Выбор оптимальных значений шага по времени и шага по пространственной координате проведен в [11]. Достоверность результатов подтверждается сопоставлением шкал зависимости характера колебаний балки от амплитуды вынуждающих колебаний, которые построены только для одного значения ω_p , а также графиков $w_{\max}(q_0)$, полученных посредством методов конечных разностей и конечных элементов (рис.2).

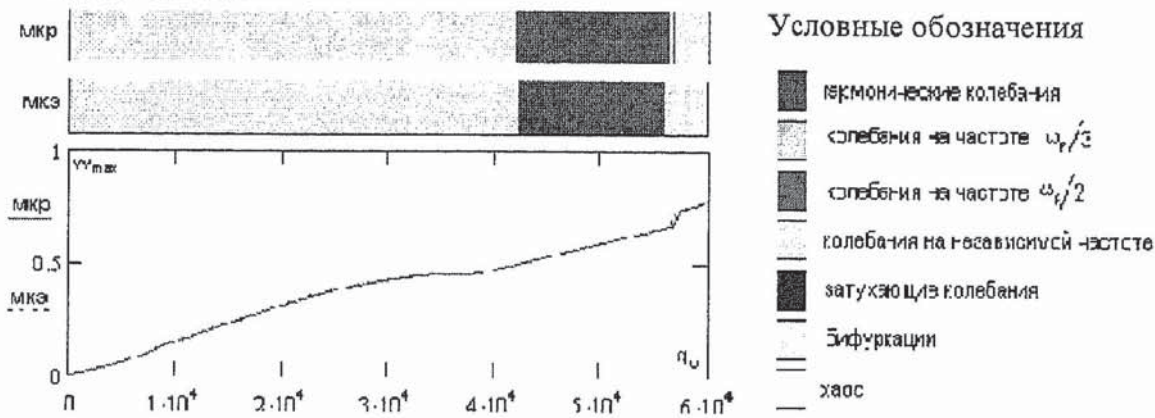


Рис. 2

Как видно, из приведенных выше результатов, решения, получаемые с помощью МКР и МКЭ, практически совпадают, что позволяет говорить о достоверности получаемых численных результатов.

Приведем также «карты» зависимости характера колебаний балки от управляющих параметров $\{q_0, \omega_p\}$, посчитанные методами конечных разностей (рис.3 а) и конечных элементов (рис.3 б). «Карты» построены с разрешением 300×300 . Максимальная амплитуда нагрузки соответствует прогибу балки, равному $5(2h)$. Для получения «карты» характера колебаний в зависимости от управляющих параметров размерностью 300×300 необходимо просчитать $9 \cdot 10^4$ вариантов.

Если говорить о достоверности получаемых результатов, то практически полное совпадение «карт», полностью подтверждает сделанный выше вывод.

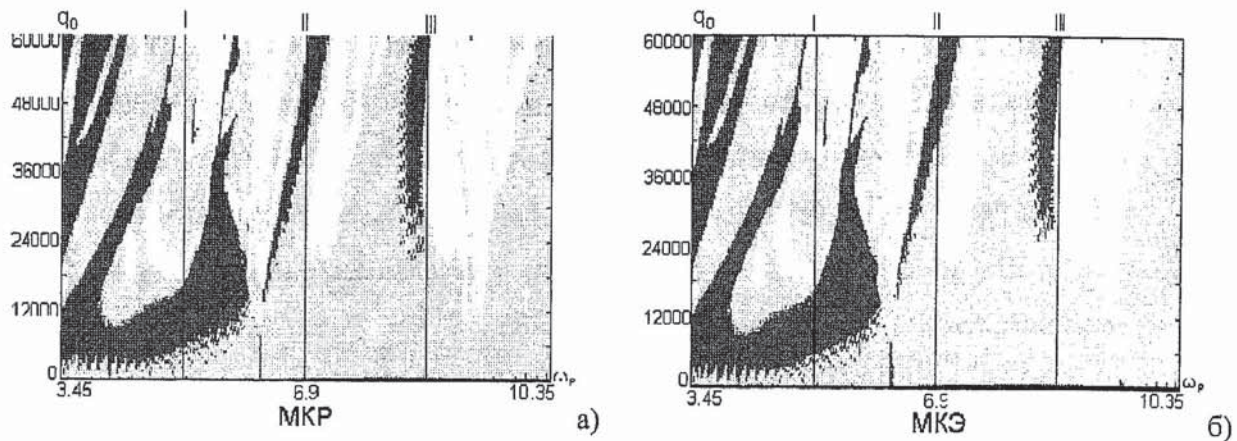


Рис. 3

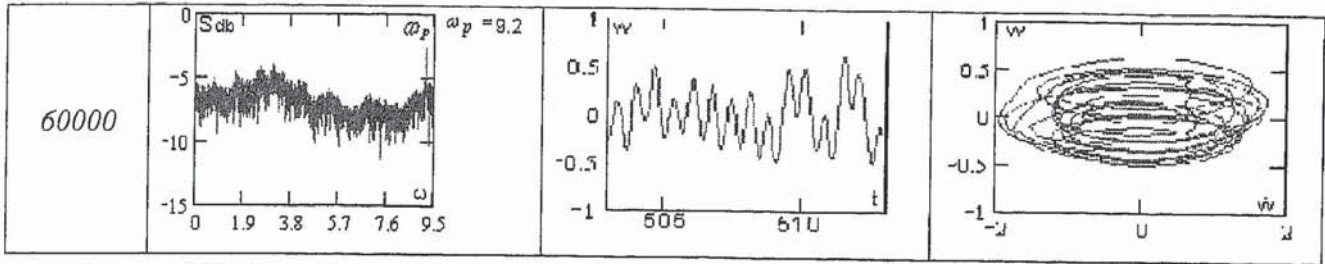
На «картах» четко различимы зоны гармонических, хаотических, колебаний системы, зоны бифуркаций. При малых значениях амплитуды вынуждающих колебаний, на «картах» видна полоса черного цвета, соответствующая затухающим колебаниям системы.

Наличие зон хаотических колебаний на «картах» вызывает вопрос о сценарии перехода системы от гармонических колебаний к хаотическим.

Исследуем сценарий на примере частоты $\omega_p = 9.2$ (таблица 1) методом конечных элементов.

Таблица 1

q_0	$S(\omega)$	$w(t)$	$w(\dot{w})$
100			
8740			
10500			



1. $q_0 = 100$. Колебания на частоте возбуждения ω_p .

2. $q_0 = 560$. Последовательно появляются первая и вторая независимые частоты $\omega_1 = 3,31, \omega_2 = 2,92$.

3. $q_0 = 8740$. Появляется третья частота $\omega_3 = 2,51$ и четвертая $\omega_4 = 3,75$. Значения частот ω_1, ω_2 изменяются. Линейная комбинация следующая: $\omega_1 - \omega_2 = \omega_2 - \omega_3$.

4. $q_0 = 10500$. Происходит зашумление частот. Появляется хаотическая составляющая. Линейная комбинация значений частот следующая: $\omega_1 - \omega_2 = \omega_2 - \omega_3 = \omega_1 - \omega_4$.

5. $q_0 = 60000$. Хаотическое состояние системы.

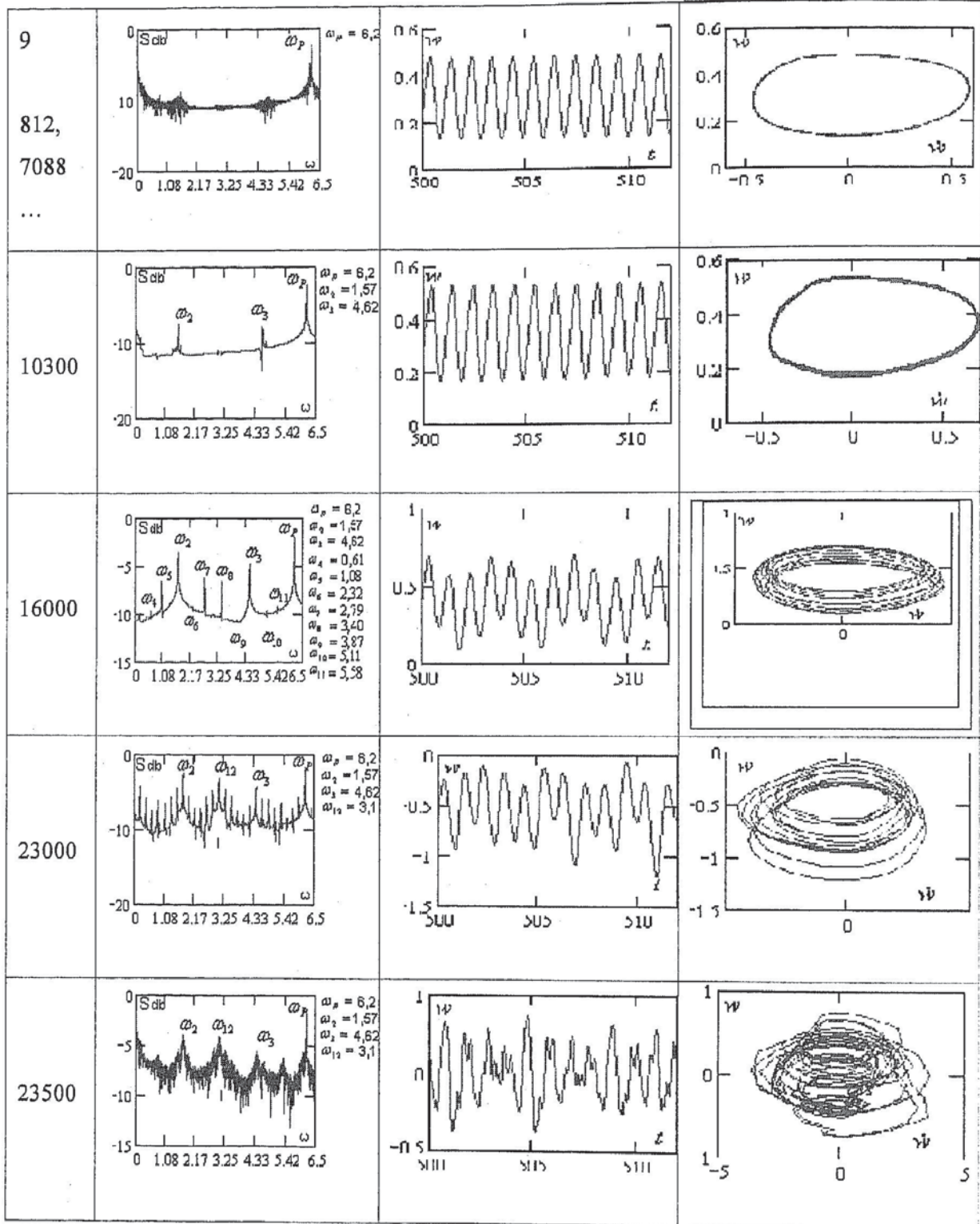
Рассмотренный сценарий соответствует модифицированному сценарию Рюэлля-Такенса-Ньюхауза, выявленному в [12,13].

Также приведем сценарий перехода системы от гармонических колебаний к хаотическим на примере частоты $\omega_p = 6.2$.

Таблица 2

q	Спектр мощности	W(t)	Фазовый портрет
50			
9812,5			

продолжение таблицы



1. $q_0 = 50$. Колебание системы на частоте возбуждения $\omega_p = 6.2$.

Далее возникает частота $\omega_1 = 0,07$, значение которой постепенно уменьшается.

2. $q_0 = 9812.5$. Исчезает частота ω_1 .

3. $q_0 = 9812.70887900199977594$. Происходит резкий переход системы к хаосу.

4. $q_0 = 10300$. Система выходит из состояния хаоса. Происходит перестройка частот. Кроме частоты возбуждения имеются еще две $\omega_2 = 1,57$ и $\omega_3 = 4,62$. Причем разность значений частот ω_p ω_3 равно ω_2 .

Далее появляются парные частоты вокруг ω_2 и ω_3 . Их количество возрастает до определенного момента, а затем парные частоты начинают исчезать. При этом значения частот ω_2 и ω_3 «плывут».

5. $q_0 = 16000$. Для частоты ω_2 парные частоты $\omega_4 = 0,61$ и $\omega_7 = 2,79$; $\omega_5 = 1,08$ и $\omega_6 = 2,32$, для частоты ω_3 парные частоты $\omega_8 = 3,40$ и $\omega_{11} = 5,5837$; $\omega_9 = 3,8779$ и $\omega_{10} = 5,1143$.

Потом количество парных частот увеличивается.

6. $q_0 = 23000$. Выделяется частота $\omega_{12} = \frac{\omega_p}{2}$, вокруг которой группируются парные частоты, происходит бифуркация удвоения периода – «I».

7. $q_0 = 23500$. На спектре мощности появляется хаотическая составляющая, после чего система переходит к хаосу.

Рассмотренные сценарии, приведены для одной и той же задачи, но для разных частот вынуждающих колебаний. Как видно, при различных значениях ω_p система переходит к хаотическому состоянию по разным сценариям.

2. Нелинейные колебания балки типа Тимошенко С.П.

При построении математической модели балки типа Тимошенко предполагается, что поперечные сечения, после деформации, остаются плоскими, но не перпендикулярными срединной оси балки [14]. В данной модели, учет угла между поперечными сечениями и осью балки после деформации, приводит к увеличению количества неизвестных функций при неизменном порядке системы обыкновенных дифференциальных уравнений.

Система дифференциальных уравнений в перемещениях, описывающих движения балки с учетом поперечных сдвигов (математическая модель типа Тимошенко) и диссипации энергии в безразмерном виде (безразмерные параметры (1), но с учетом $\bar{\gamma} = \frac{\gamma a}{(2h)}$ - поперечный сдвиг),

и $\bar{\varepsilon}_3 = \varepsilon_3 \frac{a}{c}$ - коэффициент демпфирования для γ , принимает вид:

$$\begin{cases} \frac{1}{3}(w''_{xx} + \gamma''_{xx}) + \frac{1}{\lambda^2} \left(L_1(w, u) + \frac{1}{2} L_2(w, w) + L_3(w, u) + L_2(w, w) \right) + 2 \frac{1}{\lambda^2} q - \ddot{w} - \varepsilon_1 \dot{w} = 0, \\ u''_{xx} + L_4(w, w) - \ddot{u} - \varepsilon_2 \dot{u} = 0, \\ \gamma''_{xx} - 8\lambda^2(w'_x + \gamma) - \ddot{\gamma} - \varepsilon_3 \dot{\gamma} = 0; \end{cases} \quad (18)$$

где $L_1(w, u) = w''_{xx} u'_x$, $L_2(w, w) = w''_{xx} (w'_x)^2$, $L_3(w, u) = w'_x u''_{xx}$, $L_4(w, w) = w'_x w''_{xx}$. Здесь черточки над безразмерными параметрами опущены для простоты.

К системе дифференциальных уравнений (18), следует присоединить граничные и начальные условия.

«защемление – защемление»:

$$\begin{aligned} w(0, t) = w(a, t) = 0; \quad u(0, t) = u(a, t) = 0; \\ \gamma(0, t) = \gamma(a, t) = 0; \quad w'_x(0, t) = w'_x(a, t) = 0; \end{aligned} \quad (19)$$

«шарнир – шарнир»

$$\begin{aligned} w(0, t) = w(a, t) = 0; \quad u(0, t) = u(a, t) = 0; \\ Q_x(0, t) = Q_x(a, t) = 0; \quad w''_x(0, t) = w''_x(a, t) = 0; \end{aligned} \quad (20)$$

«защемление – шарнир»

$$\begin{aligned} w(0, t) = w(a, t) = 0; \quad u(0, t) = u(a, t) = 0; \\ \gamma(0, t) = Q_x(a, t) = 0; \quad w'_x(0, t) = w''_x(a, t) = 0; \end{aligned} \quad (21)$$

«защемление – свободный край»

$$\begin{aligned} w(0, t) = u(0, t) = 0; \quad \gamma(0, t) = w'_x(0, t) = 0; \\ M_x(a, t) = N_x(a, t) = Q_x(a, t) = 0; \end{aligned} \quad (22)$$

Начальные условия:

$$\begin{aligned} w(x, t)|_{t=0} = u(x, t)|_{t=0} = \gamma(x, t)|_{t=0} = 0, \\ \dot{w}(x, t)|_{t=0} = \dot{u}(x, t)|_{t=0} = \dot{\gamma}(x, t)|_{t=0} = 0. \end{aligned} \quad (23)$$

2.1 Решение нелинейных дифференциальных уравнений методами конечных разностей и конечных элементов

Бесконечномерная задача с помощью метода конечных разностей, с аппроксимацией $O(c^2)$ сводим к конечномерной – системе обыкновенных дифференциальных уравнений. В каждом узле сетки получим систему дифференциальных уравнений вида:

$$\begin{aligned} L_{1,c}(w, u, \gamma_x) &= \varepsilon_1 \dot{w}_i + \ddot{w}_i, \\ L_{2,c}(w, u) &= \varepsilon_2 \dot{u}_i + \ddot{u}_i, \\ L_{3,c}(w, \gamma_x) &= \varepsilon_3 \dot{\gamma}_i + \ddot{\gamma}_i, \end{aligned} \quad (24)$$

Граничные и начальные условия также представляются в разностном виде, которые аналогичны уравнениям (9) – (11), но с учетом γ .

Применяя процедуру метода Бубнова – Галеркина получим следующие разрешающие уравнения МКЭ

$$\begin{cases} M_1[\ddot{W}] + C_1[\dot{W}] + K_1[W] = F_1(q, U, \varphi) \\ M_2[\ddot{U}] + C_2[\dot{U}] + K_2[U] = F_2(W) \\ M_3[\ddot{\varphi}] + C_3[\dot{\varphi}] + K_3[\varphi] = F_3(W) \end{cases} \quad (25)$$

Системы уравнений (24), (25) решаем стандартной процедурой Рунге-Кутты 4 порядка.

2.3 Численные результаты

В задачах хаотической динамики важным является достоверность получаемых результатов. Так как очень часто погрешность, тех или иных методов, вносимая в решение задач, принимается за хаотические колебания нелинейных систем, проводилось сравнение результатов, полученных разными методами.

Достоверность численных результатов подтверждается совпадением результатов, полученных различными методами. Так, для граничных и начальных условий (19), (23), решена задача с теми же параметрами, что и для балки Эйлера-Бернулли ($\varepsilon_3 = 0$). Графики зависимости максимального прогиба от амплитуды вынуждающих колебаний, полученные различными методами, при не хаотических колебаниях системы совпадают полностью, незначительные различия, наблюдаются только в зоне, соответствующей хаотическим колебаниям.

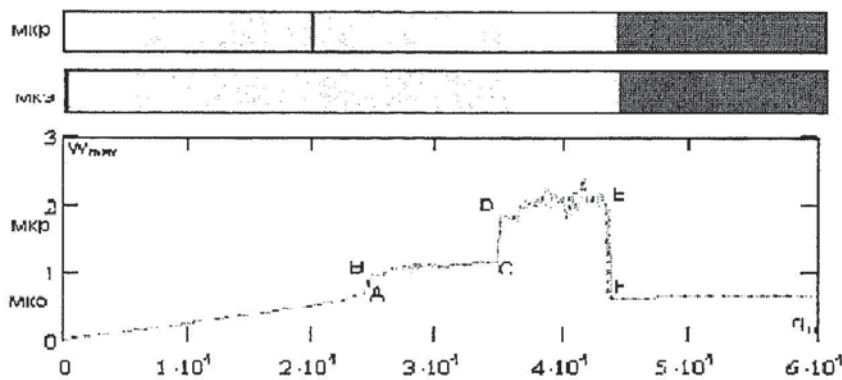


Рис. 4

Сопоставление результатов, полученных для модели Эйлера-Бернулли (рис.2) и для модели типа Тимошенко С.П. (рис.4) позволяет говорить о том, что учет влияния поперечных сдвигов существенно влияет на характер колебаний системы. Если на рис. 2 зон хаотических колебаний нет, то на четвертом рисунке зона хаоса представлена четко. Необходимо отметить явление динамической потери устойчивости балки под действием поперечной знакопеременной нагрузки, которое характеризуется резким изменением значения максимального прогиба при

незначительном изменении амплитуды вынуждающих колебаний. На рис. 4 явление динамической потери устойчивости хорошо видно при переходе системы от точки А к точке В, и от точки С к точке D. На шкале этим переходам соответствуют зоны хаоса. При переходе от точки Е к точке F происходит обратный переход системы от хаоса к гармоническим колебаниям, что также можно наблюдать на шкале. В этом случае значения прогиба уменьшаются в 1,5 раза.

Приведем также «карты» зависимости характера колебаний системы от управляющих параметров, для математической модели балки типа Тимошенко, которые построены методами конечных разностей (рис. 5 а) и конечных элементов (рис. 5 б).

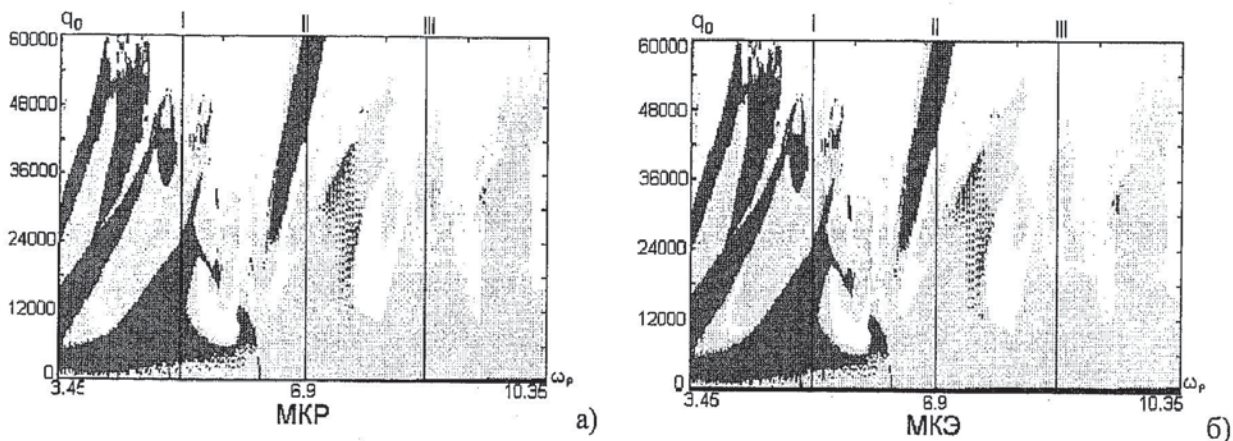


Рис. 5

Анализ «карт» на рис. 3 и рис. 5 только подтверждает сделанный выше вывод о значительном влиянии учета поперечных сдвигов, при одних и тех же геометрических и физических параметрах, при построении математической модели системы. Сравнение этих «карт» для балки типа Тимошенко (рис. 5) и Эйлера-Бернулли (рис. 3) показывает, что при одинаковых начальных, граничных условиях и управляющих параметрах карты довольно сильно отличаются. Так, зоны хаотических колебаний на рис. 3 более обширны, чем на рис. 5, а зоны гармонических наоборот. Характерной особенностью обеих карт является то, что колебания системы на независимой частоте занимают значительную площадь карт. Это говорит о том, что при изучении сложных колебаний нелинейной динамики балок следует серьезно заниматься построением более точных математических моделей.

Остановимся подробнее на сценариях перехода колебаний системы от гармонических к хаотическим. Рассмотрим три сценария, которые соответствуют частотам: $\omega_p = 8.05, 6.9, 5.75$. Как видно по «карте», на каждой из этих частот система переходит к хаосу при изменении амплитуды вынуждающих колебаний. В таблице 3 отражены основные моменты сценария перехода колебаний системы от гармонических к хаотическим для частоты $\omega_p = 8.05$ (МКР).

Таблица 3

q_0	$S(\omega)$	$w(t)$	$w(\dot{w})$
1			
4600			
11000			
30000			
40000			
42500			
45000			

1. $q_0 = 1$ - колебания системы гармонические, присутствует только частота возбуждения системы.

На данном промежутке возникает 3 частоты, значения которых линейно независимы: $\omega_1 = 4.46$, $\omega_2 = 1.83$, $\omega_3 = 4.9$.

2. $q_0 = 4600$ - после появления $\omega_4 = 0.92$, выявляется линейная зависимость значений частот: $\omega_2 - \omega_4 = 0.85$, и $\omega_3 - \omega_1 = 0.85$.

3. $q_0 = 11000$. Частоты образуют три группы, линейная зависимость внутри каждой из групп такова: $\omega_7 - \omega_2 = \omega_2 - \omega_4 = 1.1$, $\omega_3 - \omega_1 = \omega_1 - \omega_6 = 1.1$, $\omega_p - \omega_5 = 1.1$.

4. $q_0 = 30000$ - спектр мощности характеризуется тем, что благодаря изменению значений частот, на нем четко различимы 1-я, 2-я и 3-я бифуркации удвоения периода, обозначенные «I», «II», «III».

5. $q_0 = 40000$ - выявляется 4-я бифуркация. Фазовый портрет представляет собой четыре кольца неправильной формы.

6. $q_0 = 42500$ - количество бифуркаций 3. Происходит обратный переход системы от хаотического состояния.

7. $q_0 = 45000$ - на спектре мощности легко различимы новые частоты, значения которых отличается от основных частот на 0.42. А так же: $\omega_4 - \omega_1 = \omega_7 - \omega_4 = \omega_9 - \omega_7 = \omega_p - \omega_{10} = 1.86$

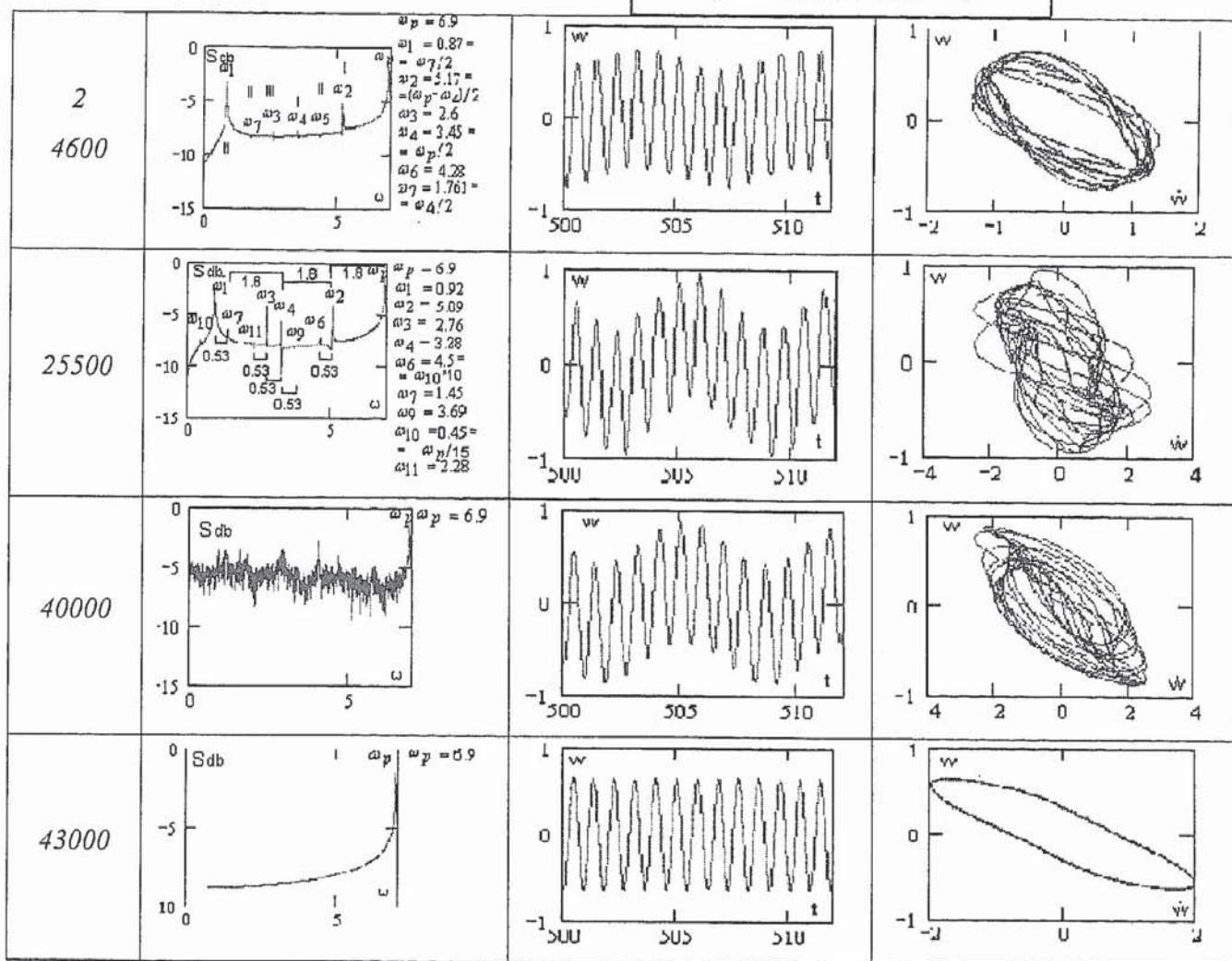
Данный сценарий, при малых значениях амплитуды вынуждающей нагрузки, характеризуется трехчастотными колебаниями, в дальнейшем возникает серия частот, значения которых линейно зависят от трех основных и после их изменения выявляется серия бифуркаций на фоне сильного зашумления спектра. Система проходит фазу детерминированного хаоса, после чего, количество бифуркаций уменьшается.

В таблице 4 рассмотрен сценарий для частоты $\omega_p = 6.9$ (МКР).

Таблица 4

q_0	$S(\omega)$	$w(t)$	$w(\dot{w})$
1000			
24000			

Продолжение таблицы



- $q_0 = 1000$ - колебания системы гармонические, на спектре мощности, кроме частоты возбуждающих колебаний, присутствует частота $\omega_1 = 0.627$, значение которой линейно не зависит от частоты ω_p .
- $q_0 = 24000$. На спектре мощности присутствуют линейно зависящие частоты: $\omega_2 = \omega_p - 2\omega_1$, $\omega_3 = \omega_1 \cdot 3$, $\omega_4 = \omega_2 - 2\omega_1$.
Значения частот изменяются.
- $q_0 = 24600$. Вышеописанные частоты, путем изменения значений, образуют три бифуркации, обозначенные «I», «II», «III» на графике.
- $q_0 = 25500$. На спектре мощности присутствуют следующие частоты, которые линейно зависят между собой, следующим образом: $\omega_p - \omega_2 = \omega_2 - \omega_4 = \omega_4 - \omega_7 = 1.8$, $\omega_2 - \omega_6 = \omega_9 - \omega_4 = \omega_4 - \omega_3 = \omega_3 - \omega_{11} = \omega_7 - \omega_1 = 0.53$.
- $q_0 = 40000$. Хаотическое состояние системы.
- $q_0 = 43000$. Произошел обратный переход системы от хаотического состояния к гармоническим колебаниям.

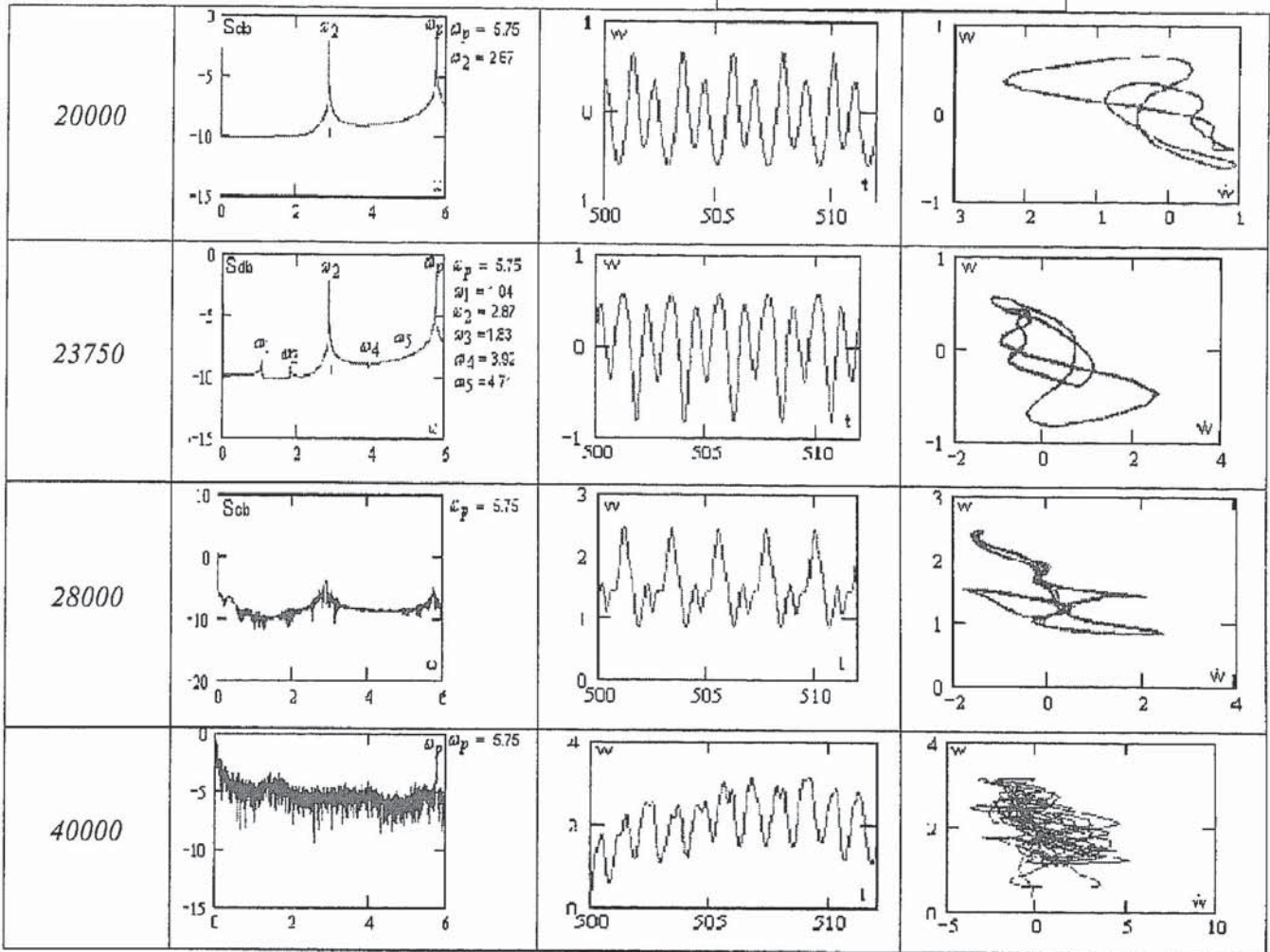
В данном случае, система, от двухчастотных колебаний, путем образования новых линейно зависимых частот и в результате изменения ранее появившихся, переходит к трем бифуркациям. Но значения частот продолжают изменяться, и система переходит к колебаниям на четырех основных частотах, значения которых линейно зависят от ω_p . В результате образования новых частот, значения которых есть линейные комбинации, система переходит к хаосу.

В таблице 5 приведен сценарий для частоты $\omega_p = 5.75$ (МКР).

Таблица 5

q_0	$S(\omega)$	$w(t)$	$w(\dot{w})$
1			
6200			
1 2000			
18000			
19000			

Продолжение таблицы



1. $q_0 = 1$. Колебания системы линейные.

2. $q_0 = 6200$. Значения частот $\omega_1 = 0.46$ и $\omega_5 = 1.36$ являются линейно независимыми. Связь между значениями других частот: $\omega_p - \omega_7 = \omega_3 - \omega_2 = \omega_2 - \omega_6 = 1$.

3. $q_0 = 12000$. Значения всех частот отличаются между собой на 0.61.

4. $q_0 = 18000$. На спектре мощности присутствует большое количество частот, значения основных отличаются между собой на 0.169.

5. $q_0 = 19000$. Система возвращается к гармоническим колебаниям.

6. $q_0 = 20000$. Появляется первая бифуркация на частоте $\omega_2 = 2.87 = \omega_p / 2$.

7. $q_0 = 23750$. Возникают новые частоты, значения которых линейно зависят от вышеописанных: $\omega_1 = 1.04$, $\omega_2 - \omega_3 = \omega_4 - \omega_2 = \omega_p - \omega_5 = \omega_1$.

8. $q_0 = 28000$. Спектр мощности постепенно зашумляется.

9. $q_0 = 40000$. Хаотическое состояние системы.

Наблюдаем трехчастотные колебания системы, которые в дальнейшем переходят к линейной комбинации значений всех частот. Данный сценарий соответствует модифицированному сцена-

риго Рюэля-Таккенса-Ньюхауза. В дальнейшем, система вновь переходит к гармоническим колебаниям, после чего появляется первая бифуркация, а затем утроение ω_p и первой бифуркации. Таким образом, система переходит к хаотическому состоянию. Данный сценарий представляет собой модифицированный сценарий Рюэля-Таккенса_Ньюхауза через бифуркацию.

Данные результаты говорят о том, что в области управляющих параметров $\{q_0, \omega_p\}$ нет единого сценария перехода колебаний из гармонических колебаний в хаотические. Существуют подобласти $\{q_0, \omega_p\}$, в которых переход колебаний из гармонических в хаотические совершается по различным сценариям.

ВЫВОДЫ

Выявлены новые сценарии перехода системы от гармонических колебаний к хаотическим.

Учет влияния поперечных сдвигов при построении математической модели балки значительно влияет на поведение системы под действием поперечной знакопеременной нагрузки.

Выявлено, что в области управляющих параметров $\{q_0, \omega_p\}$ не всегда присутствует один и тот же сценарий перехода системы от гармонических колебаний к хаотическим.

Сценарии перехода системы к хаотическим колебаниям зависят от математической модели балки.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Крысько В.А., Савельева Н.Е., Сложные колебания замкнутых цилиндрических оболочек при неосесимметричном неравномерном знакопеременном внешнем давлении // Известия Вузов. Машиностроение. №7. 2004. с. 3-14.
2. Крысько В.А., Кравцова И.В., Динамика и статика гибких осесимметричных оболочек при действии распределенной знакопеременной нагрузки в зависимости от величины параметра пологости и краевых условий // Известия Вузов. Машиностроение. №12. 2004. с. 3-14.
3. Крысько В.А., Щекатурова Т.В., Хаотические колебания конических оболочек // Изв. РАН. МТТ. 2004. № 4, с. 140 – 150.
4. J.Awrejcewicz, V.A.Krysko, A.V.Krysko, Thermo-Dynamics of Plates and Shells. – Springer, 2007, p. 777
5. Awrejcewicz, Krysko, Vakakis, Nonlinear Dynamics of Continuous Elastic Systems. –

- Springer, 2004, p. 341
6. J. Awrejcewicz, Vadim A. Krysko Nonclassical Thermoelastic Problems in Nonlinear Dynamics of Shells. – Springer, 2003, p. 427
 7. Han Qiang, Zheng Xiangfeng, Chaotic response of a large deflection beam and effect of the second order mode // Eur. J. Mech. A. 2005. 24, N 6, с. 944-956.
 8. Zhang Wei, Wang Fengxia, Yao Minghui, Global bifurcations and chaotic dynamics in nonlinear nonplanar oscillations of a parametrically excited cantilever beam // Nonlinear Dynamics 2005. 40, N 3, с. 251-279.
 9. Вольмир А.С. Гибкие пластинки и оболочки. – М.: Гостехиздат, 1956. – 420с.
 10. Jan Awrejcewicz, Anton V. Krysko, Olga Saltykova, Yuriy Chebotyrevskiy, Nonlinear Vibrations Of The Euler-Bernoulli Beam Subject To Transversal Load And Impact Actions // Mathematical problems in engineering, (to take into publication).
 11. В. А. Крысько, М. В. Жигалов, О. А. Салтыкова, А. С. Десятова Диссипативная динамика геометрически нелинейных балок Бернулли–Эйлера. // Известия АН МТТ, принята к печати.
 12. Крысько В.А., Кравцова И.В. Управление хаотическими колебаниями гибких сферических оболочек. // Известия АН МТТ, № 1, 2005, с. 10 – 20.
 13. Савельева Н.Е., Диссертация на соискание ученой степени кандидат физико-математических наук «Математическое моделирование хаотических колебаний замкнутых цилиндрических оболочек и панелей».
 14. Вольмир А.С. Нелинейная динамика пластинок и оболочек. М.: Наука, 1972. – 432с.

539.3

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ КОНТАКТНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ АВТОМОБИЛЬНОЙ ШИНЫ ПРИ СТАЦИОНАРНОМ КАЧЕНИИ С БОКОВЫМ УВОДОМ

Д-р техн. наук, проф. А.Е. Белкин, асп. О.А. Одинцов

Рассмотрено решение задачи о деформациях автомобильной шины при качении по плоской дорожной поверхности или цилиндрической поверхности бегового барабана с заданным боковым уводом. Для расчета шины использована модель геометрически нелинейной оболочки Тимошенко. Область контакта и границы зон сцепления и скольжения определяются решением контактной задачи. Расчеты выполнены методом конечных элементов с использованием трёх-