

- Springer, 2004, p. 341
6. J. Awrejcewicz, Vadim A. Krysko Nonclassical Thermoelastic Problems in Nonlinear Dynamics of Shells. – Springer, 2003, p. 427
 7. Han Qiang, Zheng Xiangfeng, Chaotic response of a large deflection beam and effect of the second order mode // Eur. J. Mech. A. 2005. 24, N 6, с. 944-956.
 8. Zhang Wei, Wang Fengxia, Yao Minghui, Global bifurcations and chaotic dynamics in nonlinear nonplanar oscillations of a parametrically excited cantilever beam // Nonlinear Dynamics 2005. 40, N 3, с. 251-279.
 9. Вольмир А.С. Гибкие пластинки и оболочки. – М.: Гостехиздат, 1956. – 420с.
 10. Jan Awrejcewicz, Anton V. Krysko, Olga Saltykova, Yuriy Chebotyrevskiy, Nonlinear Vibrations Of The Euler-Bernoulli Beam Subject To Transversal Load And Impact Actions // Mathematical problems in engineering, (to take into publication).
 11. В. А. Крысько, М. В. Жигалов, О. А. Салтыкова, А. С. Десятова Диссипативная динамика геометрически нелинейных балок Бернулли–Эйлера. // Известия АН МТТ, принята к печати.
 12. Крысько В.А., Кравцова И.В. Управление хаотическими колебаниями гибких сферических оболочек. // Известия АН МТТ, № 1, 2005, с. 10 – 20.
 13. Савельева Н.Е., Диссертация на соискание ученой степени кандидат физико-математических наук «Математическое моделирование хаотических колебаний замкнутых цилиндрических оболочек и панелей».
 14. Вольмир А.С. Нелинейная динамика пластинок и оболочек. М.: Наука, 1972. – 432с.

539.3

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ КОНТАКТНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ АВТОМОБИЛЬНОЙ ШИНЫ ПРИ СТАЦИОНАРНОМ КАЧЕНИИ С БОКОВЫМ УВОДОМ

Д-р техн. наук, проф. А.Е. Белкин, асп. О.А. Одинцов

Рассмотрено решение задачи о деформациях автомобильной шины при качении по плоской дорожной поверхности или цилиндрической поверхности бегового барабана с заданным боковым уводом. Для расчета шины использована модель геометрически нелинейной оболочки Тимошенко. Область контакта и границы зон сцепления и скольжения определяются решением контактной задачи. Расчеты выполнены методом конечных элементов с использованием трёх-

уровневой итерационной схемы. Решение позволяет получить распределение сил в пятне контакта, нагрузочные характеристики шины и провести анализ её деформированного состояния.

Деформации шин при боковых нагрузках оказывают существенное влияние на управляемость движущегося автомобиля, поскольку обуславливают боковой увод колес. Явление увода тщательно исследовалось экспериментально, в частности, изучались зависимости между боковыми силами и углами увода. Обширный обзор результатов экспериментальных исследований и эмпирических формул, отражающих влияние параметров шин на увод, содержится в монографии А.С. Литвинова [1].

На фоне многочисленных экспериментальных исследований имеется сравнительно небольшое число работ по расчету бокового деформирования шин методами теории упругости. В наиболее известных Э. Фиала [2], О.Н. Мухина [3] для анализа увода использованы одномерные модели шины в виде балки или кольца на упругом основании.

Нами рассматривается задача двумерного контакта автомобильной шины с плоской или цилиндрической опорной поверхностью (с дорожным полотном или беговым барабаном) при стационарном качении с заданным углом бокового увода. Для расчета шины используется модель оболочки Тимошенко. Поскольку в формировании эксплуатационных характеристик шины важная роль принадлежит протектору, расчетная схема оболочки дополняется внешним упругим слоем со свойствами винклеровского основания, моделирующим протектор.

При выводе уравнений применяется схема обращенного движения: считается, что ось колеса неподвижна, под колесом движется с известной скоростью опорная поверхность. Уравнения стационарного состояния оболочки формулируются в пространственных эйлеровых координатах, при этом скорости изменения физических переменных, относящихся к материальным объемам, определяются конвективными производными. Задача решается в геометрически нелинейной постановке методом конечных элементов (МКЭ).

Математическая модель шины как оболочки.

Рассмотрим торовую оболочку, вращающуюся вокруг оси x с угловой скоростью Ω , нагруженную силами $\bar{q} = q_x \bar{i}_x + q_y \bar{i}_y + q_z \bar{i}_z$, неподвижно ориентированными в пространстве (рис. 1).

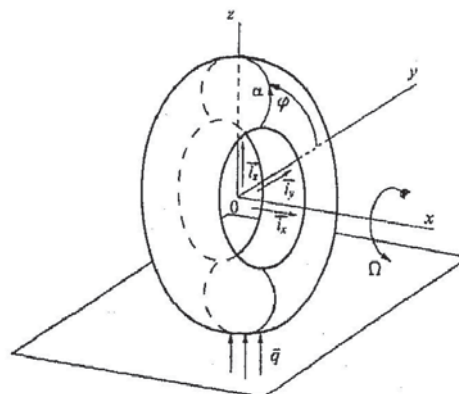


Рис. 1. Расчетная схема задачи

В стационарном состоянии скорость \bar{v} и ускорение \bar{a} произвольной точки оболочки определяются конвективными производными ее радиус и вектора

$$\bar{v} = \Omega (\bar{R} + \bar{u})_{,\varphi} = \Omega r \bar{i}_\varphi + \Omega \bar{u}_{,\varphi};$$

$$\bar{a} = \Omega^2 (\bar{R} + \bar{u})_{,\varphi\varphi} = -\Omega^2 r \bar{i}_r + \Omega^2 \bar{u}_{,\varphi\varphi},$$

где \bar{R} , \bar{u} — радиус-вектор точки до деформации и его изменение при переходе к деформированной конфигурации; r — расстояние точки до оси вращения в недеформированном состоянии; φ — угловая координата меридионального сечения оболочки как тела вращения; \bar{i}_r , \bar{i}_φ — единичные векторы радиального и окружного направлений.

В основу описания динамического равновесия при стационарном движении оболочки положим уравнение принципа возможных перемещений

$$\delta A - \Omega^2 \iiint_V \delta \bar{u} \rho (r \bar{i}_r - \bar{u}_{,\varphi\varphi}) dV - \iint_{S_q} \delta \bar{u} \bar{q} dS = 0,$$

представленное в виде

$$\delta A - \Omega^2 \delta \iiint_V \rho r \bar{u} \bar{i}_r dV - \frac{1}{2} \Omega^2 \delta \iiint_V \rho (\bar{u}_{,\varphi})^2 dV - \iint_{S_q} \delta \bar{u} \bar{q} dS = 0, \quad (1)$$

где δA — работа внутренних сил в оболочке на возможных перемещениях $\delta \bar{u}$; ρ , V — плотность и объем материала оболочки; S_q — часть лицевой поверхности оболочки, на которой заданы внешние силы \bar{q} .

Так как главная цель работы - определение жесткостных характеристик шины, ограничимся применением теории оболочек с единой аппроксимацией перемещений по толщине, отказываясь для упрощения от излишне подробной послойной аппроксимации и анализа равновесия каждого резинокордного слоя шины в отдельности. Используем теорию оболочек, основанную на кинематической гипотезе Тимошенко. Согласно этой гипотезе перемещения распределены по толщине оболочки по линейному закону

$$\bar{u} = \bar{u}_0 + \zeta \bar{\beta}, \quad (2)$$

где \bar{u}_0 — перемещения точек базовой поверхности оболочки (срединной поверхности каркаса шины); $\bar{\beta} = \beta_\alpha \bar{i}_\alpha + \beta_\varphi \bar{i}_\varphi$ — углы поворота линейных элементов $\zeta \bar{n}$, нормальных к базовой поверхности до деформации; \bar{i}_α , \bar{n} — орты меридионального и

нормального направлений; ζ — координата, отсчитываемая по нормали от базовой поверхности.

В соответствии с принятым распределением перемещений приведем внешние силы и силы инерции к базовой поверхности оболочки. Уравнение принципа возможных перемещений (1) получит вид

$$\delta A - \frac{1}{2} \Omega^2 \delta \iint_{S_0} [m (\bar{u}_{\circ,\varphi})^2 + 2S_m \bar{u}_{\circ,\varphi} \bar{\beta}_{,\varphi} + I_m (\bar{\beta}_{,\varphi})^2] dS_0 - \\ - \Omega^2 \delta \iint_{S_0} (m \bar{u}_{\circ} \bar{i}_r + S_m \beta_{\alpha} l_{nx}) r_0 dS_0 - \iint_{S_0} (\bar{q} \delta \bar{u}_{\circ} + \bar{\mu} \delta \bar{\beta}) dS_0 = 0,$$

где $m = \int_H \rho d\zeta$, $S_m = \int_H \zeta \rho d\zeta$, $I_m = \int_H \zeta^2 \rho d\zeta$ — распределенная масса оболочки, статический момент и момент инерции распределенной массы относительно базовой поверхности; H — толщина оболочки; dS_0 , r_0 — элемент площади и радиус параллели на базовой поверхности; $\bar{\mu} = \zeta^* \bar{q}$ — моменты внешней нагрузки \bar{q} относительно осей базовой поверхности; ζ^* — значение нормальной координаты для лицевой нагруженной поверхности S_q ; $l_{nx} = \bar{n} \bar{i}_x$ — косинус угла между нормалью \bar{n} и ортом \bar{i}_x оси вращения.

Отметим, что определение инерционных характеристик m , S_m , I_m и перенос внешней нагрузки на базовую поверхность проведены для тонкой оболочки без учета изменения масштабов длин и площадей по толщине.

При обжатии шины на опорную поверхность нагрузкой от веса автомобиля наблюдаются значительные изменения кривизн в области контакта, перемещения точек шины как оболочки могут заметно превосходить по величине ее толщину. При таких перемещениях расчеты приходится выполнять по нелинейной теории оболочек.

Используя простейший вариант квадратичной теории оболочек, определим деформации базовой поверхности нелинейными соотношениями

$$\varepsilon_{\alpha} = A_{\alpha}^{-1} \bar{i}_{\alpha} \bar{u}_{\circ,\alpha} + \frac{1}{2} (A_{\alpha}^{-1} \bar{u}_{\circ,\alpha})^2; \quad \varepsilon_{\varphi} = A_{\varphi}^{-1} \bar{i}_{\varphi} \bar{u}_{\circ,\varphi} + \frac{1}{2} (A_{\varphi}^{-1} \bar{u}_{\circ,\varphi})^2; \\ \gamma_{\alpha\varphi} = A_{\varphi}^{-1} \bar{i}_{\alpha} \bar{u}_{\circ,\varphi} + A_{\alpha}^{-1} \bar{i}_{\varphi} \bar{u}_{\circ,\alpha} + (A_{\alpha} A_{\varphi})^{-1} \bar{u}_{\circ,\alpha} \bar{u}_{\circ,\varphi};$$

где A_{α} , A_{φ} — параметры Ламе для меридианов и параллелей соответственно, $A_{\varphi} = r_0$.

Деформации изгиба, кручения и поперечного сдвига выразим через перемещения линейными зависимостями

$$\chi_\alpha = A_\alpha^{-1} \bar{i}_\alpha \bar{\beta}_{,\alpha}; \quad \chi_\varphi = A_\varphi^{-1} \bar{i}_\varphi \bar{\beta}_{,\varphi}; \quad \chi_{\alpha\varphi} = A_\varphi^{-1} \bar{i}_\alpha \bar{\beta}_{,\varphi} + A_\alpha^{-1} \bar{i}_\varphi \bar{\beta}_{,\alpha};$$

$$\gamma_{\alpha\zeta} = \beta_\alpha + A_\alpha^{-1} \bar{n} \bar{u}_{\alpha,\zeta}; \quad \gamma_{\varphi\zeta} = \beta_\varphi + A_\varphi^{-1} \bar{n} \bar{u}_{\varphi,\zeta}.$$

Согласно принятой в теории Тимошенко модели деформирования, виртуальная работа внутренних сил в оболочке определяется выражением

$$\delta A = \iint_{S_0} (\delta \boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbf{T} + \delta \boldsymbol{\chi}^T \mathbf{M} + \delta \boldsymbol{\gamma}^T \mathbf{Q}) dS_0,$$

где $\boldsymbol{\varepsilon} = \{\varepsilon_\alpha \ \varepsilon_\varphi \ \gamma_{\alpha\varphi}\}$, $\boldsymbol{\chi} = \{\chi_\alpha \ \chi_\varphi \ \chi_{\alpha\varphi}\}$, $\boldsymbol{\gamma} = \{\gamma_{\alpha\zeta} \ \gamma_{\varphi\zeta}\}$ — матрицы-столбцы деформаций; $\mathbf{T} = \{T_\alpha \ T_\varphi \ T_{\alpha\varphi}\}$, $\mathbf{M} = \{M_\alpha \ M_\varphi \ M_{\alpha\varphi}\}$, $\mathbf{Q} = \{Q_{\alpha\zeta} \ Q_{\varphi\zeta}\}$ — матрицы-столбцы обобщенных внутренних сил (мембранных сил, моментов и поперечных сил), верхний знак «Т» обозначает транспонирование.

Формулируя физические соотношения для оболочки, предполагаем, что в пределах деформаций, наблюдаемых при нормативных нагрузках на шину, резина и резинокордные слои проявляют свойства линейной упругости. Поэтому связь внутренних сил с деформациями линейна

$$\mathbf{T} = \mathbf{D}_\varepsilon \boldsymbol{\varepsilon} + \mathbf{D}_{\varepsilon\chi} \boldsymbol{\chi}; \quad \mathbf{M} = \mathbf{D}_{\varepsilon\chi} \boldsymbol{\varepsilon} + \mathbf{D}_\chi \boldsymbol{\chi}; \quad \mathbf{Q} = \mathbf{D}_\gamma \boldsymbol{\gamma},$$

где \mathbf{D}_ε , $\mathbf{D}_{\varepsilon\chi}$, \mathbf{D}_χ , \mathbf{D}_γ — матрицы коэффициентов упругости.

Формулировка условий контакта шины с опорной поверхностью.

Контактная задача об обжатии неподвижной шины на опорную поверхность подробно рассматривалась в [4, 5]. Ниже сначала кратко воспроизводится формулировка этой задачи, необходимая для перехода к исследованию контакта качения, а затем формулируется задача расчета шины при боковом уводе катящегося колеса. Условия, налагаемые на перемещения точек беговой дорожки шины и силы в площади контакта, разделим на условие непроникания в направлении нормали к опорной поверхности и тангенциальные условия сцепления или скольжения в направлении касательных к опорной поверхности.

Опорную поверхность зададим указанием зависимости радиус-вектора её произвольной точки от координат x , y :

$$\bar{P} = x \bar{i}_x + y \bar{i}_y + f(x, y) \bar{i}_z.$$

Считаем, что в пределах возможной площади контакта эта поверхность является гладкой и полой; начальное касание недеформированной шины с поверхностью имеет место в

точке с координатами $x = y = 0$, $z = f(0,0) = -R_c$, где R_c — свободный радиус шины (рис. 2).

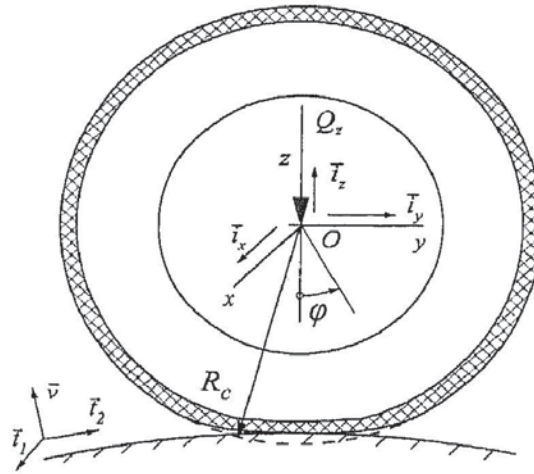


Рис. 2. К формулировке условий контакта

Рассматривая задачу обжатия шины, будем предполагать, что ось колеса неподвижна и деформирование шины происходит в результате смещения основания на заданную величину δ_z к оси колеса. При такой постановке сила обжатия Q_z является величиной искомой.

Для произвольной точки наружной поверхности протектора шины, до деформации имеющей координаты x^* , y^* , z^* , условие непроникания внутрь опорной поверхности записывается в виде

$$z^* + u_z^* \geq f(x^* + u_x^*, y^* + u_y^*) + \delta_z,$$

где u_x^* , u_y^* , u_z^* — перемещения точки.

Введя функцию внедрения для контактирующих поверхностей

$$g = f(x^* + u_x^*, y^* + u_y^*) + \delta_z - (z^* + u_z^*), \quad (3)$$

сформулируем условие контакта следующим образом:

$$\begin{cases} g = 0, & \text{если точка протектора находится в контакте;} \\ g < 0, & \text{если контакт отсутствует.} \end{cases} \quad (4)$$

В случае пологой опорной поверхности и при доминирующих вертикальных перемещениях u_z^* функцию внедрения (3) можно представить в линеаризованном виде [5]:

$$g = g^0 - \bar{v} \bar{u}^*, \quad (5)$$

где $g^\circ = f(x^*, y^*) + \delta_z - z^*$ — начальное внедрение оболочки в основание, которое имело бы место в случае проницаемых тел; \bar{V} — единичный вектор нормали к опорной поверхности; $\bar{u}^* = u_x^* \bar{i}_x + u_y^* \bar{i}_y + u_z^* \bar{i}_z$.

Перемещения наружной поверхности шины \bar{u}^* в области контакта определим как сумму перемещений оболочки \bar{u} и относительных смещений протекторного слоя $\Delta \bar{h}$. Чтобы выразить деформации протектора, разложим вектор контактной нагрузки на составляющие по направлениям нормали и касательных к опорной поверхности

$$\bar{q}_c = q_v \bar{V} + q_1 \bar{t}_1 + q_2 \bar{t}_2,$$

где $\bar{t}_1 = \frac{\bar{P}_{,x}}{|\bar{P}_{,x}|}$, $\bar{t}_2 = \frac{\bar{P}_{,y}}{|\bar{P}_{,y}|}$ — единичные векторы касательных к сечениям поверхности плос-

костями $y = \text{const}$, $x = \text{const}$ соответственно; q_1 — боковая, q_2 — продольная компоненты касательных сил в контакте.

С приемлемой для пологих поверхностей точностью

$$\bar{t}_1 \approx \bar{i}_x + f_{,x} \bar{i}_z; \quad \bar{t}_2 \approx \bar{i}_y + f_{,y} \bar{i}_z; \quad \bar{V} \approx -f_{,x} \bar{i}_x - f_{,y} \bar{i}_y + \bar{i}_z; \quad \bar{t}_1 \bar{t}_2 \approx 0.$$

Рассматривая протектор как винклеровский слой, работающий на сжатие и сдвиг, полагаем

$$\Delta \bar{h} = k_v^{-1} q_v \bar{V} + k_1^{-1} q_1 \bar{t}_1 + k_2^{-1} q_2 \bar{t}_2, \quad (6)$$

где k_v , k_1 , k_2 — жесткости протектора в нормальном, боковом и продольном направлениях.

С учетом деформаций протектора (6) функция внедрения (5) записывается в виде

$$g = g^\circ - u_v - k_v^{-1} q_v,$$

где $u_v = \bar{V} \bar{u}$ — перемещения точек оболочки в направлении нормали к опорной поверхности.

Теперь из условий непроникания (4) следует способ определения нормального контактного давления:

$$q_v = \begin{cases} k_v (g^\circ - u_v), & \text{если } g^\circ - u_v > 0; \\ 0, & \text{если } g^\circ - u_v \leq 0. \end{cases} \quad (7)$$

Искомая область контакта S_c характеризуется неравенством $g^\circ - u_v > 0$.

Завершая описание задачи обжатия неподвижной шины, отметим, что здесь касательные силы в контакте не существенны.

Перейдем к задаче качения с боковым уводом. Для моделирования увода колеса предположим, что вектор скорости качения колеса составляет заданный угол увода θ с экваториальной плоскостью шины.

При обращенном движении скорость произвольной точки основания имеет по отношению к вращающемуся колесу продольную (в направлении \bar{t}_2) и боковую (в направлении \bar{t}_1) составляющие, т.е. определяется выражением

$$\bar{V} = \bar{t}_2 V \cos\theta - \bar{t}_1 V \sin\theta.$$

Возможная относительная скорость точек основания и наружной поверхности протектора шины составляет

$$\bar{V}_r = \bar{V} - \Omega (\bar{R} + \bar{u} + \Delta\bar{h})_{,\varphi}.$$

В области сцепления $\bar{V}_r = 0$, в области скольжения $\bar{V}_r \neq 0$.

В рассматриваемом случае стационарного качения условие сцепления может быть выражено через перемещения. Выберем радиус качения колеса $R_k = V/\Omega$ в качестве параметра, определяющего режим качения.

Проследим за произвольной точкой протектора в площади контакта. В момент входа в контакт радиус-векторы точки протектора и точки основания совпадают

$$(\bar{R} + \bar{u} + \Delta\bar{h})_o = \bar{P}_o.$$

Будем считать, что в этот момент протектор еще не деформирован, т.е. $\Delta\bar{h}_o = 0$. За малый промежуток времени $d\tau = d\varphi/\Omega$, где $d\varphi$ — малый угол поворота колеса, относительное смещение точки основания и точки протектора может составить

$$d\bar{s} = \bar{V}_r d\varphi/\Omega = [\bar{V}/\Omega - (\bar{R} + \bar{u} + \Delta\bar{h})_{,\varphi}] d\varphi. \quad (8)$$

Интегрированием соотношения (8) по угловой координате колеса φ получаем выражение для возможного относительного смещения точек

$$\bar{s} = \int_{\varphi_o}^{\varphi} (\bar{V}/\Omega) d\varphi - (\bar{R} + \bar{u} + \Delta\bar{h}) \Big|_{\varphi_o}^{\varphi},$$

где φ_o — координата точки входа в контакт.

За время, соответствующее повороту колеса на конечный угол $\Delta\varphi = \varphi - \varphi_o$, точка основания проходит путь $R_k \Delta\varphi$, переходя в пределах пятна контакта из положения \bar{P}_o с координатами x_o, y_o, z_o в положение \bar{P} .

В зоне сцепления относительное смещение $\bar{s} = 0$. Исходя из этого условия, можно выразить относительные смещения протекторного слоя, связанные с его деформацией

$$\Delta \bar{h} = (\bar{P} - \bar{P}_0) - (\bar{R} - \bar{R}_0) - (\bar{u} - \bar{u}_0),$$

где $\bar{R} - \bar{R}_0$ — изменение радиус-вектора точки наружной поверхности протектора недеформированной шины при повороте колеса на угол $\varphi - \varphi_0$; $\bar{P} - \bar{P}_0$ — изменение радиус-вектора точки основания.

Через деформации протектора выражаются касательные составляющие контактной нагрузки в зоне сцепления

$$q_1 = k_1 \Delta \bar{h} \bar{t}_1; \quad q_2 = k_2 \Delta \bar{h} \bar{t}_2.$$

Для определения границы областей сцепления и скольжения и вычисления тангенциальных сил в контакте скольжения используем кулоновскую модель сухого трения. В этой модели значения тангенциальных сил q_1, q_2 ограничиваются в пространстве сил конусом сцепления, который является круговым или эллиптическим в зависимости от изотропии или анизотропии сцепных характеристик протектора.

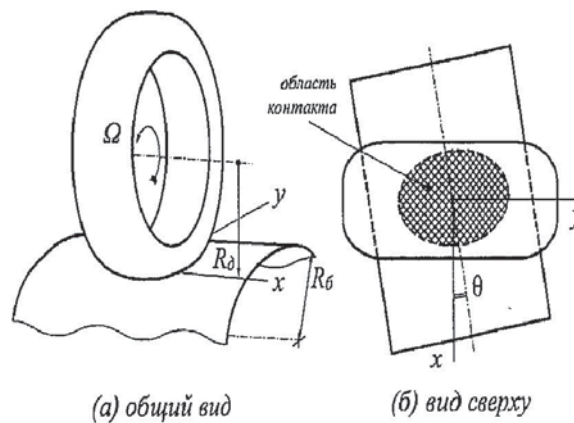


Рис. 3. Боковой увод колеса на беговом барабане

Чтобы упростить расчет контактных сил, заменим предельную коническую поверхность сцепления поверхностью прямоугольной пирамиды. В такой модели закон Кулона применяется независимо для боковой и продольной нагрузок в контакте

$$|q_1| \leq \mu_1 q_v, \quad |q_2| \leq \mu_2 q_v,$$

где μ_1, μ_2 - коэффициенты трения бокового и продольного скольжения элементов протектора по опорной поверхности соответственно.

Рассмотрим два важных случая качения автомобильной шины с боковым уводом: качение по плоской поверхности и качение по цилиндрической поверхности бегового барабана.

Анализ бокового увода при качении шины по плоской поверхности.

В этом случае $f = -(R_c - \delta_z) = \text{const}$, и орты локальной и глобальной систем координат совпадают

$$\bar{t}_1 \equiv \bar{i}_x; \quad \bar{t}_2 \equiv \bar{i}_y; \quad \bar{v} \equiv \bar{i}_z.$$

Смещение основания с момента входа точки в контакт определяется как

$$\bar{P} - \bar{P}_0 = R_k \Delta \varphi (\bar{i}_y \cos \theta - \bar{i}_x \sin \theta),$$

что позволяет записать выражение для касательных сил в протекторе при сцеплении с основанием в виде

$$q_1 = k_1 (-R_k \Delta \varphi \sin \theta + u_x^*|_{\varphi_0} - u_x); \quad (9)$$

$$q_2 = k_2 (R_k \Delta \varphi \cos \theta - R_y|_{\varphi_0} + u_y^*|_{\varphi_0} - u_y), \quad (10)$$

где $R_y|_{\varphi_0}$ — изменение координаты y точки оболочки в недеформированном состоянии при повороте колеса.

Выражения (9)–(10) можно записать в форме, аналогичной соотношению (7)

$$q_1 = k_1 (g_1^\circ - u_1); \quad q_2 = k_2 (g_2^\circ - u_2),$$

или совместно с q_v в матричном виде

$$\mathbf{q}_{\text{сц}} = \mathbf{E}_{\text{пр}} (\mathbf{g}^\circ - \mathbf{u}),$$

где $u_1 = \bar{u} \cdot \bar{t}_1$, $u_2 = \bar{u} \cdot \bar{t}_2$; $\mathbf{q}_{\text{сц}} = \{q_1 \quad q_2 \quad q_v\}$ — полный вектор контактных сил;

$\mathbf{u} = \{u_1 \quad u_2 \quad u_v\}$ — полный вектор перемещений оболочки; $\mathbf{g}^\circ = \{g_1^\circ \quad g_2^\circ \quad g^\circ\}$ — век-

тор «начальных внедрений»; $\mathbf{E}_{\text{пр}} = \begin{bmatrix} k_1 & 0 & 0 \\ 0 & k_2 & 0 \\ 0 & 0 & k_v \end{bmatrix}$ — матрица жесткостей протектора.

Виртуальная работа деформирования протектора в области сцепления будет равна

$$\delta A_{\text{сц}} = - \iint_{S_{\text{сц}}} \delta \mathbf{u}^T \mathbf{q}_{\text{сц}} dS,$$

где \mathbf{u} — перемещение лицевой точки оболочки шины, равное, согласно (2), $\mathbf{u}_0 + \zeta^* \boldsymbol{\beta}$.

Получив в конечно-элементной модели связь между лицевыми перемещениями оболочки и узловыми степенями свободы \mathbf{f} в виде

$$\mathbf{u} = \mathbf{N}_u \mathbf{f},$$

3×1 $3 \times n$ $n \times 1$

можно записать выражения для матрицы контактных жесткостей системы и вектора контактной узловой нагрузки в области сцепления [5], добавляемым к системе уравнений основной задачи:

$$\mathbf{K}_{\text{сц}} = \iint_{S_{\text{сц}}} \mathbf{N}_u^T \mathbf{E}_{\text{пр}} \mathbf{N}_u dS; \quad \mathbf{F}_{\text{сц}} = \iint_{S_{\text{сц}}} \mathbf{N}_u^T \mathbf{E}_{\text{пр}} \mathbf{g}^\circ dS.$$

В области скольжения касательные силы принимают предельные значения, что может быть записано как

$$\mathbf{q}_{\text{ск}} = \mathbf{Y}_{\text{ск}} \mathbf{E}_{\text{пр}} (\mathbf{g}^\circ - \mathbf{u}),$$

где $\mathbf{Y}_{\text{ск}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \pm \mu_1 \\ 0 & 0 & \pm \mu_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ — матрица условий скольжения в данной точке.

Это позволяет записать общие выражения для матрицы контактных жесткостей и вектора контактной узловой нагрузки во всей области контакта

$$\mathbf{K}_c = \iint_{S_c} \mathbf{N}_u^T \mathbf{Y}_c \mathbf{E}_{\text{пр}} \mathbf{N}_u dS; \quad \mathbf{F}_c = \iint_{S_c} \mathbf{N}_u^T \mathbf{Y}_c \mathbf{E}_{\text{пр}} \mathbf{g}^\circ dS,$$

где \mathbf{Y}_c — матрица условий контакта, равная единичной в области сцепления, и равная $\mathbf{Y}_{\text{ск}}$ в области скольжения.

Следует отметить, что при наличии в области контакта областей скольжения, матрица контактных жесткостей теряет свойство симметрии.

Анализ бокового увода при качении шины по беговому барабану.

Для анализа увода на беговом барабане радиуса R_6 (рис. 3) уравнение поверхности $f(x, y)$ представим в виде

$$f(x, y) = -R_d - \frac{(y \cos \theta - x \sin \theta)^2}{2R_6},$$

где $R_d = R_c - \delta_z$ — динамический радиус шины.

В этом случае локальный и глобальный базисы не совпадают. Поэтому для преобразования компонент вектора контактных сил требуется использовать соответствующую матрицу направляющих косинусов

$$\begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{Bmatrix} = \mathbf{L}_c \begin{Bmatrix} q_x \\ q_y \\ q_z \end{Bmatrix}.$$

Смещение точки барабана с момента входа в контакт равно

$$\bar{P} - \bar{P}_0 = R_k \Delta\varphi \left(\bar{i}_y \cos\theta - \bar{i}_x \sin\theta - \bar{i}_z \frac{y_0 \cos\theta - x_0 \sin\theta + \frac{1}{2} R_k \Delta\varphi}{R_0} \right),$$

где x_0, y_0 — координаты радиус-вектора \bar{P}_0 в момент входа в контакт.

Дальнейшее построение решения аналогично случаю с плоскостью. Общий вид получаемых выражений для матрицы контактных жесткостей и вектора контактной узловой нагрузки при качении по беговому барабану таков:

$$\mathbf{K}_c = \iint_{S_c} \mathbf{N}_u^T \mathbf{L}_c^T \mathbf{Y}_c \mathbf{E}_{pp} \mathbf{L}_c \mathbf{N}_u dS; \quad \mathbf{F}_c = \iint_{S_c} \mathbf{N}_u^T \mathbf{L}_c^T \mathbf{Y}_c \mathbf{E}_{pp} \mathbf{L}_c \mathbf{g}^\circ dS.$$

Решение задачи осуществляется по трехуровневой итерационной схеме, внешний цикл которой реализует метод дискретного продолжения по параметрам нагружения, средний — метод последовательных приближений для определения параметров контакта, внутренний цикл реализует метод Ньютона решения системы нелинейных уравнений задачи. Для улучшения сходимости решения при наличии неконсервативных сил трения в области скольжения, используется метод фиктивных вязкостей.

Результаты решения.

Верификация решения проводилась путем сопоставления с экспериментальными результатами, полученными в НИИШП для легкой радиальной шины 175/70R13 [6]. При решении задачи радиус качения R_k выбирался так, чтобы отсутствовал крутящий момент M_x , что соответствует режиму ведомого колеса. Для указанной шины этот режим достигался при $R_k \approx R_c - 0.34 \delta_z$. Расчет проводился для случая медленного качения без учета сил инерции с коэффициентом трения $\mu_1 = \mu_2 = 0.7$.

Для анализа управляемости автомобиля важна зависимость боковой силы Q_x либо коэффициента сопротивления боковому уводу $K_{yb} = Q_x / \theta$ от вертикальной нагрузки Q_z [1, §1]. На рис. 4 приведены графики коэффициента сопротивления боковому уводу для случая качения шины по беговому барабану радиуса $R_6 = 0.796 \text{ м}$ (длина окружности 5 м), полученные расчетным путем и на основании эксперимента.

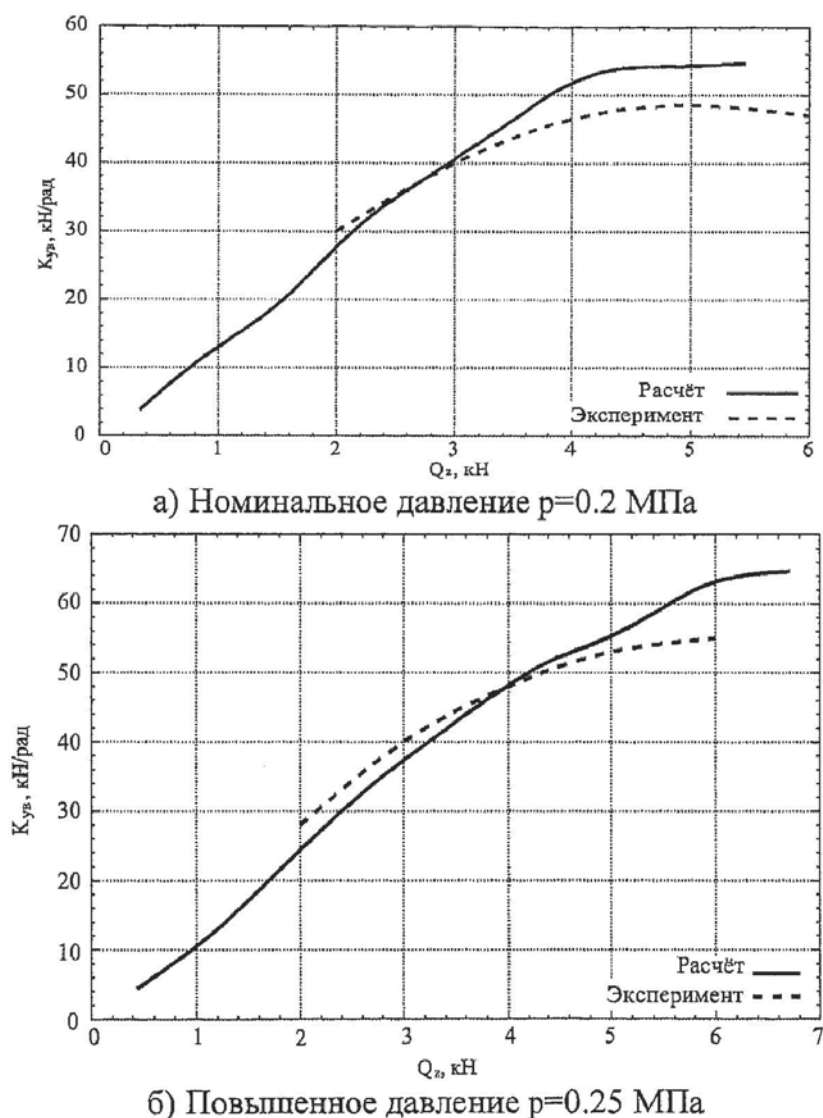


Рис. 4. Сопоставление расчета с испытаниями для шины 175/70R13

Сопоставление выполнено при номинальном и повышенном внутреннем давлении. В обоих случаях наблюдается соответствие расчета эксперименту.

Кроме вертикальной нагрузки, на величину боковой силы существенное влияние оказывает значение угла увода θ . Влияние этих двух параметров удобно отображать в виде комплексного графика (рис. 5).

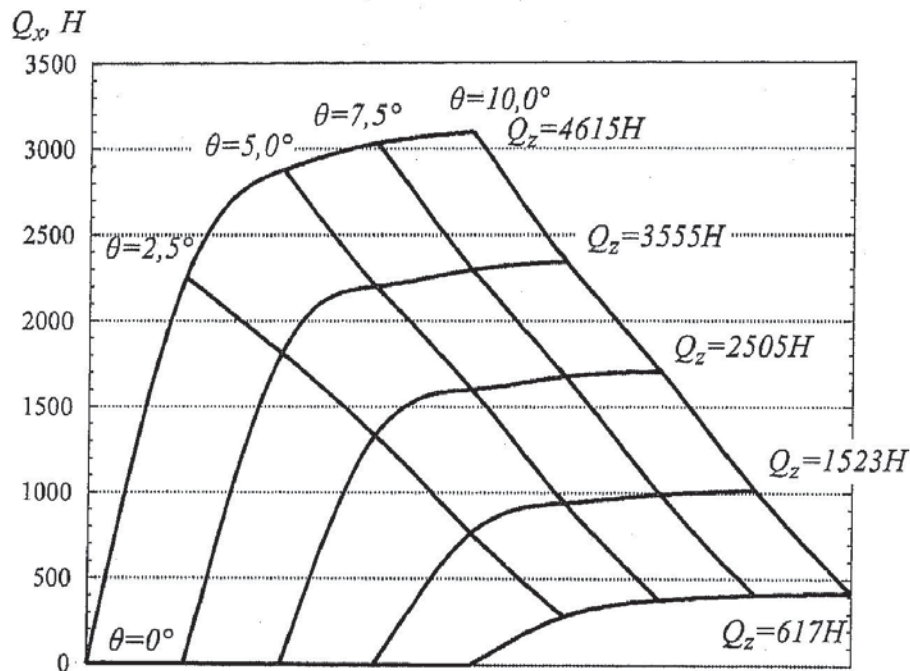
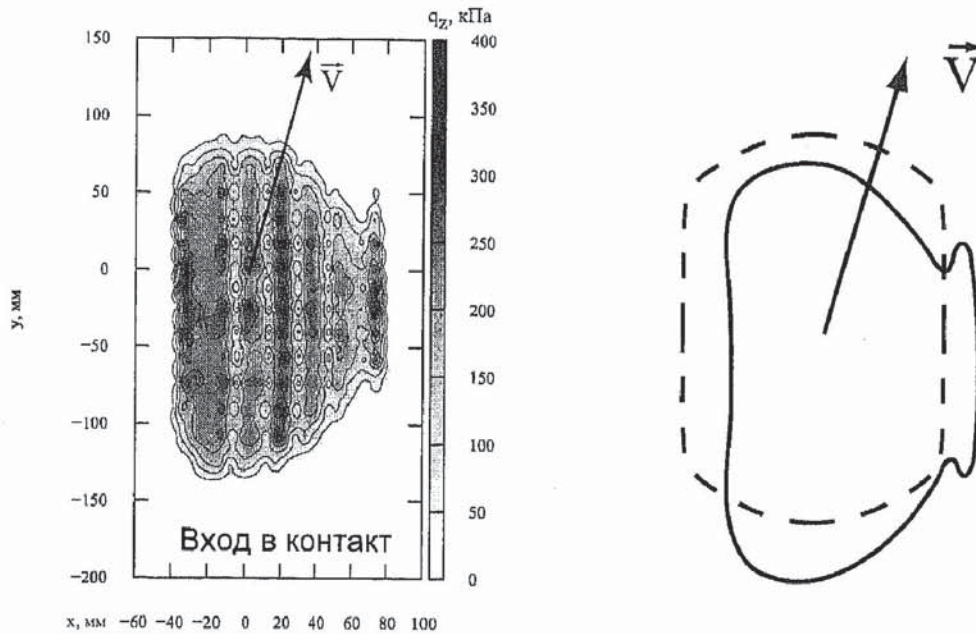


Рис. 5. Комплексный график зависимости боковой силы от угла увода и вертикальной нагрузки

Общий вид зависимости качественно соответствует результатам экспериментов, приводимым в литературе [7].

На рис.6 приведено распределение нормального контактного давления, полученное по результатам решения задачи бокового увода с углом $\theta = 15^\circ$, а также изменение формы пятна контакта по сравнению с неподвижной шиной. Сравнение выполнено для шины 175/70R13 с внутренним давлением 0.2 МПа, находящейся под действием нагрузки 4 кН. Пунктиром обозначена форма пятна контакта неподвижной шины, сплошной линией — шины, катящейся с уводом. Вектором \vec{V} обозначено направление перемещения основания относительно оси колеса.

Для анализа областей сцепления и скольжения в контакте рассмотрим качение с малым углом бокового увода $\theta = 0.5^\circ$ колеса, нагруженного пониженной нагрузкой 2 кН. На рис. 6,а показано распределение боковых сил в пятне контакта (без учета рисунка протектора). Область на входе в контакт с небольшим градиентом боковых сил характеризует область сцепления (рис. 6,б) с нарастающими сдвигами в протекторе.



а) Распределение нормального контактно-го давления

б) Изменение формы пятна контакта

Рис. 6. Качение шины 175/70R13 с углом бокового увода $\theta = 15^\circ$

На границе зоны сцепления боковые силы и соответствующие им боковые сдвиги в протекторе достигают своих предельных значений, и в пятне контакта устанавливается режим скольжения. В приведенном примере зона сцепления занимает 76% от общей площади контакта. При увеличении угла бокового увода θ (таблица) относительная доля площади сцепления уменьшается, достигая 5%–10% при углах увода $\theta = 10^\circ \dots 15^\circ$.

Таблица

Влияние угла увода на площадь области сцепления для $Q_z = 450$ кг

$\theta, ^\circ$	$S_c, \text{см}^2$	$S_{ск}, \text{см}^2$	$S_{сц} / S_{ск}, \%$
0	275	21	93% / 7%
1	275	37	86% / 14%
3	271	101	37% / 63%
5	270	227	16% / 84%
10	269	251	7% / 93%

ВЫВОДЫ

В рассмотрено решение задачи бокового увода при качении по плоской или цилиндрической опорной поверхности с учетом сил трения в пятне контакта. Решение позволяет получить вид контактной области, распределение сил в пятне контакта при наличии зон сцепления и

скольжения. Приведены результаты сопоставления расчетов с экспериментом для легковой радиальной шины 175/70R13, распределение нормальных и боковых сил в пятне контакта. Полученные результаты согласуются с данными, приводимыми в научной литературе, и результатами физических экспериментов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Литвинов А.С. Управляемость и устойчивость автомобиля. — М.:Машиностроение, 1971. — 416 с.
2. Fiala E. Seitenkräfte am rollenden luftreifen // Z. VDI. — 1954 — Bd. 96, N 29.
3. Мухин О.Н. — гл. Математические модели для анализа и расчета механических характеристик шин, работы трения в контакте с опорной поверхностью и износа протектора, в кн. Истирание резин, — С. 143–164. — М.:Химия, 1975.
4. Белкин А.Е., Нарская Н.Л. Конечно-элементный анализ контакта автомобильной шины с опорной поверхностью на основе оболочечной модели // Вестник МГТУ. Серия «Машиностроение». — 2004. — 3(56). — С. 14–28.
5. Белкин А.Е., Одинцов О.А. Численное решение геометрически нелинейной задачи контакта автомобильной шины с твердой опорной поверхностью // Вестник МГТУ. Серия «Машиностроение». — 2007. — 1(66). — С. 20–35.
6. Калининский В.С., Щередин В.А. Исследование шин новых конструкций разрушающими и неразрушающими методами стендовых испытаний: Технический отчет — НИИШП, Москва, 1985. — Тема 29-85Т, № гос. регистрации 01850010731.
7. Бухин Б. Л. Введение в механику пневматических шин. — М.:Химия, 1988. — 223 с.