РАСЧЕТ И КОНСТРУИРОВАНИЕ МАШИН

621.01

ВЛИЯНИЕ ДЕФОРМАЦИИ ПОПЕРЕЧНОГО СДВИГА И ИНЕРЦИИ ВРАЩЕНИЯ НА КОЛЕБАНИЯ БАЛОК С ОДНОСТОРОННИМИ СВЯЗЯМИ БОЛЬШОЙ ЖЕСТКОСТИ

Канд.техн.наук,доц.И.Е.ЛЮМИНАРСКИЙ

Предложен численный метод расчета колебаний балки С.П. Тимошенко с односторонними связями повышенной жесткости. Рассматривается влияние инерции вращения и деформации поперечного сдвига сечений на реакцию и зазор между односторонней связью, имеющей форму сферической поверхности и балкой, совершающей свободные колебания. Исследуется сходимость получаемого решения.

Численным методам расчета колебаний тонкостенных элементов, движение которых ограничено односторонними связями (ОС), посвящены работы [1,2],где изложенные методы применяются для систем, в которых жесткость упругого тела и ОС имеют один порядок. Если жесткость ОС на несколько порядков выше жесткости упругого тела, то расчеты методами, рассмотренными в [1,2], затруднены из-за больших затрат машинного времени.

В [3] предлагается численный метод расчета упругих систем с ОС большой жесткости. Этот метод позволил исследовать колебания тонких балок с ОС, выполненных в виде стержней с закругленными концами. В этой работе использовалось уравнение колебания балок, основанное на гипотезах Кирхгофа–Лява.

Колебания балок с ОС большой жесткости относятся к классу задач с сильными нелинейностями как по пространственной, так и по временной координате. В таких системах возможно появление зон больших градиентов перемещений во времени и пространстве. В связи с этим необходимо исследовать влияние деформации поперечного сдвига и инерции вращения сечений на колебания балки с ОС.

Уравнения поперечных колебаний балки, учитывающие инерцию вращения сечений и деформацию поперечного сдвига, впервые записал С.П. Тимошенко [4].

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{P}{kGs} = \frac{\partial^2 w}{c_k^2 \partial t^2}; \tag{1}$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + Cc_k^2\left(\frac{\partial w}{\partial x} - \psi\right) = \frac{\partial^2 \psi}{c_b^2 \partial t^2}, \tag{2}$$

где w – перемещение сечений балки от изгиба; ψ – угол поворота сечений балки от изгиба; $c_k^2 = \dfrac{kG}{\rho}$; $c_b^2 = \dfrac{E}{\rho}$; $C = \dfrac{\rho s}{EI}$; k – коэффициент сдвига; s – площадь поперечного сечения балки; G – модуль сдвига; ρ – плотность; E – модуль упругости; EI – изгибная жесткость балки; P – внешняя нагрузка.

Граничные условия для основных видов закрепления балки записываются в виде: шарнирное опирание $w = 0$, $\dfrac{\partial \psi}{\partial x} = 0$; заделанный край – $w = 0$, $\psi = 0$; свободный край $\dfrac{\partial w}{\partial x} - \psi = 0$, $\dfrac{\partial \psi}{\partial x} = 0$.

Систему уравнений, описывающую колебания балки по С.П. Тимошенко с односторонними связями, можно представить в виде

$$\mathbf{A}(\mathbf{u}) + \mathbf{C}(\mathbf{u}) = \mathbf{p} + \sum_{j=1}^{L} d_j \delta(x - x_j)\mathbf{R}_j \; ; \tag{3}$$

$$R_i(t) \geq 0, \qquad i = 1,\ldots, L; \tag{4}$$

$$\Delta_i(t) = d_i w(x_i, t) + \lambda(R_i(t)) + \Delta_{0i} \geq 0, \qquad i = 1,\ldots,L; \tag{5}$$

$$R_i(t)\Delta_i(t) = 0, \qquad i = 1,\ldots,L. \tag{6}$$

В этих уравнениях введены следующие обозначения: $\mathbf{u} = \{w(x,t), \psi(x,t)\}^T$; $\mathbf{p} = \{p(x,t), 0\}^T$; $\mathbf{R}_j(t) = \{R_j(t), 0\}^T$; $R_i(t), \Delta_i(t)$ – функции реакции и зазора в ОС с номером i; x_i – координата ОС с номером i; $\delta(x - x_i)$ – функция Дирака; Δ_{0i} – зазор между ОС с номером i и балкой в недеформированном состоянии; $d_i = -1$, если i-ая ОС ограничивает перемещение балки в положительном направлении действия внешней нагрузки $p(x,t)$, в противном случае $d_i = 1$; $\lambda(R_i(t))$ – абсолютная деформация ОС с номером i; L – число ОС;

$$\mathbf{A}(\mathbf{u})=\begin{Bmatrix}\rho s\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2}\\ \dfrac{\partial^2\psi}{c_b^2\partial t^2}\end{Bmatrix};\ \mathbf{C}(\mathbf{u})=\begin{Bmatrix}-kGs\left(\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}-\dfrac{\partial\psi}{\partial x}\right)\\ -\dfrac{\partial^2\psi}{\partial x^2}-Cc_k^2\left(\dfrac{\partial w}{\partial x}-\psi\right)\end{Bmatrix}.$$

Решение системы уравнений (3)–(6) можно представить в виде

$$\mathbf{u}(x,t)=\mathbf{u}_O(x,t)+\mathbf{u}_P(x,t)+\sum_{j=1}^{L} d_j\int_0^t R_j(\tau)\mathbf{u}_{Gj}(x,t-\tau)d\tau, \tag{7}$$

где $\mathbf{u}_O(x,t)$ – решение однородного уравнения $\mathbf{A}(\mathbf{u}_O)+\mathbf{C}(\mathbf{u}_O)=\mathbf{0}$ с граничными и начальными условиями исходной задачи; $\mathbf{u}_P(x,t)$ – решение неоднородного уравнения $\mathbf{A}(\mathbf{u}_P)+\mathbf{C}(\mathbf{u}_P)=\mathbf{p}$ с граничными условиями исходной задачи и нулевыми начальными условиями; $\mathbf{u}_{Gj}(x,t-\tau)=\{w_{Gj}(x,t-\tau),\psi_{Gj}(x,t-\tau)\}^T$ – функция Грина, т.е. решение однородного уравнения $\mathbf{A}(\mathbf{u}_{Gj})+\mathbf{C}(\mathbf{u}_{Gj})=\mathbf{0}$ с граничными условиями исходной задачи и полуоднородными начальными условиями ($\mathbf{u}_{Gj}=\mathbf{0}$, $\dfrac{\partial\mathbf{u}_{Gj}}{\partial t}=\mathbf{0}$ при $t\neq\tau$,

$\dfrac{\partial\mathbf{u}_{Gj}}{\partial t}=\{\delta(x-x_j),0\}^T$ при $t=\tau$).

Разложим реакции в односторонних связях в ряд

$$R_j(t)=\sum_{\alpha=0}^{m} R_j^\alpha f_\alpha(t), \tag{8}$$

где $f_\alpha(t)$ – линейные финитные функции [5] ($f_\alpha=0$, если $t\notin(t_{\alpha-1},t_\alpha)$, $t_\alpha=\alpha\cdot\Delta t$; $\Delta t=T/m$); T – время движения; R_j^α – реакция в j-ой ОС в момент времени t_α.

Считается, что односторонние связи имеют форму сферической поверхности. Их местное сближение с балкой λ определяется по формуле Герца

$$\lambda=kR^{\frac{2}{3}}, \tag{9}$$

где $k=\left(\dfrac{3(1-\mu^2)}{2E\sqrt{r}}\right)^{\frac{2}{3}}$; r – радиус поверхности ОС; μ – коэффициент Пуассона.

В расчетах зависимость (9) представляется в виде

$$\lambda = \delta(R)R, \tag{10}$$

где $\delta(R) = kR^{-\frac{1}{3}}$ – податливость эквивалентной линейной ОС.

Если подставить (8) в (7), а полученный результат и (10) подставить в (5), то разрешающая система уравнений для момента времени t_α примет вид

$$(\mathbf{V} + \mathbf{\Lambda}^\alpha)\mathbf{R}^\alpha - \mathbf{\Delta}^\alpha = \mathbf{b}^\alpha; \tag{11}$$

$$R_i^\alpha \geq 0;\ \Delta_i^\alpha = 0;\ R_i^\alpha \cdot \Delta_i^\alpha = 0, \quad i = 1,\dots,L; \tag{12}$$

где $\mathbf{b}^\alpha = -[\mathbf{\Delta}_0 + \sum\limits_{\beta=0}^{\alpha-1}\mathbf{K}^{\alpha\beta}\mathbf{R}^\beta + \mathbf{D}(\mathbf{w}_O^\alpha + \mathbf{w}_P^\alpha)]$; $\mathbf{K}^{\alpha\beta}$ – матрицы размерности $L \times L$, элементы которых определяются по формуле $K_{ij}^{\alpha\beta} = d_i d_j \int\limits_{t_{\beta-1}}^{t_{\beta+1}} f_\beta(\tau) w_{Gj}(t_\alpha - \tau, x_i)d\tau$;

$\mathbf{V} = \mathbf{K}^{\alpha\beta}|_{\alpha=\beta}$; $\mathbf{\Lambda}^\alpha$ – диагональная матрица, элементами которой являются податливости эквивалентных линейных ОС δ_i^α в момент времени t_α; $\mathbf{R}^\alpha$ – вектор реакций в ОС в момент времени t_α; $\mathbf{\Delta}^\alpha$ – вектор зазоров между балкой и ОС в момент времени t_α; $\mathbf{D}$ – диагональная матрица, элементами которой являются параметры d_i;

$\mathbf{w}_O^\alpha = \{w_O(x_1,t_\alpha),\dots,w_O(x_i,t_\alpha),\dots,w_O(x_L,t_\alpha)\}^T$ – вектор решений однородного уравнения в точках контакта балки с ОС в момент времени t_α;

$\mathbf{w}_P^\alpha = \{w_P(x_1,t_\alpha),\dots,w_P(x_i,t_\alpha),\dots,w_P(x_L,t_\alpha)\}^T$ – вектор решений неоднородного уравнения в точках контакта балки с ОС в момент времени t_α; Δ_0 – вектор зазоров между недеформированной балкой и ОС.

Система (11) – (12) разрешима относительно вектора реакций $\mathbf{R}^\alpha$ и вектора зазоров $\mathbf{\Delta}^\alpha$, если известны векторы реакций $\mathbf{R}^\beta$ в моменты времени t_β ($\beta = 0,1,..,\alpha - 1$). Поэтому векторы $\mathbf{R}^\alpha$ и $\mathbf{\Delta}^\alpha$ из (11) – (12) определяются последовательно для $\alpha = 1,2,\dots,m$.

Поскольку матрица податливостей $\mathbf{\Lambda}^\alpha$ зависит от вектора реакций $\mathbf{R}^\alpha$, то для каждого момента времени t_α система (11) – (12) решается с помощью итерационного уточнения. На первой итерации решается система (11) – (12), в которой $\delta_i^{\alpha} = \delta_i^{\alpha-1}$ $(i = 1,...,L)$. Решение это задачи ведется одним из методов статического расчета упругих систем с линейными ОС, например, методом последовательных приближений [6]. Далее по найденному вектору $\mathbf{R}^{\alpha}$ уточняются податливости ОС δ_i^{α} и делается следующая итерация.

Если число узловых точек по времени m очень большое, то расчет будет невозможен из-за недопустимо большого объема памяти необходимого для хранения матриц $\mathbf{K}^{\alpha,1}$ ($\mathbf{K}^{\alpha,\beta} = \mathbf{K}^{\alpha-\beta+1,1}$). В этом случае промежуток времени, на котором определяется решение, разбивается на интервалы. Переход от одного интервала к другому сопровождается введением нового отсчета времени. Каждый интервал начинается с времени $t = 0$. При переходе от одного интервала к другому матрицы $\mathbf{K}^{\alpha,1}$ не меняются. В начале каждого интервала пересчитывается решение однородного уравнения $\mathbf{u}_O(x,t)$.

Функции $\mathbf{u}_O(x,t)$, $\mathbf{u}_P(x,t)$ и $\mathbf{u}_{G_j}(x,t-\tau)$ определяются путем разложения решения в ряд по собственным формам колебаний.

Решение однородного уравнения колебаний балки С.П. Тимошенко представляется в виде

$$\mathbf{u}_O(x,t) = \sum_{j=1}^{\infty} \mathbf{u}_j \left(B_j \cos(\omega_j t) + C_j \sin(\omega_j t)\right), \tag{13}$$

где $\mathbf{u}_j = \{w_j, \psi_j\}^T$, ω_j – нормированные по кинетической энергии собственные формы и собственные частоты колебаний балки С.П. Тимошенко.

Коэффициенты B_j и C_j находятся из начальных условий движения по формулам [7]

$$B_j = \frac{\langle \mathbf{A}(\mathbf{u}_j), \mathbf{u}(x,0) \rangle}{\langle \mathbf{A}(\mathbf{u}_j), \mathbf{u}_j \rangle}, \quad C_j = \frac{\left\langle \mathbf{A}(\mathbf{u}_j), \frac{\partial \mathbf{u}(x,t)}{\partial t}\Big|_{t=0} \right\rangle}{\langle \mathbf{A}(\mathbf{u}_j), \mathbf{u}_j \rangle}, \tag{14}$$

где $\langle \ldots, \ldots \rangle$ – скалярное произведение двух функций.

Для получения $\mathbf{u}_P$ применим уравнение Лагранжа второго рода

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial L}{\partial q'_j}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0, \tag{15}$$

где $L = L(\mathbf{q},\mathbf{q}',t) = T - \Pi$ – функционал Лагранжа, $\mathbf{q},\mathbf{q}'$ - векторы обобщенных координат и скоростей.

Если решение уравнения (15) представить в виде ряда

$$\mathbf{u}_P(x,t) = \sum_{j=1}^{\infty} q_j(t)\mathbf{u}_j(x) \ , \tag{16}$$

то функционалы кинетической и потенциальной энергий примут вид

$$T = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{\infty}\left\langle \mathbf{u}_j,\mathbf{u}_i\right\rangle_A q'_j q'_i; \ \ \Pi = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{\infty}\left\langle \mathbf{u}_j,\mathbf{u}_i\right\rangle_C q_j q_i - \sum_{j=1}^{\infty}\left\langle P,w_j\right\rangle q_j,$$

где $\left\langle \mathbf{u}_i,\mathbf{u}_j\right\rangle_A$, $\left\langle \mathbf{u}_i,\mathbf{u}_j\right\rangle_C$ – скалярные произведения по кинетической и потенциальной энергиям.

Нормированные по кинетической энергии собственные формы удовлетворяют условиям $\left\langle \mathbf{u}_i,\mathbf{u}_j\right\rangle_A = 0$, при $i \neq j$; $\left\langle \mathbf{u}_i,\mathbf{u}_j\right\rangle_C = 0$, при $\left\langle \mathbf{u}_i,\mathbf{u}_i\right\rangle_C = \omega_i^2$; $\left\langle \mathbf{u}_i,\mathbf{u}_i\right\rangle_A = 1$. (17)

С учетом (17) окончательные выражения для функционалов T и Π примут вид

$$T = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{\infty}(q'_i)^2, \ \ \Pi = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{\infty}\omega_i^2(q_i)^2 - \sum_{i=1}^{\infty}\left\langle P,w_i\right\rangle q_i \, . \tag{18}$$

Подставляя (18) в уравнение Лагранжа (15), получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений для нахождения функций $q_i(t)$

$$\frac{d^2 q_i}{dt^2} + \omega_i^2 q_i = \left\langle P,w_i\right\rangle \ , \ i = 1,\ldots,\infty. \tag{19}$$

Пусть внешняя нагрузка равна произведению двух функций $P(x,t) = P_1(x)P_2(t)$, тогда решение (19) при нулевых начальных условиях имеет вид интеграла Дюамеля

$$q_i(t) = \frac{\left\langle P_1,w_i\right\rangle}{\omega_i}\int_0^t P_2(\tau)\sin(\omega_i(t-\tau))d\tau \, . \tag{20}$$

Функции Грина $\mathbf{u}_{Gj}(x,t-\tau)$ определяются с помощью уравнения Лагранжа (15), в котором внешняя нагрузка задается в виде $P_j = \delta(x - x_j)\delta(t-\tau)$. В этом случае

$$q_i(t-\tau) = \frac{w_i(x_j)}{\omega_i}\sin(\omega_i(t-\tau)) \, . \tag{21}$$

Подстановкой (21) в (16) получим формулу для вычисления функций Грина

$$\mathbf{u}_{Gj}(x,t-\tau) = \sum_{i=1}^{\infty}\frac{\mathbf{u}_i(x)\mathbf{u}_i(x_j)}{\omega_i}\sin(\omega_i(t-\tau)) \, . \tag{22}$$

Собственные формы и частоты колебаний балки С.П. Тимошенко определяются из уравнения

$$\mathbf{C}(\mathbf{u}_i) = \omega_i^2\ \mathbf{A}(\mathbf{u}_i), \tag{23}$$

где $\mathbf{A}(\mathbf{u}_i) = \left\{\rho s w_i, \dfrac{\psi_i}{c_h^2}\right\}^T$.

В безразмерной форме уравнение (23) имеет вид

$$\mathbf{C}^*(\overline{\mathbf{u}}_i) = \overline{\omega}_i^2\ \mathbf{A}^*(\overline{\mathbf{u}}_i), \tag{24}$$

где $\overline{\omega}_i^2 = \dfrac{\omega_i^2 l^2}{c_k^2}$, $\xi = \dfrac{x}{l}$, $\overline{\mathbf{u}}_i = \{\overline{w}_i(\xi), \psi_i(\xi)\}^T$, $\overline{w}_i = \dfrac{w_i}{l}$,

$$\mathbf{A}^*(\overline{\mathbf{u}}_i) = \begin{Bmatrix} \overline{w}_i \\ \dfrac{c_k^2}{c_h^2}\psi_i \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{C}^*(\overline{\mathbf{u}}_i) = \begin{Bmatrix} -\dfrac{\partial^2 \overline{w}_i}{\partial\xi^2} + \dfrac{\partial\psi_i}{\partial\xi} \\ -\dfrac{\partial^2\psi_i}{\partial\xi^2} - Cc_k^2 l^2\left(\dfrac{\partial\overline{w}_i}{\partial\xi} - \psi_i\right) \end{Bmatrix}.$$

Собственные формы балки С.П. Тимошенко определяются из уравнения (24) методом последовательных приближений [7] с помощью уравнения

$$\mathbf{C}^*(\overline{\mathbf{u}}_i^k) = \mathbf{A}^*(\overline{\mathbf{u}}_i^{k-1}) \tag{25}$$

В расчетах система двух уравнений второго порядка (25) заменятся системой четырех уравнений первого порядка

$$\frac{d\mathbf{V}}{d\xi} = \mathbf{KV} + \mathbf{S}\cdot \tag{26}$$

где $\mathbf{V} = \left\{\overline{w}_i^k, \dfrac{\partial\overline{w}_i^k}{\partial\xi}, \psi_i^k, \dfrac{\partial\psi_i^k}{\partial\xi}\right\}^T$, $\mathbf{S} = \left\{0, -\overline{w}_i^{k-1}, 0, -\dfrac{c_k{}^2}{c_h{}^2}\psi_i^{k-1}\right\}^T$,

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -C\cdot c_k^2\cdot l^2 & C\cdot c_k^2\cdot l^2 & 0 \end{bmatrix}.$$

Система (25) решается методом прогонки по схеме Годунова, которая предусматривает ортонормирование и ортогонализацию векторов в процессе интегрирования.

Собственные частоты определяются по формуле Релея [7].

В качестве примера рассматриваются свободные колебания балки с одной ОС. Длина и ширина балки соответственно равны $l = 0{,}27$ м и $b = 0{,}02$ м. Один конец балки заделан, а другой свободен. ОС расположена на свободном краю балки и имеет форму сферической поверхности диаметром 0,01 м. Физические параметры балки и ОС следующие: $E = 210$ ГПа; $\mu = 0{,}27$. Начальная деформация балки обеспечивалась сосредоточенной силой, приложенной к свободному краю. Эта сила создавала на свободном конце балки перемещение равное 5 мм. Зазор Δ_0 между недеформированной балкой и ОС принимался равным нулю.

Результаты расчетов приведены на рис. 1– 2. На рис. 1 представлены реакции R в ОС на первом ее взаимодействии с балкой. Толщины балки h принимались равными 5 и 10 мм. На рис. 2 показано изменение зазора между балкой и ОС.

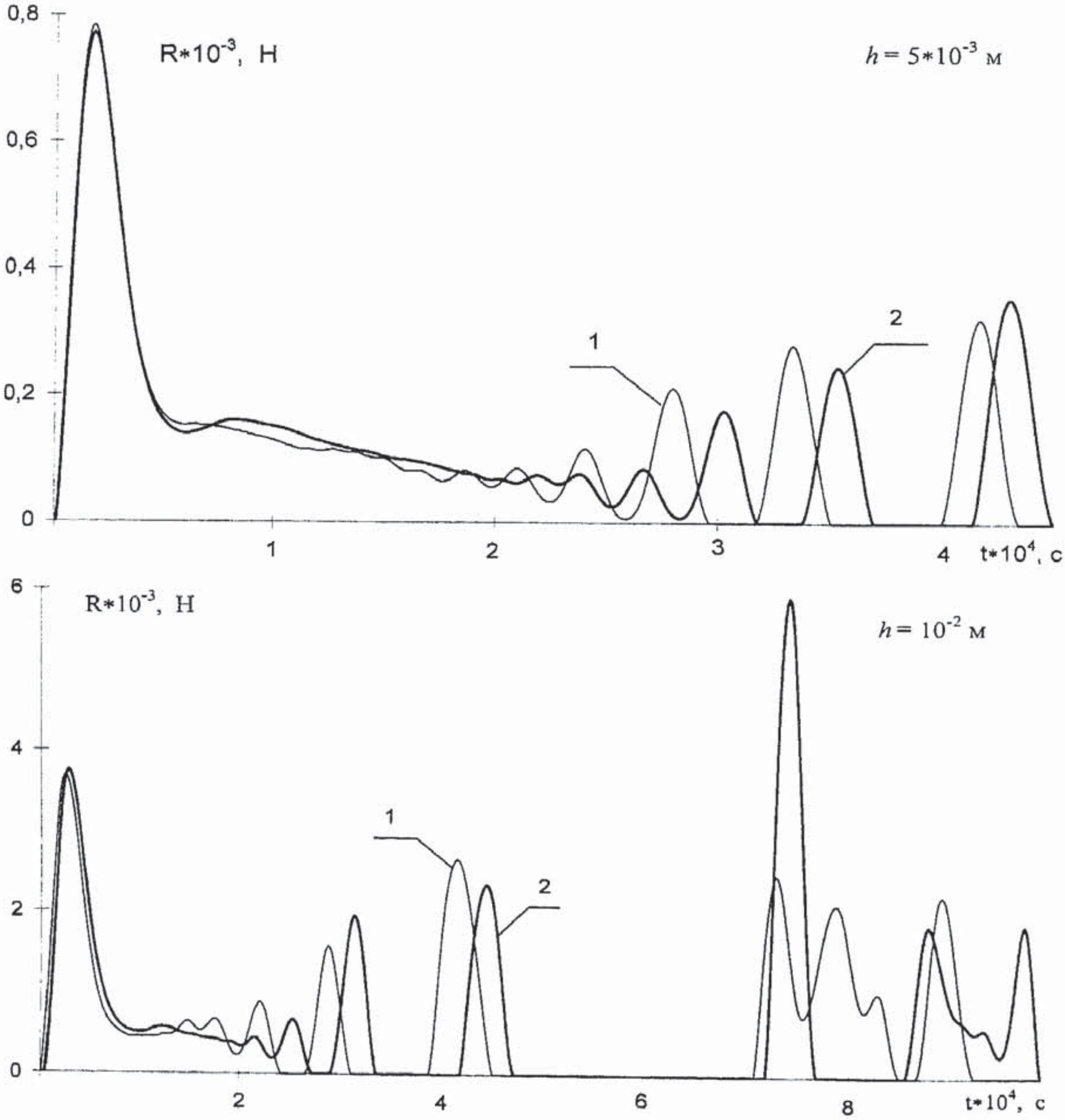

Рис. 1. Влияние инерции вращения сечений балки и деформации поперечного сдвига на реакцию в ОС: 1 (2) - расчет без учета (с учетом) инерции вращения сечений и деформации поперечного сдвига

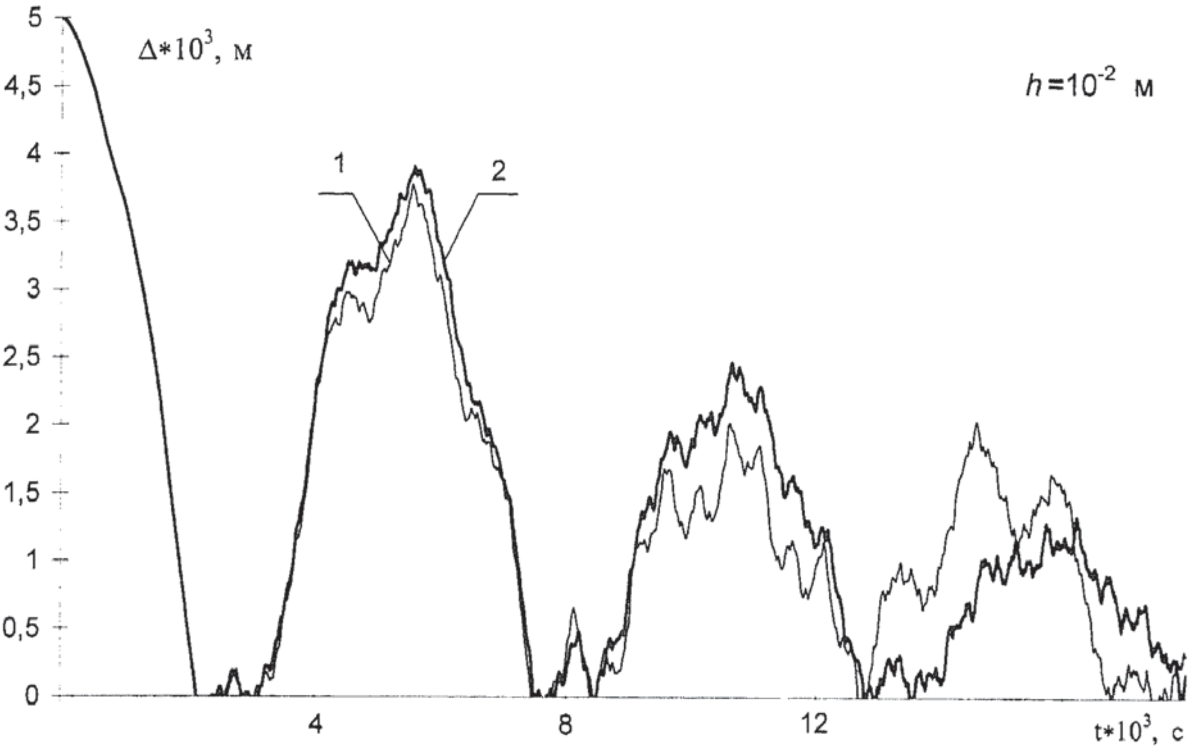

Рис. 2. Влияние инерции вращения сечений балки и деформации поперечного сдвига на зазор Δ между балкой и ОС: 1 (2) - расчет без учета (с учетом) инерции вращения сечений и деформации поперечного сдвига

При определении функций $\mathbf{u}_{G_J}(x,t-\tau)$, $\mathbf{u}_0(x,t)$, $\mathbf{u}_p(x,t)$ бесконечные ряды заменяются конечными. От числа удерживаемых членов ряда N зависит точность расчета. Необходимое значение N определяется путем численного исследования сходимости решения.

Точность расчета определялась по силе взаимодействия балки с ОС $R_N(t)$. Сходимость функционального ряда $R_N(t)$ оценивалась коэффициентом

$$\delta_N = \frac{\int_0^T \left|R_N(t) - R_{150}\right| dt}{\int_0^T R_{150}(t) dt} 100\%, \tag{23}$$

где $R_N(t)$, $R_{150}(t)$ – реакции в ОС, которые определялись при учете в решении N и 150 членов ряда, соответственно, T - время первого взаимодействия балки с ОС.

На рис. 3 представлены зависимости $\delta_N(N)$, полученные для различных значений толщин балки h.

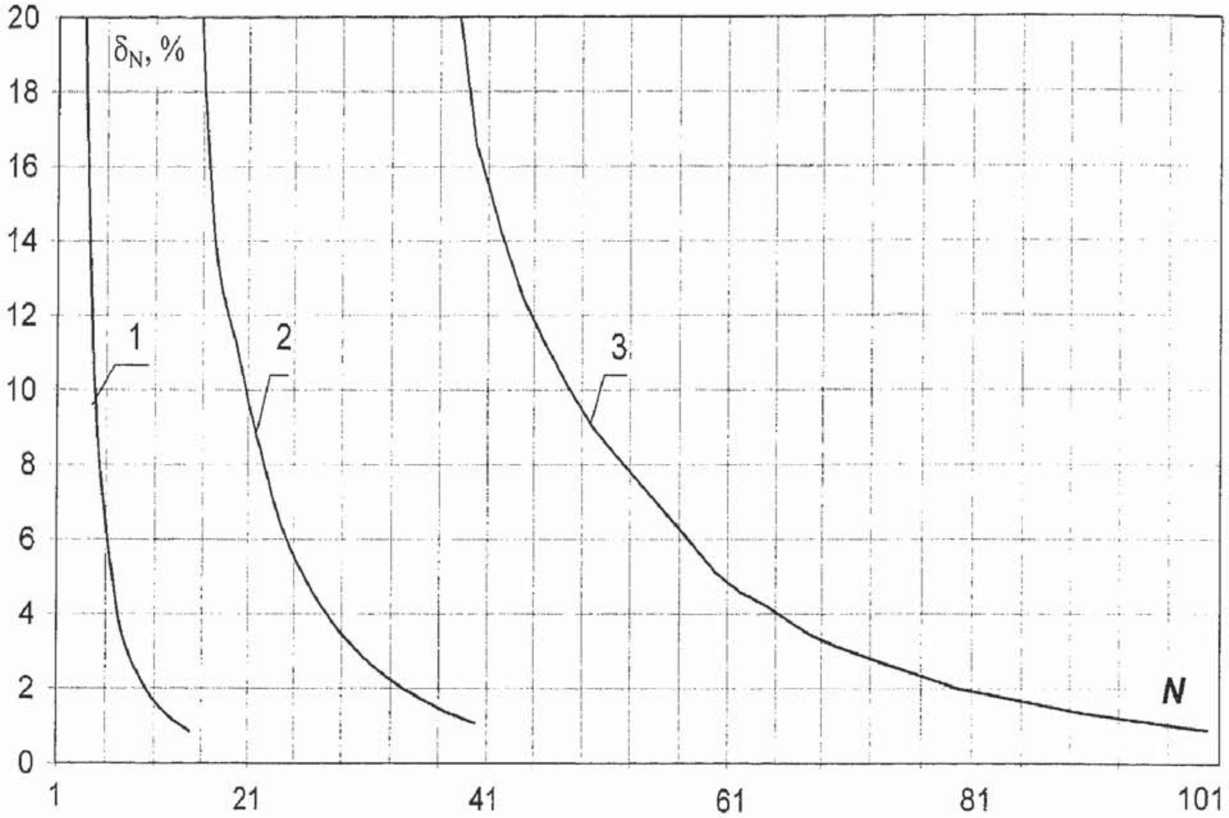

Рис. 3. Сходимость решения в зависимости от числа удерживаемых в решении членов ряда N : 1 – $h = 10^{-2}$ м; 2 – $h = 5 \cdot 10^{-3}$ м; 3 – $h = 2 \cdot 10^{-3}$ м

Другим параметром, определяющим точность расчета, является интервал времени Δt между узловыми точками.

Относительная точность определения реакции в ОС оценивалась параметром δ_t:

$$\delta_t = \frac{\int_0^T \left| R_1(t) - R_{0,5} \right| dt}{\int_0^T R_1(t) dt} 100\%, \tag{24}$$

где $R_1(t)$, $R_{0,5}(t)$ – реакция в ОС, определяемая при шаге между узловыми точками равном Δt и $\dfrac{\Delta t}{2}$ соответственно.

На рис 4. представлена зависимость $\delta_t(\Delta t)$, полученная для балки толщиной $h = 5$ мм.

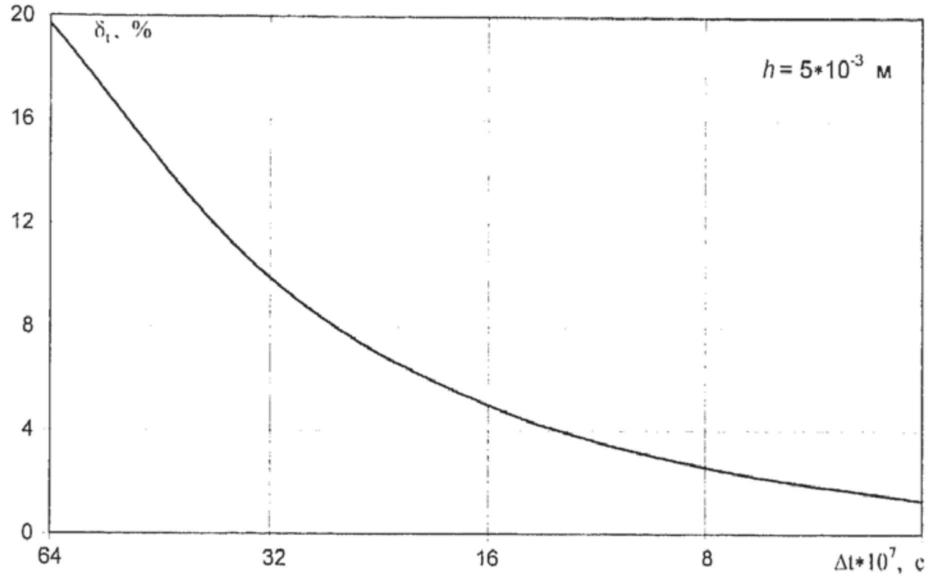

Рис. 4. Сходимость решения в зависимости от шага Δt

ВЫВОДЫ

1. Предложена методика расчета колебаний балки с ОС, учитывающая деформацию поперечного сдвига и инерцию вращения сечений балки.

2. Установлено, что:

а) если жесткость ОС на несколько порядков выше жесткости балки, то инерция вращения сечений и деформация поперечного сдвига сильно влияет на реакции в ОС и колебания балки даже при малых значениях $\frac{h}{l}$;

б) учет инерции вращения сечений и деформации поперечного сдвига уменьшает амплитуду высокочастотных осцилляций реакции в ОС;

в) для определения реакции в ОС с точностью $\approx 1 \div 3\%$ необходимо шаг Δt принимать равным $\frac{2\pi}{12\omega_{max}}$, где ω_{max} – максимальная собственная частота балки, используемая в решении ($\omega_{max} = \omega_N$ определяется путем численного исследования сходимости решения (рис.3).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Кохманюк С.С. Динамика конструкций при воздействии кратковременных нагрузок / С.С. Кохманюк, А.С. Дмитриев, Г.А. Шелудько, А.Н. Шупиков и др. – Киев: Наукова думка, 1989. – 304 с.
2. Баженов В.А. Устойчивость и колебания деформируемых систем с односторонними связями / В.А. Баженов, Е.А. Гоцуляк, Г.С. Кондаков, А.И. Оглобля. – Киев: Выща школа. Головное изд-во, 1989. – 399 с.
3. Люминарский И.Е. Расчет колебаний упругих систем с инерционными односторонними связями // Известия вузов. Машиностроение. – 2006. – №6. – С. 8–14.
4. Тимошенко С.П. Колебания в инженерном деле. – М.; Л.: Машиностроение, 1967. – 444 с.
5. Марчук Г.И. Методы вычислительной математики: Учеб. пособие. – 3-е изд., перераб. и доп. – М.: Наука. Физматлит, 1989. – 608 с.
6. Рабинович И.М. Вопросы теории статического расчета сооружений с односторонними связями. – М.: Стройиздат, 1975. – 145 с.
7. Вибрации в технике: Справочник. В 6т. / Под ред. К.В. Фролова. – М.: Машиностроение, 1999. – Т.1. – 504 с.