

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ЧАСТОТ СВОБОДНЫХ КОЛЕБАНИЙ ПРОВОДА НАХОДЯЩЕГОСЯ В СТАЦИОНАРНОМ ПОТОКЕ

Асп. А.И. СОКОЛОВ

Изложен алгоритм численного определения собственных значений (частот) при малых колебаниях провода линии электропередачи (ЛЭП) относительно его состояния равновесия в потоке, которое определяется из нелинейных уравнений. Провод рассматривается как стержень, обладающий крутильной и изгибной жесткостью, в отличие от классической модели провода как абсолютно гибкого стержня. Это существенно осложняет исследование задач статики и динамики проводов, но дает более достоверную информацию для оценки их прочности и надежности при нагружении в экстремальных условиях.

На рис. 1 показан провод линии электропередачи (ЛЭП) между двумя опорами, находящийся в стационарном потоке воздуха, имеющего скорость \bar{v}_0 .

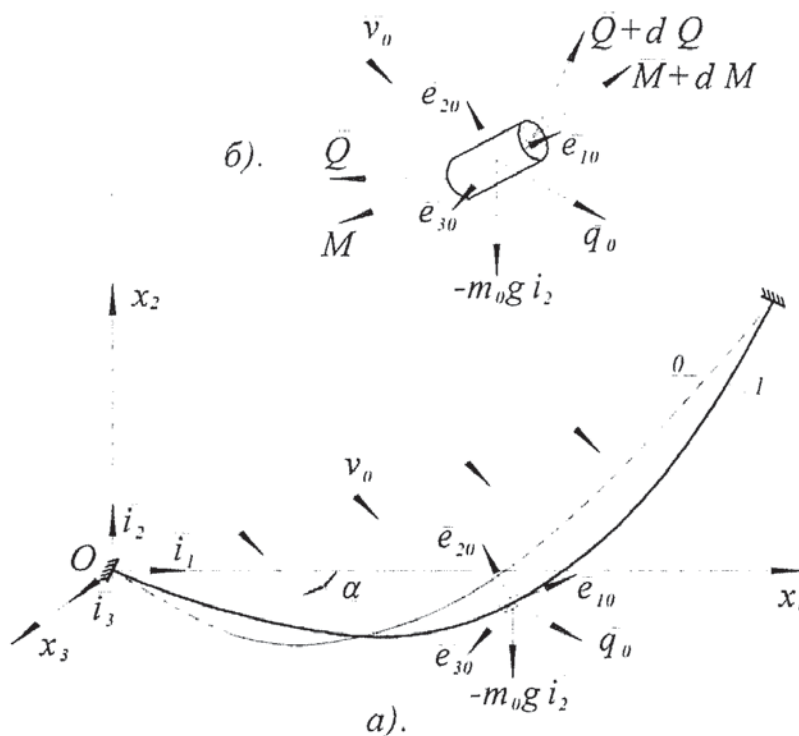


Рис.1

Ограничимся случаем, когда вектор скорости \bar{v}_0 параллелен плоскости x_1Ox_3 . Под действием потока (распределенных аэродинамических сил \bar{q}_0), провод отклоняется от вертикальной плоскости x_1Ox_2 (это состояние на рис. 1 обозначено “0”) и его осевая линия становится пространственной кривой (состояние “1”). Напряженно-деформированное состояние (НДС) провода “1” зависит от сил веса ($-m_0g\bar{i}_2$) и от аэродинамических сил \bar{q}_0 . Поэтому уравнения малых колебаний провода относительно состояния “1” зависят от статического НДС и, как следствие этого, частоты зависят от статического НДС. Т.е. частоты зависят не только от модуля вектора скорости \bar{v}_0 , от которого зависят аэродинамические силы \bar{q}_0 , но и от формы осевой линии провода, которую провод принимает в потоке.

В зависимости от модуля скорости потока осевая линия провода может очень сильно отличаться от осевой линии в спокойной атмосфере (состояние “0”). Поэтому при определении частот необходимо (и в этом основная сложность) численными методами решать нелинейные уравнения равновесия провода, нагруженного аэродинамическими распределенными силами \bar{q}_0 . Колебаниям проводов посвящено большое число публикаций, например [1-3], но в этих работах не учитывалось статическое НДС провода, вызванное стационарным потоком.

Рассматривая элемент “жесткого” провода в стационарном потоке (рис. 1б), можно получить нелинейные уравнения равновесия в связанной системе координат, которые, например, приведены в [4] (в безразмерной записи).

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{Q}_0}{d\eta} + \bar{\kappa}_0 \times \bar{Q}_0 + \bar{q} &= 0; \\ \frac{d\bar{M}_0}{d\eta} + \bar{\kappa}_0 \times \bar{M}_0 + \bar{e}_{10} \times \bar{Q}_0 &= 0; \\ L_{10} \frac{d\bar{\theta}_0}{d\eta} + L^{(0)} \bar{\kappa}_0^{(1)} - \bar{\kappa}_0 &= 0; \\ \frac{d\bar{u}_0}{d\eta} + \bar{\kappa}_0 \times \bar{u}_0 + (l_{11}^0 - 1)\bar{e}_{10} + l_{21}^0 \bar{e}_{20} + l_{31}^0 \bar{e}_{30} &= 0; \\ \bar{M}_0 &= A(\bar{\kappa}_0 - \bar{\kappa}_0^{(1)}), \end{aligned} \tag{1}$$

где $\tilde{d}/d\eta$ - локальная производная (далее "тильда" опускается); η - безразмерная координата; \bar{Q}_0 - вектор внутренних сил; $\bar{\kappa}_0$ - вектор кривизны; \bar{q} - вектор распределенных (безразмерных) внешних сил; \bar{M}_0 - вектор внутренних моментов; $\bar{\theta}_0$ - вектор углов поворота связанных осей, относительно состояния "0"; $\bar{\kappa}_0^{(1)}$ - вектор кривизн осевой линии провода в состоянии "0"; \bar{u}_0 - вектор перемещений; A - диагональная матрица жесткостей провода A_{ii} (A_{11} - крутильная жесткость, A_{22} , A_{33} - изгибные жесткости); l_{ij}^0 - элементы матрицы $L^{(0)}$;

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & 0 & 0 \\ 0 & A_{22} & 0 \\ 0 & 0 & A_{33} \end{bmatrix}; L_{10} = \begin{bmatrix} \cos \vartheta_{20} \cdot \cos \vartheta_{30} & 0 & -\sin \vartheta_{20} \\ -\sin \vartheta_{30} & 1 & 0 \\ \sin \vartheta_{20} \cdot \cos \vartheta_{30} & 0 & \cos \vartheta_{20} \end{bmatrix};$$

$$L^{(0)} = \begin{bmatrix} \cos \vartheta_{20} \cdot \cos \vartheta_{30} & \cos \vartheta_{20} \cdot \sin \vartheta_{30} \cdot \cos \vartheta_{10} + \cos \vartheta_{20} \cdot \sin \vartheta_{30} \cdot \sin \vartheta_{10} - \\ & + \sin \vartheta_{20} \cdot \sin \vartheta_{10} & -\sin \vartheta_{20} \cdot \cos \vartheta_{10} \\ -\sin \vartheta_{30} & \cos \vartheta_{10} \cdot \cos \vartheta_{30} & \cos \vartheta_{30} \cdot \sin \vartheta_{10} \\ \sin \vartheta_{20} \cdot \cos \vartheta_{30} & \sin \vartheta_{20} \cdot \sin \vartheta_{30} \cdot \cos \vartheta_{10} - \sin \vartheta_{20} \cdot \sin \vartheta_{30} \cdot \sin \vartheta_{10} + \\ & -\cos \vartheta_{20} \cdot \sin \vartheta_{10} & +\cos \vartheta_{20} \cdot \cos \vartheta_{10} \end{bmatrix}.$$

В (1) входит распределенная аэродинамическая сила \bar{q}_0 , которая может быть представлена через проекции в связанных осях в виде

$$\bar{q}_0 = \sum_{j=1}^3 q_{j0} \bar{e}_{j0} = q_{10} \bar{e}_{10} + \bar{q}_{n0}, \quad (2)$$

где $q_{10} \bar{e}_{10}$ - аэродинамическая сила, направленная по касательной к осевой линии стержня; \bar{q}_{n0} - нормальная сила лобового сопротивления ($\bar{q}_{n0} = q_{n02} \bar{e}_{20} + q_{n03} \bar{e}_{30}$).

Модули безразмерных сил \bar{q}_{10} и \bar{q}_{n0} равны [5-7]:

$$|\bar{q}_{10}| = \frac{c_1 \rho v_{10}^2 d}{2m_0 g};$$

$$|\bar{q}_{n0}| = \frac{c_n \rho v_{n0}^2 d}{2m_0 g}, \quad (3)$$

где c_1, c_n - аэродинамические коэффициенты, ρ - плотность воздуха; d - диаметр провода; $v_{10} = v_0 \sin \varphi_{a0}$, $v_{n0} = v_0 \cos \varphi_{a0}$. Проекция \bar{q}_{10} и силы лобового сопротивления \bar{q}_{n0} на связанные оси равны [4] (ограничимся случаем, когда α (рис. 1) равен 90°):

$$\begin{aligned} q_{10} &= \tilde{q}_{10} \cos^2 \varphi_{a0}; \\ q_{n02} &= q_{n0} \sin \varphi_{a0} l_{23}^{(0)}; \\ q_{n03} &= q_{n0} \sin \varphi_{a0} l_{33}^{(0)}, \\ (\cos \varphi_{a0} &= l_{13}^{(0)}, \quad \sin \varphi_{a0} = \sqrt{1 - l_{13}^{(0)2}}) \end{aligned} \quad (4)$$

$$\text{где } \tilde{q}_{10} = \frac{c_1 \rho v_0^2 d}{2m_0 g}, \quad q_{n0} = \frac{c_n \rho v_0^2 d}{2m_0 g}.$$

Система нелинейных векторных уравнений (1) решается приближенным численным методом последовательных нагружений [4]. Идея метода заключается в том, что “полная” нагрузка $\bar{q}(|\bar{v}_0|)$, соответствующая скорости потока \bar{v}_0 представляется в

виде суммы нагрузок $\Delta \bar{q}$, зависящих от Δv_0 ($v_0 = \sum_{j=1}^k \Delta v_{0j}$), при этом считается,

что на каждом последующем шаге нагружения ($\Delta q^{(j)}$) НДС стержня мало изменяется, и поэтому это состояние равновесия можно определить из линеаризованных уравнений равновесия. Полагая на k -ом шаге нагружения

$$\begin{aligned} \bar{Q}_0 &= \bar{Q}_0^{(k)} = \bar{Q}_0^{(k-1)} + \Delta \bar{Q}^{(k)}; \\ \bar{M}_0 &= \bar{M}_0^{(k)} = \bar{M}_0^{(k-1)} + \Delta \bar{M}^{(k)}; \\ \bar{\chi}_0 &= \bar{\chi}_0^{(k)} = \bar{\chi}_0^{(k-1)} + \Delta \bar{\chi}^{(k)}; \\ (\Delta \bar{\chi}^{(k)} &= A^{-1} \Delta \bar{M}^{(k)}), \end{aligned} \quad (5)$$

где $\bar{Q}^{(k-1)}$, $\bar{M}^{(k-1)}$, $\bar{\kappa}^{(k-1)}$ зависят от предыдущих $(k-1)$ шагов нагружения аэродинамическими силами

$$\Delta \bar{q}_n^{(1)}, \dots, \Delta \bar{q}_n^{(k-1)} \quad (\bar{q}_n(v_0) = \sum_{i=1}^r \Delta \bar{q}_n^{(i)}) \quad \text{и}$$

$$\Delta \bar{q}_1^{(1)}, \dots, \Delta \bar{q}_1^{(k-1)} \quad (\bar{q}_1(v_0) = \sum_{i=1}^r \Delta \bar{q}_1^{(i)}).$$

Воспользовавшись (5) после линеаризации системы (1) получаем систему уравнений равновесия провода на k -ом шаге нагружения:

$$\begin{aligned} \frac{d\Delta \bar{Q}^{(k)}}{d\eta} + A_x^{(k-1)} \Delta \bar{Q}^{(k)} + A_Q^{(k-1)} A^{-1} \Delta \bar{M}^{(k)} + \Delta \bar{q}_n^{(k)} + \Delta \bar{q}_1^{(k)} &= 0; \\ \frac{d\Delta \bar{M}^{(k)}}{d\eta} + A_x^{(k-1)} \Delta \bar{M}^{(k)} + A_M^{(k-1)} A^{-1} \Delta \bar{M}^{(k)} + A_1 \bar{Q}^{(k)} &= 0; \\ \frac{d\Delta \bar{\theta}^{(k)}}{d\eta} + A_x^{(k-1)} \Delta \bar{\theta}^{(k)} - A^{-1} \Delta \bar{M}^{(k)} &= 0; \\ \frac{d\bar{u}^{(k)}}{d\eta} + A_x^{(k-1)} \bar{u}_0 + A_1 \Delta \bar{\theta}^{(k)} &= 0; \end{aligned} \tag{6}$$

$$\Delta \bar{M}^{(k)} = A \Delta \bar{\kappa}^{(k)};$$

$$(\Delta \bar{\theta}^{(k)}) = \left\{ \Delta \vartheta_1^{(k)} \quad \Delta \vartheta_2^{(k)} \quad \Delta \vartheta_3^{(k)} \right\}^T,$$

где матрицы $A_x^{(k-1)}$, $A_Q^{(k-1)}$, $A_M^{(k-1)}$ зависят от НДС стержня на $(k-1)$ шаге нагружения:

$$A_x^{(k-1)} = \begin{bmatrix} 0 & -\kappa_3^{(k-1)} & \kappa_2^{(k-1)} \\ \kappa_3^{(k-1)} & 0 & -\kappa_1^{(k-1)} \\ -\kappa_2^{(k-1)} & \kappa_1^{(k-1)} & 0 \end{bmatrix};$$

$$A_Q^{(k-1)} = \begin{bmatrix} 0 & Q_3^{(k-1)} & -Q_2^{(k-1)} \\ -Q_3^{(k-1)} & 0 & Q_1^{(k-1)} \\ Q_2^{(k-1)} & -Q_1^{(k-1)} & 0 \end{bmatrix};$$

$$A_M^{(k-1)} = \begin{bmatrix} 0 & M_3^{(k-1)} & -M_2^{(k-1)} \\ -M_3^{(k-1)} & 0 & M_1^{(k-1)} \\ M_2^{(k-1)} & -M_1^{(k-1)} & 0 \end{bmatrix},$$

$$(\chi_i^{(k-1)} = \chi_i^{(0)} + \sum_{j=1}^{k-1} \Delta \chi_i^{(j)}, Q_i^{(k-1)} = \sum_{j=1}^{k-1} \Delta Q_i^{(j)}, M_i^{(k-1)} = \sum_{j=1}^{k-1} \Delta M_i^{(j)}).$$

Точность численного решения можно увеличить, воспользовавшись итерациями на каждом шаге нагружения, "уточняя" кривизны. Из системы (6) находим $\Delta \bar{\chi}^{(k)}$ ($\Delta \chi_i^{(k)}$) и решаем уравнения на k -ом шаге нагружения с уточненной матрицей $A_{\chi}^{(k-1)}$, соответствующей, например, первой итерации $A_{\chi}^{(k-1)(1)}$. Элементы матрицы $A_{\chi}^{(k-1)(1)}$ равны

$$\chi_i^{(k-1)(1)} = \chi_i^{(k-1)} + \Delta \chi_i^{(k)(0)}, \quad (7)$$

где $\Delta \chi_i^{(k)(0)} = M_i^{(k)} / A_{ii}$. Решив уравнение (6) с матрицей $A_{\chi}^{(k-1)(1)}$,

находим $\Delta \chi_i^{(k)(1)}$ ($\Delta \chi_i^{(k)(1)} = M_i^{(k)(1)} / A_{ii}$), получаем матрицу $A_{\chi}^{(k-1)(2)}$

и т.д.

На каждом шаге нагружения приращения нагрузок зависят от Δv_{0j} и от углов поворота связанных осей $\Delta \vartheta_j^{(k)}$, от которых зависят элементы $l_{13}^{(0)}$, $l_{23}^{(0)}$, $l_{33}^{(0)}$, входящие в выражения проекций сил лобового сопротивления (4).

Так как на каждом шаге нагружения углы поворота связанных осей $\Delta \vartheta_j^{(k)}$ считаются малыми, то после $(k-1)$ шагов нагружения получаем для рассматриваемого частного случая, когда $\alpha = 90^\circ$, а осевая линия провода до нагружения есть плоская

$$\text{кривая, } l_{13}^{(0)(k-1)} = -\sum_{j=1}^{k-1} \Delta \vartheta_2^{(j)}; l_{23}^{(0)(k-1)} = \sum_{j=1}^{k-1} \Delta \vartheta_1^{(j)}; l_{33}^{(0)(k-1)} = 1.$$

(В $\Delta \bar{q}_1^{(1)}$, $\Delta \bar{q}_n^{(1)}$ (система (6)) входят полные углы поворота связанных осей после $(k-1)$ шагов нагружения).

Определив статическое напряженно-деформированное состояние провода, соответствующее скорости потока v_0 , можно получить уравнения малых колебаний провода относительно этого состояния, например, можно воспользоваться системой уравнений, приведенными в [8] (четвертая глава §4.1), которые можно представить в виде одного векторного уравнения (без учета сил вязкого сопротивления):

$$A^{(1)} \frac{\partial^2 \bar{Z}}{\partial \tau^2} + \frac{\partial \bar{Z}}{\partial \eta} + A^{(2)} \bar{Z} = 0, \quad (8)$$

где $\bar{Z}(\eta, \tau) = \{\Delta \bar{Q} \quad \Delta \bar{M} \quad \bar{\theta} \quad \bar{u}\}^T$;

$$A^{(1)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -E \\ 0 & 0 & -J & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix};$$

$$A^{(2)} = \begin{bmatrix} A_{x_0} & A_{Q_0} A^{-1} & 0 & 0 \\ A_1 & A_{x_0} + A_{M_0} A^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & -A^{-1} & A_{x_0} & 0 \\ 0 & 0 & A_1 & A_{x_0} \end{bmatrix}.$$

Компоненты вектора \bar{Z} характеризуют динамическое состояние провода, возникающее при колебаниях. Так как определяются частоты колебаний стержня и их зависимость от статического НДС, вызванного потоком, то возникающие при колебаниях дополнительные составляющие аэродинамических сил не учитываются. Поэтому получаем однородное уравнение (8), которое описывает свободные колебания провода в потоке. Так как элементы матриц в (8) от времени не зависят, то система провод-поток (без учета динамических составляющих сил) консервативна. Решение уравнения (8) ищем в виде:

$$\bar{Z}(\eta, \tau) = \bar{Z}_0(\eta) e^{i\beta\tau}. \quad (9)$$

Подставляя (9) в уравнение (8) получаем:

$$\frac{d\bar{Z}_0}{d\eta} + (A^{(2)} + \beta^2 A^{(1)})\bar{Z}_0 = 0, \quad (10)$$

где $\bar{Z}_0 = \{\Delta\bar{Q}_0 \quad \Delta\bar{M}_0 \quad \bar{\theta}_0 \quad \bar{u}_0\}^T$.

Решение уравнения (10)

$$\bar{Z}_0 = K(\eta, \beta)\bar{C}; \quad (11)$$

$$(K(0, \beta) = E, \quad \bar{C} = \{\bar{C}_1 \quad \bar{C}_2 \quad \bar{C}_3 \quad \bar{C}_4\}^T),$$

должно удовлетворять краевым условиям. В рассматриваемой задаче имеем: 1). $\eta = 0$
 $\bar{\theta}_0(0) = \bar{u}_0(0) = 0$; 2). $\eta = 1$ $\bar{\theta}_0(1) = \bar{u}_0(1) = 0$.

Из условия при $\eta = 0$ получаем $\bar{C}_3 = \bar{C}_4 = 0$. Из условия при $\eta = 1$ получаем систему однородных алгебраических уравнений:

$$\sum_{i=1}^3 (k_{ji}(1, \beta)C_{1i} + k_{j(3+i)}(1, \beta)C_{2i}) = 0, \quad (j = 1, \dots, 6). \quad (12)$$

Значения β_j , при которых определитель системы (12) обращается в нуль, являются частотами.

В качестве примера был рассмотрен провод диаметром $d = 10$ мм; плотности $\rho_0 = 7800$ кг/м³; длиной $l = 20$ м; с координатами правого конца $(0,7 \cdot l; 0,4 \cdot l; 0)$. Были взяты следующие аэродинамические коэффициенты: $c_1 = 0,1$; $c_n = 1,2$. Плотность потока ветра $\rho = 1,25$ кг/м³; угол набегания потока (рис. 1) $\alpha = 90^\circ$; Величина $p_0 = 0,7$ 1/с.

Были определены три первые частоты свободных колебаний для ряда скоростей потока v_0 . Графики зависимости частот от скорости стационарного потока показаны на рис.2.

Из полученных результатов следует, что частоты могут существенно зависеть от статического напряженно-деформированного состояния провода, находящегося в потоке.

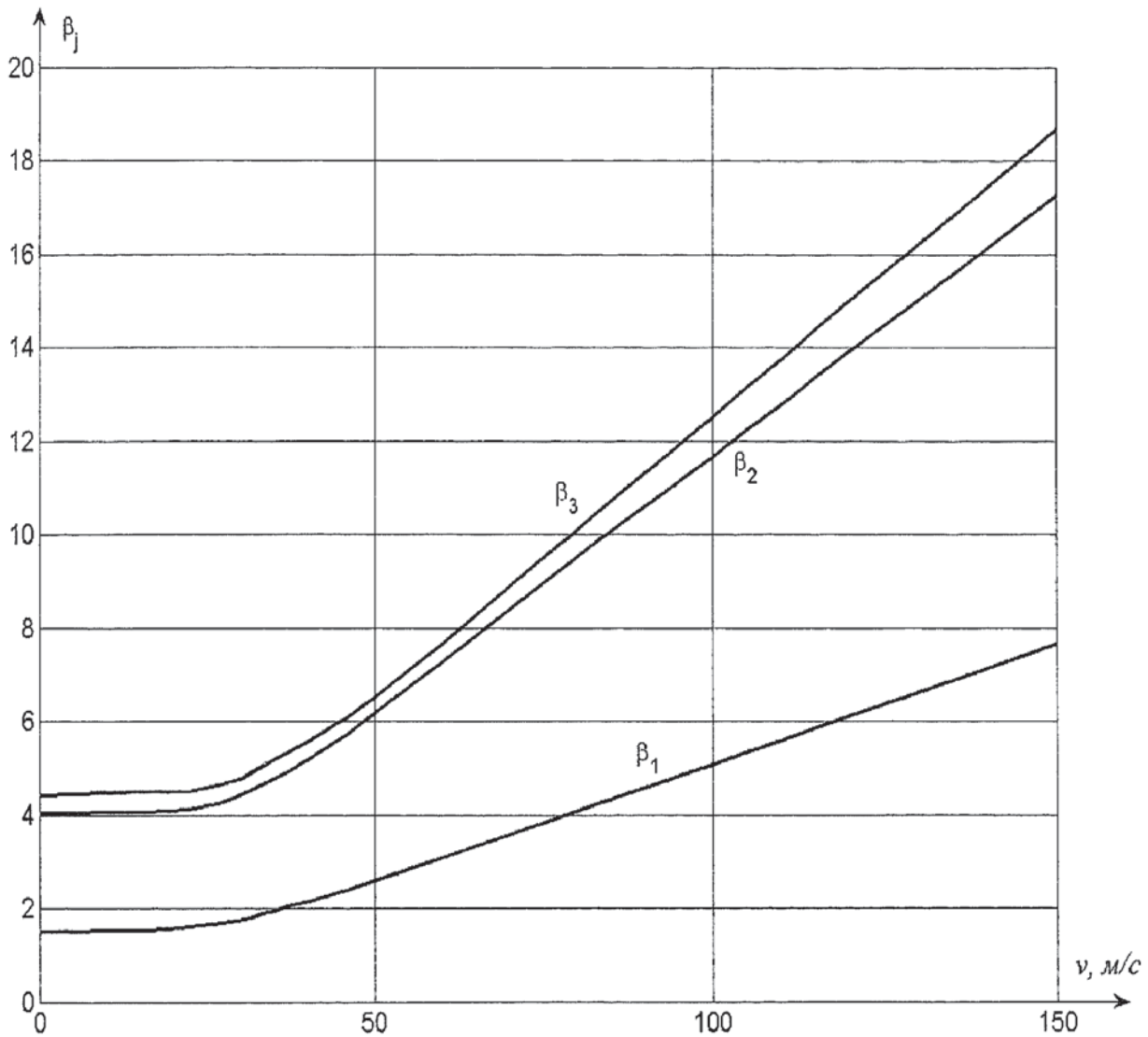


Рис.2

Так, например, при скорости потока $v_0 = 60$ м/с частоты в два раза больше, чем при $v_0 = 0$. зложенный алгоритм позволяет определять частоты свободных колебаний жесткого провода, находящегося в стационарном потоке. Знание частот свободных колебаний провода в потоке необходимо при изучении нелинейных колебаний.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Казакевич М.И. Аэродинамическая устойчивость надземных и висящих трубопроводов. – М.: Недра, 1977. – 200 с.
2. Графский И.Ю., Казакевич М.И. Аэродинамика плохообтекаемых тел. – Днепропетровск: ДГУ, 1983. – 116 с.

3. Панайотов Л.Д. Собственные формы и частоты колебаний линий электропередач на вертикальных подвесках. МТТ АН СССР 1970, №5, с. 15-22.
4. Светлицкий В.А. Механика стержней (т. 1: Статика). - М.: Высшая школа, 1987. - 320- с.
5. Валландер С.В. Лекции по гидроаэромеханике. - Л.: Из-во ЛГУ, 1978. - 296 с.
6. Вибрации проводов воздушных линий электропередачи. - М.: Энергия, 1972. -С. 26-46.
7. Винантс В., Риец М. Пляска проводов воздушных линий. Воздушные линии электропередачи. - М.: Энергия, 1972.- С.47-56.
8. Светлицкий В.А. Механика стержней: (т. 2: Динамика). - М.: Высшая школа, 1987. - 304 с.