

4. Молчанов, В.И. Особенности технологии изготовления червячных колес из капролона [Текст] / В.И. Молчанов // Технология металлов. – 2006. - №11. – с.27-28.
5. Молчанов, В.И. Исходные червяки для металлополимерных червячных передач [Текст] / В.И. Молчанов // Вестник машиностроения. – 2007. - №1. – с.29-31.
6. Молчанов, В.И. Механизм разрушения капролоновых зубьев червячных колес [Текст] / В.И. Молчанов // Известия ВУЗов. Машиностроение. – 2006. - №10. – с.23-26.
7. Молчанов, В.И. Новый подход к механизму разрушения капролоновых зубьев червячных колёс [Текст] / В.И. Молчанов // Тяжёлое машиностроение.-2007.-№11.-С.24-25.-ISSN 0131-1336.
8. Молчанов, В.И. Механохимия разрушения полимерных зубьев червячных колес [Текст] / В.И. Молчанов // Сборник статей по материалам Второй международной конференции «Деформация и разрушение материалов и наноматериалов.» М.: Интерконтакт наука. 2007.-С.455.- ISBN 978-5-2760-1305-3.
9. Молчанов, В.И. Проектирование червячных передач с колесами из неметаллических материалов [Текст]: учебное пособие / В.И. Молчанов, - Орел: ФГОУ ВПО ОрелГАУ, 2006. – 38с.
10. Молчанов, В.И. Червячные передачи с колесами из капролона [Текст]: монография / В.И. Молчанов. – Орёл: ФГОУ ВПО ОрёлГАУ, 2008.–98с.

621.391.535.8

## **БЛОЧНО-МАТРИЧНЫЕ УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ ИСПОЛНИТЕЛЬНЫХ МЕХАНИЗМОВ РОБОТОВ С ДРЕВОВИДНОЙ КИНЕМАТИЧЕСКОЙ СТРУКТУРОЙ**

*Канд. техн. наук, доц. А.К. КОВАЛЬЧУК, ст.препод. Д.Б. КУЛАКОВ,  
канд. техн. наук, доц. С.Е. СЕМЁНОВ*

*Представлен универсальный блочно-матричный способ представления уравнений кинематики и динамики роботов с древовидной структурой исполнительных механизмов и не закрепленных к неподвижному основанию. Показана эффективность его использования для шагающих роботов (на примере двуногого шагающего робота)*

При математическом описании кинематики и динамики исполнительных механизмов (ИМ) роботов с древовидной кинематической структурой возникают трудности, связанные с тем, что традиционный математический аппарат, используемый в робототех-

нике, рассчитан, в основном, на работу с механизмами в виде простых кинематических цепей, закрепленных одним концом к неподвижному основанию. Такие роботы применяются в основном в промышленности. Средства экстремальной робототехники имеют, как правило, более сложную кинематическую структуру. Как минимум, они не закреплены к неподвижному основанию. Наиболее сложной структурой обладают шагающие роботы.

В [1] авторами предложен способ преодоления связанных с древовидностью трудностей на основе модификации традиционных робототехнических методов при помощи элементов теории графов. Предложены способы индексации переменных, формы записи рекуррентных уравнений, рекурсивные алгоритмы расчетов.

Предлагаем блочно-матричный метод записи уравнений кинематики и динамики роботов с древовидной КС ИМ, являющийся развитием такого метода для линейных кинематических структур, известного, в частности, из [2-4]. Блочно-матричный метод позволяет получить компактную запись выражений сразу для всего ИМ, удобную для анализа.

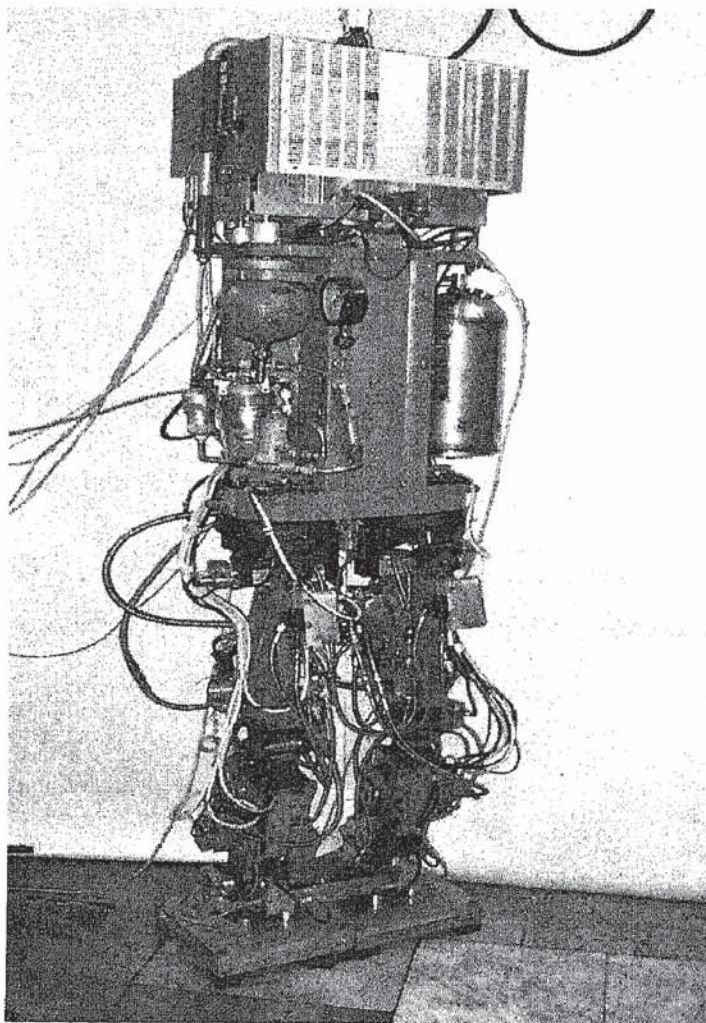


Рис. 1. Лабораторный двуногий шагающий робот, разработанный авторами

Предложенный метод использован при проведении НИР по созданию двуногих шагающих роботов (ДШР) (рис. 1), проводимых в МГТУ им. Н.Э.Баумана в МИПК совместно с кафедрой Гидромеханики, гидромашин и гидропневмоавтоматики (Э-10). Кинематическая схема разработанного авторами лабораторного робота представлена на рис. 2. В данной схеме присутствует фиктивная кинематическая цепь [1].

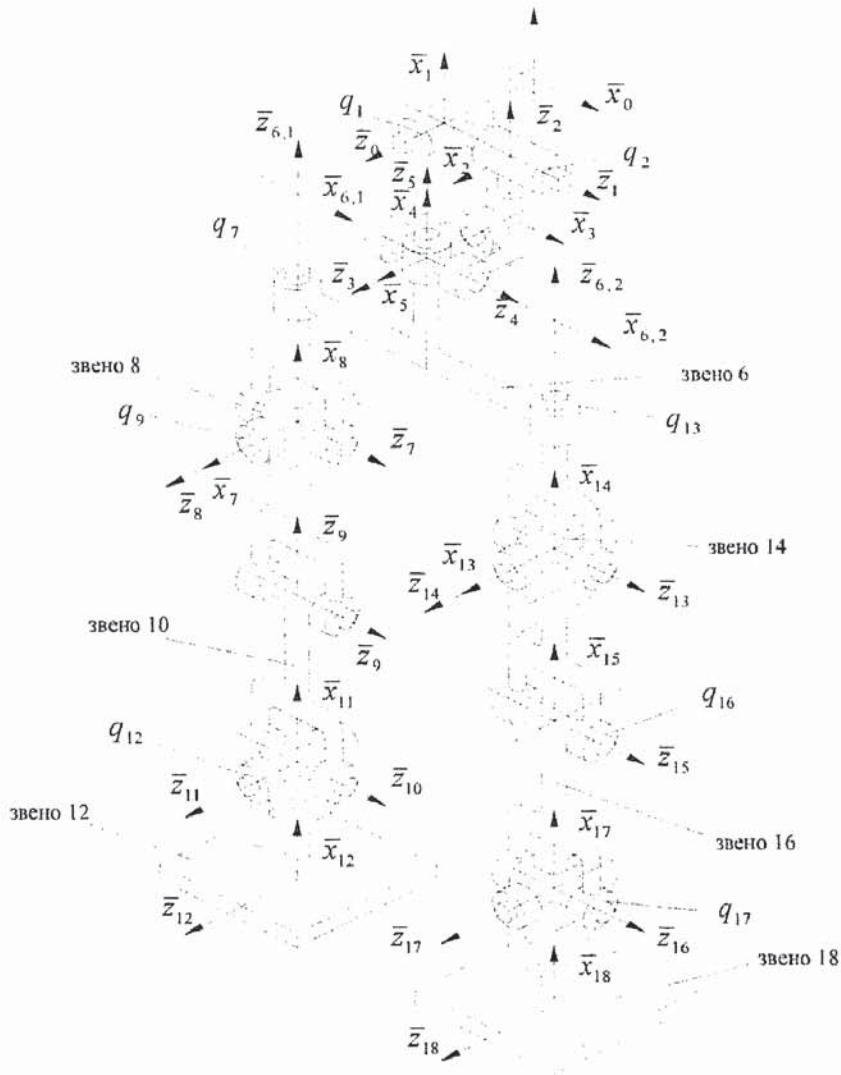


Рис. 2. Кинематическая схема исполнительного механизма лабораторного ДШР

### Описание кинематической структуры исполнительного механизма с использованием блочных матриц

Описание ветвящейся кинематической структуры робота может быть упрощено и формализовано, если применить правила и обозначения из теории графов, представив ИМ в виде древовидного направленного графа. Звенья в таком графе являются вершинами, а

соединяющие их сочленения - рёбрами. Корнем дерева считается окружающее пространство, в котором находится робот, с неподвижной инерциальной системой координат (СК), фиксированной в какой-либо точке этого пространства. Эту СК будем в дальнейшем называть абсолютной СК. Применительно к лабораторному ДШР такой граф имеет вид, представленный на рис. 3.

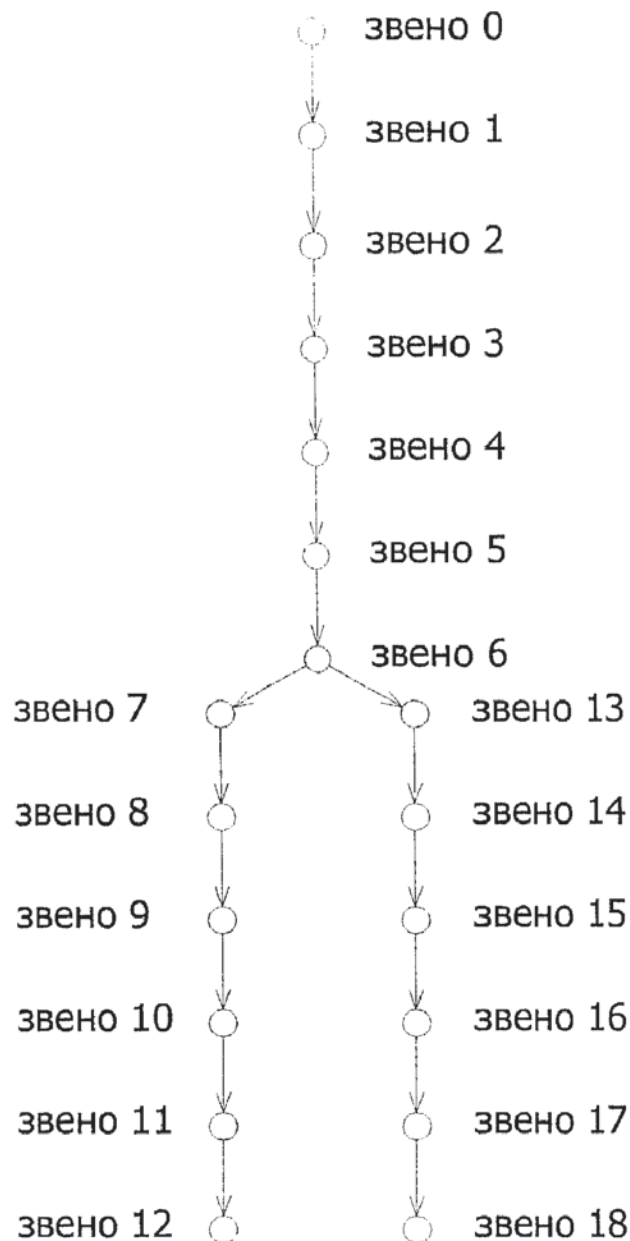


Рис. 3. Древоподобный граф, представляющий кинематическую структуру исполнительного механизма лабораторного ДШР

Кинематические и динамические выражения, определяющие математическую модель ИМ с древоподобной КС будем записывать с использованием аппарата блочных матриц [2-4]. В таких выражениях присутствуют многомерные величины, например обобщённые координаты ИМ, которые могут быть сгруппированы или в вектор-столбец, или в

последовательность элементов диагональной матрицы. Представление векторной величины в диагональном виде условимся обозначать правым верхним индексом  $d$ .

Например:

$\mathbf{q} = (q_1, q_2, \dots, q_N)^T$  - обобщённые координаты ИМ, записанные в виде вектора-столбца;

$\mathbf{q}^d = \text{diag}(q_1, q_2, \dots, q_N)$  - обобщённые координаты ИМ, записанные в виде элементов диагональной матрицы.

При записи векторных произведений в математических выражениях, представленных в блочном виде, будем использовать следующие обозначения:

$\Lambda(\bar{a})\bar{b} = \bar{a} \times \bar{b} = -\Lambda(\bar{b})\bar{a} = \Lambda^T(\bar{b})\bar{a}$  - выражение для векторного произведения;

$$\Lambda(\bar{a}) = \begin{pmatrix} 0 & -a_z & a_y \\ a_z & 0 & -a_x \\ -a_y & a_x & 0 \end{pmatrix}.$$

Если нужно показать, что векторное произведение  $\bar{a} \times \bar{b}$  - для векторов  $\bar{a}_{i,j}$ , сгруппированных, в блочном виде в матрицу  $\mathbf{a}$ , то будем записывать

$$\Lambda(\mathbf{a}) = \begin{pmatrix} \Lambda(\bar{a}_{1,1}) & \Lambda(\bar{a}_{1,2}) & \dots & \Lambda(\bar{a}_{1,N}) \\ \Lambda(\bar{a}_{2,1}) & \Lambda(\bar{a}_{2,2}) & \dots & \Lambda(\bar{a}_{2,N}) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \Lambda(\bar{a}_{N,1}) & \Lambda(\bar{a}_{N,2}) & \dots & \Lambda(\bar{a}_{N,N}) \end{pmatrix};$$

запись  $\Lambda^T(\bar{a}_{i,j})$  для элементов блочной матрицы  $\mathbf{b}$  будем показывать

$$\Lambda^T(\mathbf{a}) = \begin{pmatrix} \Lambda^T(\bar{a}_{1,1}) & \Lambda^T(\bar{a}_{1,2}) & \dots & \Lambda^T(\bar{a}_{1,N}) \\ \Lambda^T(\bar{a}_{2,1}) & \Lambda^T(\bar{a}_{2,2}) & \dots & \Lambda^T(\bar{a}_{2,N}) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \Lambda^T(\bar{a}_{N,1}) & \Lambda^T(\bar{a}_{N,2}) & \dots & \Lambda^T(\bar{a}_{N,N}) \end{pmatrix}.$$

Для формирования математической модели в блочном виде будем представлять кинематическую структуру ИМ с помощью матрицы достижимости. Это квадратная матрица  $D$ , каждый элемент которой  $d_{ij}$  равен 1, если  $i^{\text{я}}$  вершина достижима из вершины  $j$ . Размерность матрицы  $D$  равна числу звеньев ИМ. Согласно определению достижимости диагональные элементы матрицы  $d_{ii} = 1$ . При нумерации звеньев ИМ в соответствии с правилами, определёнными в [1], матрица достижимости получается нижней треугольной матрицей.

Если КС ИМ представляет собой простую кинематическую цепь, то матрица достижимости звеньев ИМ становится нижней треугольной матрицей, для элементов которой выполняется условие  $d_{i,j} = 1$ , ( $i \geq j$ ).

Для ИМ лабораторного ДШР (рис. 1) матрица достижимости, описывающая его КС, имеет вид:

$$D_{18 \times 18} = \begin{pmatrix} U_{6 \times 6} & \Theta_{6 \times 6} & \Theta_{6 \times 6} \\ I_{6 \times 6} & U_{6 \times 6} & \Theta_{6 \times 6} \\ I_{6 \times 6} & \Theta_{6 \times 6} & U_{6 \times 6} \end{pmatrix};$$

где

- $U$  - нижняя треугольная матрица,  $u_{i,j} = 1$  при  $i \geq j$ , иначе  $u_{i,j} = 0$ ;
- $I$  - матрица, все элементы которой равны 1;
- $\Theta$  - нулевая матрица.

Порядок следования систем координат, связанных со звеньями ИМ, имеющего древо-видную КС, показываем с помощью блочного вектора

$${}^0 \mathbf{z} = ({}^0 \bar{z}_{f(2),ns(2)}^T \quad {}^0 \bar{z}_{f(2),ns(2)}^T \quad \dots \quad {}^0 \bar{z}_{f(N),ns(N)}^T)^T \quad (1)$$

где  $\bar{z}_{f(i),ns(i)}$  - орт оси  $\bar{z}$  СК, связанной со звеном  $f(i)$  и соответствующей звену  $i$  (все используемые специальные обозначения и индексные функции описаны в [1]).

Дополнительно введём следующие обозначения:

$${}^0 \mathbf{l} = \begin{pmatrix} {}^0 \bar{l}_1 & {}^0 \bar{l}_{1,2} & \cdot & {}^0 \bar{l}_{1,N} \\ {}^0 \bar{l}_{2,1} & {}^0 \bar{l}_2 & \cdot & {}^0 \bar{l}_{2,N} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ {}^0 \bar{l}_{N,1} & {}^0 \bar{l}_{N,2} & \cdot & {}^0 \bar{l}_N \end{pmatrix}. \quad (2)$$

блочная матрица, объединяющая все возможные векторы  $\bar{l}_{i,j}$ ;

$${}^0 \mathbf{l}_D = \begin{pmatrix} d_{1,1} \cdot {}^0 \bar{l}_1 & d_{1,2} \cdot {}^0 \bar{l}_{1,2} & \cdot & d_{1,N} \cdot {}^0 \bar{l}_{1,N} \\ d_{2,1} \cdot {}^0 \bar{l}_{2,1} & d_{2,2} \cdot {}^0 \bar{l}_2 & \cdot & d_{2,N} \cdot {}^0 \bar{l}_{2,N} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ d_{N,1} \cdot {}^0 \bar{l}_{N,1} & d_{N,2} \cdot {}^0 \bar{l}_{N,2} & \cdot & d_{N,N} \cdot {}^0 \bar{l}_N \end{pmatrix}. \quad (3)$$

блочная матрица, объединяющая векторы  $\bar{l}_{i,j}$ , в соответствии со взаимной достижимостью звеньев, описываемой матрицей достижимости  $D$  ( $d_{i,j}$  - соответствующие элементы матрицы достижимости);

элементы матрицы  ${}^0\mathbf{I}_{D_{i,j}}$  можно определить с помощью выражения

$${}^0\bar{l}_{D_{i,j}} = d_{i,j} \cdot \left( {}^0\bar{l}_i + \sum_{k=j+1}^i d_{i,k} \cdot ({}^0\bar{l}_{f(k)} + {}^0\bar{r}_{f(k),ns(k)}) \right),$$

где

$\bar{l}_{i,j}$  - вектор соединяющий начало СК  $f(j), ns(j)$  с началом основной СК звена  $i$ ;

$\bar{l}_i = \bar{l}_{i,i}$  - вектор соединяющий начало СК  $f(i), ns(i)$  с началом основной СК звена  $i$ ;

$${}^0\bar{l}_i = {}^0R_i \cdot \left( {}^{f(i),ns(i)}R_i \right)^T \cdot {}^{f(i),ns(i)}\bar{l}_i;$$

$${}^0\bar{r}_{f(i),ns(i)} = {}^0R_{f(i)} \cdot {}^{f(i)}\bar{r}_{f(i),ns(i)};$$

${}^0R_i$  - определяется из матрицы  $T_i$ , выражение (3) в [1];

${}^{f(i),ns(i)}R_i, {}^{f(i),ns(i)}\bar{l}_i$  - определяются из матрицы  $A_i$ , выражение (2) в [1];

${}^{f(i)}\bar{r}_{f(i),ns(i)}$  определяется из матрицы  $M_{f(i),ns(i)}$ , выражение (1) в [1];

$\bar{s}_i$ -вектор, соединяющий начало СК  $f(f(i)), ns(f(i))$  с началом СК  $f(i), ns(i)$ , определяется как

$${}^0\bar{s}_i = {}^0\bar{l}_{f(i)} + {}^0\bar{r}_{f(i),ns(i)};$$

$${}^0\mathbf{s} = (0 \quad {}^0\bar{s}_2^T \quad \dots \quad {}^0\bar{s}_N^T)^T. \tag{4}$$

блочный вектор, объединяющий векторы  $\bar{s}_i$  для всех звеньев ИМ (первый элемент блочного вектора  $\mathbf{s}$  нулевой, поскольку для первого звена вектор  $\bar{s}_i$  не существует);

$\bar{c}_i$ -вектор, соединяющий начало основной СК звена с его центром масс (ЦМ);

$${}^0\mathbf{c} = ({}^0\bar{c}_1^T \quad {}^0\bar{c}_2^T \quad \dots \quad {}^0\bar{c}_N^T)^T. \tag{5}$$

блочный вектор, определяющий положения ЦМ звеньев относительно начал их основных СК;

$\bar{c}_{f i,j}$ -вектор, соединяющий начало СК звена  $f(j), ns(j)$  с центром масс (ЦМ) звена  $i$ ;

$$\bar{c}_{f_{i,j}} = \bar{l}_{i,j} + \bar{c}_i \quad (6)$$

$\bar{c}_{f_i} = \bar{c}_{f_{i,j}}$ -вектор, соединяющий начало СК звена  $f(i), ns(i)$  с центром масс (ЦМ) звена  $i$ ;

$${}^0\mathbf{c}_{fD} = \begin{pmatrix} d_{1,1} \cdot {}^0\bar{c}_{f_1} & d_{1,2} \cdot {}^0\bar{c}_{f_{1,2}} & \dots & d_{1,N} \cdot {}^0\bar{c}_{f_{1,N}} \\ d_{2,1} \cdot {}^0\bar{c}_{f_{2,1}} & d_{2,2} \cdot {}^0\bar{c}_{f_2} & \dots & d_{2,N} \cdot {}^0\bar{c}_{f_{2,N}} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ d_{N,1} \cdot {}^0\bar{c}_{f_{N,1}} & d_{N,2} \cdot {}^0\bar{c}_{f_{N,2}} & \dots & d_{N,N} \cdot {}^0\bar{c}_{f_N} \end{pmatrix} = {}^0\mathbf{I}_D + {}^0\mathbf{c}^d \cdot D \quad (7)$$

матрица, объединяющая векторы  $\bar{c}_{f_{i,j}}$ , в соответствии со взаимной достижимостью звеньев, описываемой матрицей достижимости  $D$  ( $d_{i,j}$  - соответствующие элементы матрицы достижимости);

### Кинематические соотношения для исполнительных механизмов с древовидной кинематической структурой в абсолютной системе координат

Для записи матричных выражений, определяющих кинематические выражения для всех звеньев ИМ в блочном виде будем использовать обозначения:

$\mathbf{q} = (q_1, q_2, \dots, q_N)^T$  - вектор обобщенных координат ИМ;

$\dot{\mathbf{q}} = (\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_N)^T$  - вектор обобщенных скоростей ИМ;

${}^0\mathbf{w} = ({}^0\bar{\omega}_1^T, {}^0\bar{\omega}_2^T, \dots, {}^0\bar{\omega}_N^T)^T$  - блочный вектор угловых скоростей звеньев;

${}^0\mathbf{v} = ({}^0\bar{V}_1^T, {}^0\bar{V}_2^T, \dots, {}^0\bar{V}_N^T)^T$  - блочный вектор линейных скоростей начал основных СК звеньев;

${}^0\dot{\mathbf{w}} = ({}^0\dot{\bar{\omega}}_1^T, {}^0\dot{\bar{\omega}}_2^T, \dots, {}^0\dot{\bar{\omega}}_N^T)^T$  - блочный вектор угловых ускорений звеньев;

${}^0\dot{\mathbf{v}} = ({}^0\dot{\bar{V}}_1^T, {}^0\dot{\bar{V}}_2^T, \dots, {}^0\dot{\bar{V}}_N^T)^T$  - блочный вектор линейных ускорений начал основных СК;

${}^0\mathbf{a} = ({}^0\bar{a}_1^T, {}^0\bar{a}_2^T, \dots, {}^0\bar{a}_N^T)^T$  - блочный вектор ускорений центров масс звеньев.



Запишем кинематические выражения в блочном виде, для всех звеньев ИМ с древовидной КС.

В соответствии с рекуррентным (4) в [1] угловая скорость звена  $i$  определяется выражением:

$${}^0\bar{\omega}_i = \sum_{k=1}^i d_{i,k} \cdot \sigma_i \cdot {}^0\bar{z}_{f(k),ns(k)} \cdot \dot{q}_k \quad (8)$$

Сводим выражения (8) в одно матричное уравнение:

$${}^0\mathbf{w} = {}^0B_w(q) \cdot \dot{\mathbf{q}}; \quad (9)$$

$${}^0B_w(q) = D \cdot {}^0\mathbf{z}^d \cdot \sigma; \quad (10)$$

В соответствии с рекуррентным уравнением (5) в [1], скорость начала основной СК звена  $i$  определяется:

$${}^0\bar{V}_i = \sum_{k=1}^i {}^0\bar{z}_{f(k),ns(k)} \cdot d_{ik} \cdot (1 - \sigma_k) \cdot \dot{q}_k + \sum_{k=1}^i ({}^0\bar{z}_{f(k),ns(k)} \times {}^0\bar{l}_{i,k}) \cdot d_{ik} \cdot \sigma_k \cdot \dot{q}_k; \quad (11)$$

Сводим выражения (11) в одно матричное уравнение:

$${}^0\mathbf{v} = {}^0B_v(\mathbf{q}) \cdot \dot{\mathbf{q}}; \quad (12)$$

$${}^0B_v(\mathbf{q}) = \Lambda^T ({}^0\mathbf{1}_D) \cdot {}^0\mathbf{z}^d \cdot \sigma + D \cdot {}^0\mathbf{z}^d \cdot (E - \sigma); \quad (13)$$

где:

${}^0\mathbf{1}_D$  - квадратная матрица, элементы которой определяются в соответствии с (3).

Для получения угловых ускорений звеньев продифференцируем (9):

$${}^0\boldsymbol{\varepsilon} = {}^0B_w(q) \cdot \ddot{\mathbf{q}} + {}^0\dot{B}_w(q) \cdot \dot{\mathbf{q}} = {}^0B_w(q) \cdot \ddot{\mathbf{q}} + D \cdot {}^0\dot{\mathbf{z}}^d \cdot \sigma \cdot \dot{\mathbf{q}} = {}^0B_w(q) \cdot \ddot{\mathbf{q}} + D \cdot \sigma \cdot \dot{\mathbf{q}}^d \cdot {}^0\dot{\mathbf{z}}$$

где

${}^0B_w(q)$  определяется в соответствии с (10);

$${}^0\dot{\mathbf{z}} = \Lambda ({}^0\mathbf{w}_f^d) \cdot \dot{\mathbf{z}} = \Lambda^T ({}^0\mathbf{z}^d) \cdot {}^0\mathbf{w}_f = \Lambda^T ({}^0\mathbf{z}^d) \cdot (D - E) \cdot {}^0\mathbf{z}^d \cdot \sigma \cdot \dot{\mathbf{q}} \quad (14)$$

блочный вектор производных ортов осей  ${}^0\bar{z}_{f(k),ns(k)}$ :

$${}^0\mathbf{w}_f(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = ({}^0\omega_{f(1)}^T \quad {}^0\omega_{f(2)}^T \quad \dots \quad {}^0\omega_{f(N)}^T)^T = (D - E) \cdot {}^0\mathbf{z}^d \cdot \sigma \cdot \dot{\mathbf{q}} \quad (15)$$

блочный вектор, угловых скоростей звеньев-отцов ИМ.

В итоге, угловые ускорения звеньев ИМ определяются матричным уравнением:

$${}^0\boldsymbol{\varepsilon} = D \cdot {}^0\mathbf{z}^d \cdot \sigma \cdot \ddot{\mathbf{q}} + D \cdot \sigma \cdot \dot{\mathbf{q}}^d \cdot \Lambda^T ({}^0\mathbf{z}^d) \cdot (D - E) \cdot {}^0\mathbf{z}^d \cdot \sigma \cdot \dot{\mathbf{q}}; \quad (16)$$

Выражения для линейных ускорений начал основных связанных СК звеньев получаем дифференцированием (12) для линейных скоростей начал основных связанных СК звеньев:

$${}^0\dot{\mathbf{v}} = {}^0B_v(q) \cdot \ddot{\mathbf{q}} + {}^0\dot{B}_v(q, \dot{q}) \cdot \dot{\mathbf{q}} = {}^0B_v(q) \cdot \ddot{\mathbf{q}} + \left( \Lambda^T({}^0\mathbf{l}_D) \cdot {}^0\dot{\mathbf{z}}^d \cdot \sigma + \Lambda^T({}^0\dot{\mathbf{l}}_D) \cdot {}^0\mathbf{z}^d \cdot \sigma + D \cdot {}^0\dot{\mathbf{z}}^d \cdot (E - \sigma) \right) \cdot \dot{\mathbf{q}}$$

где

${}^0B_v(q)$  определяется в соответствии с (13);

${}^0\dot{\mathbf{z}}^d$  – в соответствии с (14);

$$\begin{aligned} {}^0\dot{\mathbf{l}}_D &= \Lambda^T({}^0\mathbf{l}_D) \cdot \sigma \cdot {}^0\dot{\mathbf{q}}^d \cdot {}^0\mathbf{z}^d \cdot D + \Lambda^T({}^0\dot{\mathbf{l}}_D) \cdot {}^0\mathbf{w}_f^d + D \cdot (E - \sigma) \cdot {}^0\dot{\mathbf{q}}^d \cdot {}^0\mathbf{z}^d \cdot D = \\ &= \Lambda^T({}^0\mathbf{l}_D) \cdot \sigma \cdot {}^0\dot{\mathbf{q}}^d \cdot {}^0\mathbf{z}^d \cdot D + \Lambda^T({}^0\dot{\mathbf{l}}_D) \cdot \left( (D - E) \cdot \sigma \cdot {}^0\mathbf{z}^d \cdot {}^0\dot{\mathbf{q}}^d \right) + D \cdot (E - \sigma) \cdot {}^0\dot{\mathbf{q}}^d \cdot {}^0\mathbf{z}^d \cdot D; \end{aligned}$$

Подставляя выражения для  ${}^0\dot{\mathbf{z}}^d$  и  ${}^0\dot{\mathbf{l}}_D$ , получаем итоговое выражение для линейных ускорений начал основных связанных СК звеньев ИМ:

$$\begin{aligned} {}^0\dot{\mathbf{v}} &= {}^0B_v(\mathbf{q}) \cdot \ddot{\mathbf{q}} + \Lambda^T({}^0\mathbf{l}_D) \cdot \Lambda({}^0\mathbf{w}_f^d(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})) \cdot {}^0\mathbf{z}^d \cdot \sigma \cdot \dot{\mathbf{q}} + \\ &+ \Lambda^T \left( \Lambda^T({}^0\mathbf{l}_D) \cdot \sigma \cdot {}^0\dot{\mathbf{q}}^d \cdot {}^0\mathbf{z}^d \cdot D + \Lambda^T({}^0\dot{\mathbf{l}}_D) \cdot {}^0\mathbf{w}_f^d(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \right) \cdot {}^0\mathbf{z}^d \cdot \sigma \cdot \dot{\mathbf{q}} + \\ &+ 2 \cdot D \cdot \Lambda({}^0\mathbf{w}_f^d(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})) \cdot {}^0\mathbf{z}^d \cdot (E - \sigma) \cdot \dot{\mathbf{q}}; \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} {}^0\dot{\mathbf{v}} &= \left( D \cdot {}^0\mathbf{z}^d \cdot (E - \sigma) + \Lambda^T({}^0\mathbf{l}_D) \cdot {}^0\mathbf{z}^d \cdot \sigma \right) \cdot \ddot{\mathbf{q}} + \Lambda^T({}^0\mathbf{l}_D) \cdot \Lambda^T({}^0\mathbf{z}^d \cdot \sigma \cdot \dot{\mathbf{q}}^d) \cdot (D - E) \cdot {}^0\mathbf{z}^d \cdot \sigma \cdot \dot{\mathbf{q}} + \\ &+ \left[ \Lambda^T \left( \Lambda^T({}^0\mathbf{l}_D) \cdot \sigma \cdot {}^0\dot{\mathbf{q}}^d \cdot {}^0\mathbf{z}^d \cdot D + \Lambda^T({}^0\dot{\mathbf{l}}_D) \cdot \left( (D - E) \cdot \sigma \cdot {}^0\mathbf{z}^d \cdot {}^0\dot{\mathbf{q}}^d \right) \right) \right] \cdot {}^0\mathbf{z}^d \cdot \sigma \cdot \dot{\mathbf{q}} + \\ &+ 2 \cdot D \cdot \Lambda^T \left( {}^0\mathbf{z}^d \cdot (E - \sigma) \cdot \dot{\mathbf{q}}^d \right) \cdot (D - E) \cdot {}^0\mathbf{z}^d \cdot \sigma \cdot \dot{\mathbf{q}}; \end{aligned} \quad (17)$$

Нетрудно убедиться, что линейные ускорения центров масс звеньев можно определить из (17), заменив матрицу  ${}^0\mathbf{l}_D$ , элементами которой являются векторы, соединяющие начала СК соответствующих звеньев-отцов с началами СК звеньев, на матрицу  ${}^0\mathbf{c}_{fD}$  (7) с элементами - векторами, соединяющими начала СК соответствующих звеньев-отцов с центрами масс звеньев. Таким образом, получаем выражение для определения линейных ускорений центров масс звеньев ИМ

$${}^0\bar{\mathbf{a}}_{im} = \left( D \cdot {}^0\mathbf{z}^d \cdot (E - \sigma) + \Lambda^T({}^0\mathbf{c}_{fD}) \cdot {}^0\mathbf{z}^d \cdot \sigma \right) \cdot \ddot{\mathbf{q}} +$$

$$\begin{aligned}
& +\Lambda^T({}^0\mathbf{c}_{fD}) \cdot \Lambda^T({}^0\mathbf{z}^d \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \dot{\mathbf{q}}^d) \cdot (D-E) \cdot {}^0\mathbf{z}^d \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \dot{\mathbf{q}} \\
& +\Lambda^T \left( \Lambda^T({}^0\mathbf{c}_{fD}) \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \dot{\mathbf{q}}^d \cdot {}^0\mathbf{z}^d \cdot D + \Lambda^T({}^0\mathbf{c}_{fD}) \cdot \left( (D-E) \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot {}^0\mathbf{z}^d \cdot \dot{\mathbf{q}}^d \right) \right) \cdot {}^0\mathbf{z}^d \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \dot{\mathbf{q}} + \\
& + 2 \cdot D \cdot \Lambda^T \left( {}^0\mathbf{z}^d \cdot (E-\boldsymbol{\sigma}) \cdot \dot{\mathbf{q}}^d \right) \cdot (D-E) \cdot {}^0\mathbf{z}^d \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \dot{\mathbf{q}}; \tag{18}
\end{aligned}$$

где

$${}^0\mathbf{c}_{fD} = {}^0\mathbf{I}_D + {}^0\mathbf{c}^d \cdot D;$$

${}^0\mathbf{c}^d$  - блочная диагональная матрица векторов, соединяющих начала основных СК звеньев, с их ЦМ.

### Динамические соотношения для исполнительных механизмов с древовидной кинематической структурой в абсолютной системе координат

Для описания динамики ИМ условимся, что

- силы и моменты, действующие между звеньями ИМ будем рассматривать через силы и моменты, действующие на звено со стороны его звена-отца;
- сила, действующая на звено  $i$  со стороны звена  $f(i)$ , и равнодействующая внешних сил, приложенных к этому звену, приводятся к началу СК  $f(i), ns(i)$ ;
- момент, действующий на звено  $i$  со стороны звена  $f(i)$ , включает в себя момент, обусловленный приведением силы между этими двумя звеньями к началу СК  $f(i), ns(i)$ ;
- внешние моменты, действующие на звено  $i$ , выражаются через суммарный внешний момент относительно начала СК  $f(i), ns(i)$ , включающий в себя момент от приведения равнодействующей внешних сил, приложенных к звену  $i$ , к началу СК  $f(i), ns(i)$ .

Для записи динамических соотношений в блочном и рекуррентном виде, введём дополнительные обозначения:

$\bar{f}_i$  - сила, действующая на звено  $i$  со стороны звена  $f(i)$  (линия действия силы проходит через начало СК  $f(i), ns(i)$ ).

$\bar{n}_i$  - момент, действующий на звено  $i$  со стороны звена  $f(i)$ , относительно начала СК  $f(i), ns(i)$ .

$\bar{f}_{\text{внешн}}$  - равнодействующая внешних сил, приложенных к звену  $i$ , приведённая к началу СК  $f(i), ns(i)$ ;

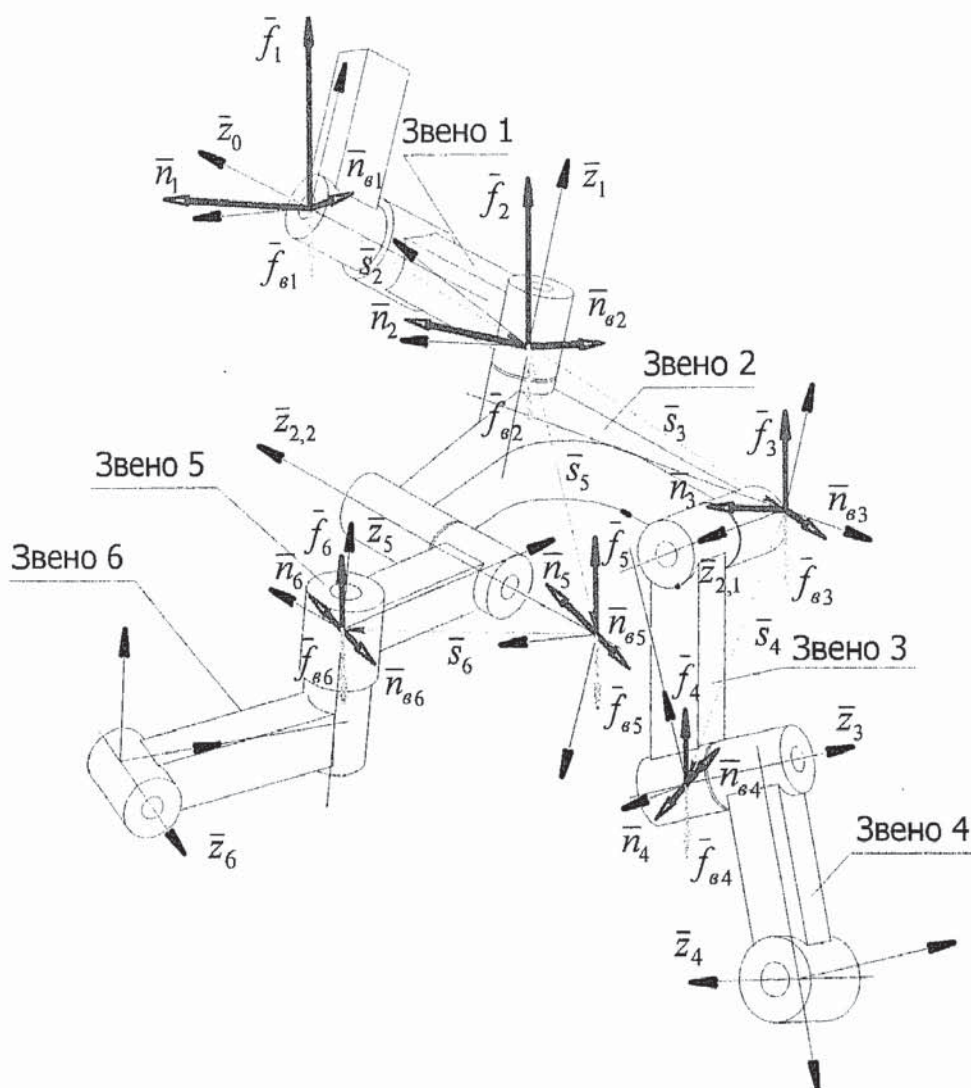


Рис. 4. Силы и моменты, действующие на звенья ИМ с древовидной КС

$\bar{n}_{\text{внешн}}$  - суммарный внешний момент относительно начала СК  $f(i), ns(i)$ , приложенный к звену  $i$  (определяется как сумма момента, приложенного к звену  $i$  со стороны окружающей среды, и момента, вызванного приведением равнодействующей внешних сил, действующих на звено  $i$ , к началу СК  $f(i), ns(i)$ );

$m_i$  - масса звена  $i$ ;

$J'_{C_i}$  - тензор инерции звена, относительно осей, проходящих через его ЦМ, параллельно осям основной связанной СК;

$J_{C_i} = {}^0R_i \cdot J'_{C_i} \cdot {}^0R_i^T$  - тензор инерции звена, относительно осей, проходящих через его ЦМ, параллельно абсолютной СК;

${}^0\bar{\mathbf{f}} = \begin{pmatrix} {}^0\bar{f}_1^T & {}^0\bar{f}_2^T & \dots & {}^0\bar{f}_N^T \end{pmatrix}^T$  - блочная матрица сил, действующих на звенья ИМ со стороны их звеньев-отцов;

${}^0\bar{\mathbf{n}} = \begin{pmatrix} {}^0\bar{n}_1^T & {}^0\bar{n}_2^T & \dots & {}^0\bar{n}_N^T \end{pmatrix}^T$  - блочная матрица моментов, действующих на звенья ИМ со стороны их звеньев-отцов;

${}^0\bar{\mathbf{f}}_g = \begin{pmatrix} {}^0\bar{f}_{g1}^T & {}^0\bar{f}_{g2}^T & \dots & {}^0\bar{f}_{gN}^T \end{pmatrix}^T$  - блочная матрица внешних сил, приложенных к звеньям ИМ со стороны окружающей среды;

${}^0\bar{\mathbf{n}}_g = \begin{pmatrix} {}^0\bar{n}_{g1}^T & {}^0\bar{n}_{g2}^T & \dots & {}^0\bar{n}_{gN}^T \end{pmatrix}^T$  - блочная матрица внешних моментов, действующих на звенья ИМ;

$\mathbf{m} = (m_1, m_2 \dots m_N)^T$  - матрица масс звеньев ИМ;

$\mathbf{J}_C = (J_{C_1}, J_{C_2} \dots J_{C_N})^T$  - блочная матрица тензоров инерции звеньев.

Запишем динамические выражения в блочном виде, для всех звеньев ИМ с древовидной КС.

В соответствии с принципом Д'Аламбера, сила, действующая на звено  $i$  со стороны звена  $f(i)$ , определяется:

$${}^0\bar{f}_i = \sum_{k=i}^N d_{k,i} \cdot m_k \cdot {}^0\bar{a}_k + \sum_{k=i}^N d_{k,i} \cdot {}^0\bar{f}_{gk}; \quad (18)$$

где  $m_k \cdot \bar{a}_k$  - составляющая силы, приложенной к звену  $k$ , идущая на преодоление силы инерции звена;

${}^0\bar{f}_{gk}$  - равнодействующая внешних сил, приложенных к звену  $k$ , приведенная к началу СК  $f(k), ns(k)$ .

Сводим выражения (18) в одно матричное уравнение и определяем все силы взаимодействия звеньев ИМ:

$${}^0\mathbf{f} = D^T \cdot \mathbf{m}^d \cdot {}^0\mathbf{a} - D^T \cdot {}^0\mathbf{f}_g;$$

Используя выражение (18) для ускорений ЦМ звеньев ИМ выразим силы взаимодействия звеньев ИМ через обобщённые координаты и их производные

$$\begin{aligned} {}^0\mathbf{f} = & D^T \cdot \mathbf{m}^d \cdot \left( D \cdot {}^0\mathbf{z}^d \cdot (E - \sigma) + \Lambda^T({}^0\mathbf{c}_{fD}) \cdot {}^0\mathbf{z}^d \cdot \sigma \right) \cdot \ddot{\mathbf{q}} + \\ & + D^T \cdot \mathbf{m}^d \cdot \left[ \Lambda^T({}^0\mathbf{c}_{fD}) \cdot \Lambda^T({}^0\mathbf{z}^d \cdot \sigma \cdot \dot{\mathbf{q}}^d) \cdot (D - E) + 2 \cdot D \cdot \Lambda^T({}^0\mathbf{z}^d \cdot (E - \sigma) \cdot \dot{\mathbf{q}}^d) \cdot (D - E) + \right. \\ & \left. + \Lambda^T \left( \Lambda^T({}^0\mathbf{c}_{fD}) \cdot \sigma \cdot \dot{\mathbf{q}}^d \cdot {}^0\mathbf{z}^d \cdot D + \Lambda^T({}^0\mathbf{c}_{fD}) \cdot \left( (D - E) \cdot \sigma \cdot {}^0\mathbf{z}^d \cdot \dot{\mathbf{q}}^d \right) \right) \right] \cdot {}^0\mathbf{z}^d \cdot \sigma \cdot \dot{\mathbf{q}} - D^T \cdot {}^0\mathbf{f}_g \end{aligned} \quad (20)$$

В соответствии с принципом Д'Аламбера, момент, действующий на звено  $i$  со стороны звена  $f(i)$ , определяется:

$${}^0\bar{\mathbf{n}}_i = \sum_{k=i+1}^N d_{k,i} \cdot \left( {}^0\bar{\mathbf{s}}_k \times {}^0\bar{\mathbf{f}}_k \right) + \sum_{k=i}^N d_{k,i} \cdot \left( {}^0\bar{\mathbf{c}}_{f_k} \times m_k \cdot {}^0\bar{\mathbf{a}}_k + J_{C_k} \cdot {}^0\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_k + \Lambda({}^0\bar{\boldsymbol{\omega}}_k) \cdot J_{C_k} \cdot {}^0\bar{\boldsymbol{\omega}}_k - {}^0\bar{\mathbf{n}}_{gk} \right) \quad (21)$$

Сводим выражения (21) в одно матричное уравнение и определяем все моменты взаимодействия звеньев ИМ:

$$\begin{aligned} {}^0\mathbf{n} = & - \left[ \Lambda({}^0\mathbf{c}_{fD}) \right]^T \cdot \mathbf{m}^d \cdot {}^0\mathbf{a} + D^T \cdot {}^0\mathbf{J}_C^d \cdot {}^0\boldsymbol{\varepsilon} + D^T \cdot \Lambda({}^0\mathbf{w}^d) \cdot {}^0\mathbf{J}_C^d \cdot {}^0\mathbf{w} - \\ & - \left( D^T - E \right) \cdot \Lambda({}^0\mathbf{s}^d) \cdot D^T \cdot {}^0\mathbf{f}_g - D^T \cdot {}^0\mathbf{n}_g; \end{aligned} \quad (22)$$

Знак минус перед квадратной скобкой обусловлен тем, что при транспонировании блочной матрицы транспонируются блоки и элементы в блоках, и, в соответствии с определением векторного произведения,  $\Lambda(\bar{\mathbf{c}}_{f_{i,j}}) = -\Lambda^T(\bar{\mathbf{c}}_{f_{i,j}})$ .

Используя выражения (18) для ускорений ЦМ звеньев ИМ, (16) для угловых ускорений звеньев ИМ и (9) для угловых скоростей звеньев ИМ, выразим моменты взаимодействия звеньев ИМ через обобщённые координаты и их производные:

$$\begin{aligned} {}^0\mathbf{n} = & \left[ - \left( \Lambda({}^0\mathbf{c}_{fD}) \right)^T \cdot \mathbf{m}^d \cdot \left( D \cdot {}^0\mathbf{z}^d \cdot (E - \sigma) + \Lambda^T({}^0\mathbf{c}_{fD}) \cdot {}^0\mathbf{z}^d \cdot \sigma \right) + D^T \cdot {}^0\mathbf{J}_C^d \cdot D \cdot {}^0\mathbf{z}^d \cdot \sigma \right] \cdot \ddot{\mathbf{q}} - \\ & - \left( \Lambda({}^0\mathbf{c}_{fD}) \right)^T \cdot \mathbf{m}^d \cdot \left[ \Lambda^T({}^0\mathbf{c}_{fD}) \cdot \Lambda^T({}^0\mathbf{z}^d \cdot \sigma \cdot \dot{\mathbf{q}}^d) \cdot (D - E) + \right. \\ & \left. + \Lambda^T \left( \Lambda^T({}^0\mathbf{c}_{fD}) \cdot \sigma \cdot \dot{\mathbf{q}}^d \cdot {}^0\mathbf{z}^d \cdot D + \Lambda^T({}^0\mathbf{c}_{fD}) \cdot \left( (D - E) \cdot \sigma \cdot {}^0\mathbf{z}^d \cdot \dot{\mathbf{q}}^d \right) \right) + \right. \\ & \left. + 2 \cdot D \cdot \Lambda^T \left( {}^0\mathbf{z}^d \cdot (E - \sigma) \cdot \dot{\mathbf{q}}^d \right) \cdot (D - E) \right] \cdot {}^0\mathbf{z}^d \cdot \sigma \cdot \dot{\mathbf{q}} + \left[ D^T \cdot {}^0\mathbf{J}_C^d \cdot D \cdot \sigma \cdot \dot{\mathbf{q}}^d \cdot \Lambda^T({}^0\mathbf{z}^d) \cdot (D - E) + \right. \\ & \left. + D^T \cdot \Lambda \left( D \cdot {}^0\mathbf{z}^d \cdot \sigma \cdot \dot{\mathbf{q}}^d \right) \cdot {}^0\mathbf{J}_C^d \cdot D \right] \cdot {}^0\mathbf{z}^d \cdot \sigma \cdot \dot{\mathbf{q}} - \left( D^T - E \right) \cdot \Lambda({}^0\mathbf{s}^d) \cdot D^T \cdot {}^0\mathbf{f}_g - D^T \cdot {}^0\mathbf{n}_g \end{aligned} \quad (23)$$

### Дифференциальные уравнения движения робота в пространстве обобщённых координат

В случае если ИМ оснащён приводами в степенях подвижности, то часть сил, моментов (в зависимости от типа сочленения), определяемых выражениями (19) и (22), развиваются этими приводами. Выражения, для определения этих сил, моментов, развиваемых приводами, получаются при проецировании выражений для сил, моментов, действующих на звенья ( $i$ ) со стороны звеньев  $f(i)$ , на оси  $\bar{z}_{f(i),ns(i)}$ . Запишем выражение, для определения сил, моментов, развиваемых приводами всего ИМ, используя выражения (19) и (22).

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\tau} &= \boldsymbol{\sigma} \cdot \left({}^0 \mathbf{z}^d\right)^T \cdot {}^0 \mathbf{n} + (E - \boldsymbol{\sigma}) \cdot \left({}^0 \mathbf{z}^d\right)^T \cdot {}^0 \mathbf{f} = \\ &= \boldsymbol{\sigma} \cdot \left({}^0 \mathbf{z}^d\right)^T \cdot \left[ -\left(\Lambda \left({}^0 \mathbf{c}_{f_D}\right)\right)^T \cdot \mathbf{m}^d \cdot {}^0 \mathbf{a} + D^T \cdot {}^0 \mathbf{J}_C^d \cdot {}^0 \boldsymbol{\varepsilon} + D^T \cdot \Lambda \left({}^0 \mathbf{w}^d\right) \cdot {}^0 \mathbf{J}_C^d \cdot {}^0 \mathbf{w} - \right. \\ &\quad \left. - \left(D^T - E\right) \cdot \Lambda \left({}^0 \mathbf{s}^d\right) \cdot D^T \cdot {}^0 \mathbf{f}_g - D^T \cdot {}^0 \mathbf{n}_g \right] + (E - \boldsymbol{\sigma}) \cdot \left({}^0 \mathbf{z}^d\right)^T \cdot \left[ D^T \cdot \mathbf{m}^d \cdot {}^0 \mathbf{a} - D^T \cdot {}^0 \mathbf{f}_g \right] \end{aligned} \quad (24)$$

или, используя выражения (18) для ускорений ЦМ звеньев ИМ, (16) - для угловых ускорений звеньев ИМ и (9) - для угловых скоростей звеньев ИМ, выразим силы, развиваемые приводами через обобщённые координаты и их производные:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\tau} &= \left[ \boldsymbol{\sigma} \cdot \left({}^0 \mathbf{z}^d\right)^T \cdot \left( -\left(\Lambda \left({}^0 \mathbf{c}_{f_D}\right)\right)^T \cdot \mathbf{m}^d \cdot \left( D^0 \mathbf{z}^d \cdot (E - \boldsymbol{\sigma}) + \Lambda^T \left({}^0 \mathbf{c}_{f_D}\right) \cdot {}^0 \mathbf{z}^d \cdot \boldsymbol{\sigma} \right) + D^T \cdot {}^0 \mathbf{J}_C^d \cdot D^0 \mathbf{z}^d \cdot \boldsymbol{\sigma} \right) + \right. \\ &\quad \left. + (E - \boldsymbol{\sigma}) \cdot \left({}^0 \mathbf{z}^d\right)^T \cdot D^T \cdot \mathbf{m}^d \cdot \left( D^0 \mathbf{z}^d \cdot (E - \boldsymbol{\sigma}) + \Lambda^T \left({}^0 \mathbf{c}_{f_D}\right) \cdot {}^0 \mathbf{z}^d \cdot \boldsymbol{\sigma} \right) \right] \cdot \ddot{\mathbf{q}} + \\ &\quad + \boldsymbol{\sigma} \cdot \left({}^0 \mathbf{z}^d\right)^T \cdot \left\{ \left(\Lambda \left({}^0 \mathbf{c}_{f_D}\right)\right)^T \cdot \mathbf{m}^d \cdot \left[ \Lambda^T \left({}^0 \mathbf{c}_{f_D}\right) \cdot \Lambda^T \left({}^0 \mathbf{z}^d \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \dot{\mathbf{q}}^d\right) \cdot (D - E) + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \Lambda^T \left( \Lambda^T \left({}^0 \mathbf{c}_{f_D}\right) \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \dot{\mathbf{q}}^d \cdot {}^0 \mathbf{z}^d \cdot D + \Lambda^T \left({}^0 \mathbf{c}_{f_D}\right) \cdot \left( (D - E) \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot {}^0 \mathbf{z}^d \cdot \dot{\mathbf{q}}^d \right) \right) \right] + \right. \\ &\quad \left. + 2 \cdot D \cdot \Lambda^T \left({}^0 \mathbf{z}^d \cdot (E - \boldsymbol{\sigma}) \cdot \dot{\mathbf{q}}^d\right) \cdot (D - E) \right\} + \\ &\quad + D^T \cdot {}^0 \mathbf{J}_C^d \cdot D \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \dot{\mathbf{q}}^d \cdot \Lambda^T \left({}^0 \mathbf{z}^d\right) \cdot (D - E) + D^T \cdot \Lambda \left( D^0 \mathbf{z}^d \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \dot{\mathbf{q}}^d \right) \cdot {}^0 \mathbf{J}_C^d \cdot D \cdot \left. \right\} \cdot {}^0 \mathbf{z}^d \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \dot{\mathbf{q}} + \\ &\quad + (E - \boldsymbol{\sigma}) \cdot \left({}^0 \mathbf{z}^d\right)^T \cdot D^T \cdot \mathbf{m}^d \cdot \left[ \Lambda^T \left({}^0 \mathbf{c}_{f_D}\right) \cdot \Lambda^T \left({}^0 \mathbf{z}^d \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \dot{\mathbf{q}}^d\right) \cdot (D - E) + \right. \\ &\quad \left. + 2 \cdot D \cdot \Lambda^T \left({}^0 \mathbf{z}^d \cdot (E - \boldsymbol{\sigma}) \cdot \dot{\mathbf{q}}^d\right) \cdot (D - E) + \right. \\ &\quad \left. + \Lambda^T \left( \Lambda^T \left({}^0 \mathbf{c}_{f_D}\right) \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \dot{\mathbf{q}}^d \cdot {}^0 \mathbf{z}^d \cdot D + \Lambda^T \left({}^0 \mathbf{c}_{f_D}\right) \cdot \left( (D - E) \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot {}^0 \mathbf{z}^d \cdot \dot{\mathbf{q}}^d \right) \right) \right] \cdot {}^0 \mathbf{z}^d \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \dot{\mathbf{q}} - \\ &\quad - \left[ \boldsymbol{\sigma} \cdot \left({}^0 \mathbf{z}^d\right)^T \cdot \left( D^T - E \right) \cdot \Lambda \left({}^0 \mathbf{s}^d\right) \cdot D^T + (E - \boldsymbol{\sigma}) \cdot \left({}^0 \mathbf{z}^d\right)^T \cdot D^T \right] \cdot {}^0 \mathbf{f}_g - \boldsymbol{\sigma} \cdot \left({}^0 \mathbf{z}^d\right)^T \cdot D^T \cdot {}^0 \mathbf{n}_g; \end{aligned} \quad (25)$$

Группируя сомножители при  $\dot{\mathbf{q}}$  и  $\ddot{\mathbf{q}}$ , получаем уравнение динамики робота, имеющего древовидную КС:

$$A(\mathbf{q}) \cdot \ddot{\mathbf{q}} + B(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \cdot \dot{\mathbf{q}} + C(\mathbf{q}) \cdot {}^0\mathbf{f}_n + D(\mathbf{q}) \cdot {}^0\mathbf{n}_n = \boldsymbol{\tau}$$

где

$$A(\mathbf{q}) = \sigma \cdot ({}^0\mathbf{z}^d)^T \cdot \left( -\left( \Lambda({}^0\mathbf{c}_{f_D}) \right)^T \cdot \mathbf{m}^d \cdot \left( D \cdot {}^0\mathbf{z}^d \cdot (E - \sigma) + \Lambda^T({}^0\mathbf{c}_{f_D}) \cdot {}^0\mathbf{z}^d \cdot \sigma \right) + D^T \cdot {}^0\mathbf{J}_C^d \cdot D \cdot {}^0\mathbf{z}^d \cdot \sigma \right) + (E - \sigma) \cdot ({}^0\mathbf{z}^d)^T \cdot D^T \cdot \mathbf{m}^d \cdot \left( D \cdot {}^0\mathbf{z}^d \cdot (E - \sigma) + \Lambda^T({}^0\mathbf{c}_{f_D}) \cdot {}^0\mathbf{z}^d \cdot \sigma \right);$$

$$B(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \sigma \cdot ({}^0\mathbf{z}^d)^T \cdot \left\{ \left( \Lambda({}^0\mathbf{c}_{f_D}) \right)^T \cdot \mathbf{m}^d \cdot \left[ \Lambda^T({}^0\mathbf{c}_{f_D}) \cdot \Lambda^T({}^0\mathbf{z}^d \cdot \sigma \cdot \dot{\mathbf{q}}^d) \cdot (D - E) + \Lambda^T \left( \Lambda^T({}^0\mathbf{c}_{f_D}) \cdot \sigma \cdot \dot{\mathbf{q}}^d \cdot {}^0\mathbf{z}^d \cdot D + \Lambda^T({}^0\mathbf{c}_{f_D}) \cdot \left( (D - E) \cdot \sigma \cdot {}^0\mathbf{z}^d \cdot \dot{\mathbf{q}}^d \right) \right) \right] + 2 \cdot D \cdot \Lambda^T \left( {}^0\mathbf{z}^d \cdot (E - \sigma) \cdot \dot{\mathbf{q}}^d \right) \cdot (D - E) \right\} + D^T \cdot {}^0\mathbf{J}_C^d \cdot D \cdot \sigma \cdot \dot{\mathbf{q}}^d \cdot \Lambda^T({}^0\mathbf{z}^d) \cdot (D - E) + D^T \cdot \Lambda \left( D \cdot {}^0\mathbf{z}^d \cdot \sigma \cdot \dot{\mathbf{q}}^d \right) \cdot {}^0\mathbf{J}_C^d \cdot D \cdot {}^0\mathbf{z}^d \cdot \sigma + (E - \sigma) \cdot ({}^0\mathbf{z}^d)^T \cdot D^T \cdot \mathbf{m}^d \cdot \left[ \Lambda^T({}^0\mathbf{c}_{f_D}) \cdot \Lambda^T({}^0\mathbf{z}^d \cdot \sigma \cdot \dot{\mathbf{q}}^d) \cdot (D - E) + 2 \cdot D \cdot \Lambda^T \left( {}^0\mathbf{z}^d \cdot (E - \sigma) \cdot \dot{\mathbf{q}}^d \right) \cdot (D - E) + \Lambda^T \left( \Lambda^T({}^0\mathbf{c}_{f_D}) \cdot \sigma \cdot \dot{\mathbf{q}}^d \cdot {}^0\mathbf{z}^d \cdot D + \Lambda^T({}^0\mathbf{c}_{f_D}) \cdot \left( (D - E) \cdot \sigma \cdot {}^0\mathbf{z}^d \cdot \dot{\mathbf{q}}^d \right) \right) \right] \cdot {}^0\mathbf{z}^d \cdot \sigma$$

$$C(\mathbf{q}) = \sigma \cdot ({}^0\mathbf{z}^d)^T \cdot (D^T - E) \cdot \Lambda({}^0\mathbf{s}^d) \cdot D^T + (E - \sigma) \cdot ({}^0\mathbf{z}^d)^T \cdot D^T;$$

$$D(\mathbf{q}) = \sigma \cdot ({}^0\mathbf{z}^d)^T \cdot D^T;$$

Таким образом, полученные блочно-матричные выражения являются универсальными и не зависят от кинематической структуры конкретного исполнительного механизма. Их можно использовать при рассмотрении любых исполнительных механизмов с древовидной кинематической структурой. Информация о структуре каждого конкретного механизма содержится в матрице достижимости, используемой в данных выражениях.

В свою очередь, процедура вычисления матрицы достижимости является формальной, и известна из теории графов. Это делает возможным получение универсального алгоритма для математического моделирования любых древовидных (а в частном случае и линейных) исполнительных механизмов роботов, в том числе и не закрепленных к неподвижному основанию.



## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ковальчук А.К., Кулаков Д.Б., Семенов С.Е. Математическое описание кинематики и динамики исполнительных механизмов роботов с древовидной кинематической структурой // Известия вузов. Машиностроение. – 2008. – №11. – С.11–22
2. Зенкевич С.Л., Ющенко А.С. Основы управления манипуляционными роботами: Учеб. для вузов. – М. Издательство МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2004 г.
3. Медведев В.С., Лесков А.Г., Ющенко А.С. Моделирование и анализ робототехнических систем. М.:Машиностроение,1992
4. Медведев В.С., Лесков А.Г., Ющенко А.С. Системы управления манипуляционных роботов. М.:Наука, 1978.

539.3

## КВАЗИСТАТИЧЕСКОЕ ДЕФОРМИРОВАНИЕ УПРУГОГО СТЕРЖНЯ ПРИ ПРОДОЛЬНОМ ИЗГИБЕ

*Д-р. физ. - мат. наук, проф. А.И ШАШКИН, канд. физ.- мат.наук, доц. Н.В. МИНАЕВА,  
асп. А.В.ГРИЦЕНКО*

*Проведено исследование существования квазистатического деформирования консольного стержня, находящегося под действием потенциальных сил. Получена статически особая кривая, при пересечении которой траекторией нагружения, происходит смена вида квазистатического процесса.*

Рассмотрим проблему квазистатического поведения упругого консольного стержня, находящегося под воздействием двух продольных сил, как показано на рис. 1

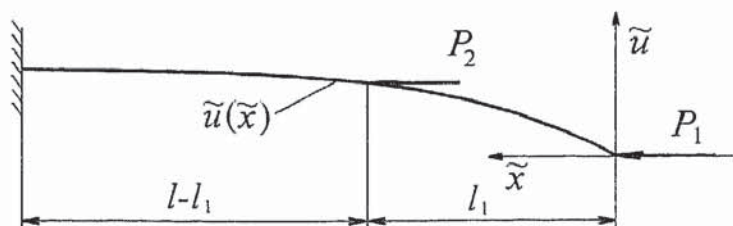


Рис. 1