СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ковальчук А.К., Кулаков Д.Б., Семенов С.Е. Математическое описание кинематики и динамики исполнительных механизмов роботов с древовидной кинематической структурой //Известия вузов. Машиностроение.- 2008. - №11.- С.11-22
2. Зенкевич С.Л., Ющенко А.С. Основы управления манипуляционными роботами: Учеб. для вузов. - М. Издательство МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2004 г.
3. Медведев В.С., Лесков А.Г., Ющенко А.С. Моделирование и анализ робототехнических систем. М.:Машиностроение,1992
4. Медведев В.С., Лесков А.Г., Ющенко А.С. Системы управления манипуляционных роботов. М.:Наука, 1978.

539.3

КВАЗИСТАТИЧЕСКОЕ ДЕФОРМИРОВАНИЕ УПРУГОГО СТЕРЖНЯ ПРИ ПРОДОЛЬНОМ ИЗГИБЕ

Д-р. физ. - мат. наук, проф. А.И ШАШКИН, канд. физ.- мат.наук, доц. Н.В. МИНАЕВА, асп. А.В.ГРИЦЕНКО

Проведено исследование существования квазистатического деформирования консольного стержня, находящегося под действием потенциальных сил. Получена статически особая кривая, при пересечении которой траекторией нагружения, происходит смена вида квазистатического процесса.

Рассмотрим проблему квазистатического поведения упругого консольного стержня, находящегося под воздействием двух продольных сил, как показано на рис. 1

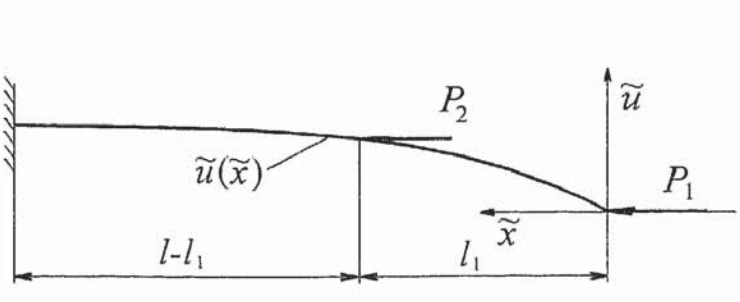

Рис. 1

В безразмерных переменных ось стержня будет описываться решением следующих уравнений

$$\frac{u''}{\left[1+(u')^2\right]^{3/2}}-\frac{f''}{\left[1+(f')^2\right]^{3/2}}+\alpha_1 u=0 \qquad x\in[0,a]$$

$$\frac{u''}{\left[1+(u')^2\right]^{3/2}}-\frac{f''}{\left[1+(f')^2\right]^{3/2}}+(\alpha_1+\alpha_2)u-\alpha_2 u(a)=0 \qquad x\in[a,1] \tag{1}$$

при граничных условиях

$$u(0)=u'(1)=0 \tag{2}$$

где $u=\frac{\tilde{u}}{\ell};\tilde{\delta}=\frac{\tilde{\delta}}{\ell};f=\frac{\tilde{f}}{\ell};\grave{a}=\frac{\ell_1}{\ell};\alpha_1=\frac{P_1\ell^2}{EI};\alpha_2=\frac{P_2\ell^2}{EI}$, функция $\tilde{f}(\tilde{x})$ описывает форму оси стержня в свободном состоянии (начальное несовершенство).

При $f(x)=0$ задача (1), (2) допускает решение

$$u(x)=u_0(x,Đ)\equiv 0 \tag{3}$$

Поскольку внешние силы в данном случае – потенциальные, то для проведения анализа существования квазистатического деформирования стержня вида, близкого к (3), как следует из теоремы о неявных функциях [1,2], необходимо построить вспомогательную задачу относительно функции $\zeta(x)$ при $f(x)=0$. Эта задача с учетом того, что $u_0\equiv 0$ будет иметь вид:

$$\frac{\zeta''}{\left[1+(\zeta')^2\right]^{3/2}}+\alpha_1\zeta=0 \qquad x\in[0,a]$$

$$\frac{\zeta''}{\left[1+(\zeta')^2\right]^{3/2}}+(\alpha_1+\alpha_2)\zeta-\zeta(a)\alpha_2=0 \qquad x\in[a,1] \tag{4}$$

$$\zeta(0)=\zeta'(1)=0$$

Линеаризованные уравнения, соответствующие (4) будут следующими

$$\zeta''+\alpha_1\zeta=0 \qquad x\in[0,a]$$
$$\zeta''+(\alpha_1+\alpha_2)\zeta-\zeta(a)\alpha_2=0 \qquad x\in[a,1] \tag{5}$$

Характеристические уравнения, соответствующие линейным уравнениям с постоянными коэффициентами (5), будут такими:

$$\eta^2+\alpha_1=0; \qquad \eta^2+\alpha_1+\alpha_2=0 \tag{6}$$

Вид корней уравнений (6) зависит от знаков величин α_1 и α_2.

Рассмотрим следующие четыре случая:

1) $\alpha_1>0$; $\alpha_2>0$ (7)

Общее решение уравнений (5) запишется в виде:

$$\zeta = \tilde{N}_1 \cos\eta_1 x + C_2 \sin\eta_1 x \qquad x\in[0,a]$$

$$\zeta = \tilde{N}_3 \cos\eta_2 x + C_4 \sin\eta_2 x + \frac{\alpha_2}{\alpha_1+\alpha_2}\zeta(a) \qquad x\in[a,1] \tag{8}$$

где $$\eta_1^{\,2} = \alpha_1; \quad \eta_2^{\,2} = \alpha_1 + \alpha_2 \tag{9}$$

2) $\alpha_1>0$; $\alpha_2<0$ (10)

Рассмотрим два подслучая:

2а) $\alpha_1>0$; $\alpha_2>0$; $\alpha_1+\alpha_2>0$ (11)

Общие решения уравнений (5) имеют тот же вид (8).

2б) $\alpha_1>0$; $\alpha_2<0$; $\alpha_1+\alpha_2<0$ (12)

В этом случае общие решения уравнений (5) будут такими:

$$\zeta = \tilde{N}_1 \cos\eta_1 x + C_2 \sin\eta_1 x \qquad x\in[0,a]$$

$$\zeta = \tilde{N}_3 e^{\eta_2 x} + C_4 e^{-\eta_2 x} + \frac{\alpha_2}{\alpha_1+\alpha_2}\zeta(a) \qquad x\in[a,1] \tag{13}$$

3) $\alpha_1<0$; $\alpha_2>0$ (14)

Здесь также возможны два подслучая:

3а) $\alpha_1<0$; $\alpha_2>0$; $\alpha_1+\alpha_2>0$ (15)

Тогда общие решения уравнений (5) имеют вид:

$$\zeta = \tilde{N}_1 e^{\eta_1 x} + C_1 e^{-\eta_1 x} \qquad x\in[0,a]$$

$$\zeta = \tilde{N}_3 \cos\eta_2 x + C_4 \sin\eta_2 x + \frac{\alpha_2}{\alpha_1+\alpha_2}\zeta(a) \qquad x\in[a,1] \tag{16}$$

3б) $\alpha_1<0$; $\alpha_2>0$; $\alpha_1+\alpha_2<0$ (17)

Общие решения уравнений (5) следующие:

$$\zeta = \tilde{N}_1 e^{\eta_1 x} + C_1 e^{-\eta_1 x} \qquad x\in[0,a]$$

$$\zeta = \tilde{N}_3 e^{\eta_2 x} + C_4 e^{-\eta_2 x} + \frac{\alpha_2}{\alpha_1+\alpha_2}\zeta(a) \qquad x\in[a,1] \tag{18}$$

4) $\alpha_1<0$; $\alpha_2<0$

В этом случае общие решения уравнений (5) соответствуют виду (18).

Определяя произвольные постоянные C_1, C_2, C_3, C_4 в (8), (13), (16), (18) из граничных условий и условий сращивания решений при $x=a$, требование существования нетривиальных решений в каждом из рассмотренных выше случаев приводит к выполнению следующих условий:

1) $\eta_1 \mathrm{tg}\eta_1 a \mathrm{tg}\eta_2(1-a)=\eta_2$ (19)

$(\alpha_1>0;\ \alpha_2>0)$; $(\alpha_1>0;\ \alpha_2<0;\ \alpha_1+\alpha_2<0)$

2) $\eta_2\left(e^{\eta_2 a}+e^{\eta_2(2-a)}\right)\mathrm{tg}\eta_1 a=\eta_1\left(e^{\eta_2 a}-e^{\eta_2(2-a)}\right)$ (20)

$(\alpha_1>0;\ \alpha_2<0;\ \alpha_1+\alpha_2<0)$

3) $\eta_1 \mathrm{th}\eta_1 a \mathrm{tg}\eta_2(1-a)=\eta_2$ (21)

$(\alpha_1<0;\ \alpha_2>0;\ \alpha_1+\alpha_2>0)$

4) $\eta_1\left(e^{\eta_2 a}-e^{\eta_2(2-a)}\right)\mathrm{th}\eta_1 a=\eta_2\left(e^{\eta_2 a}+e^{\eta_2(2-a)}\right)$ (22)

$(\alpha_1<0;\ \alpha_2>0;\ \alpha_1+\alpha_2<0)$ $(\alpha_1<0;\ \alpha_2<0)$

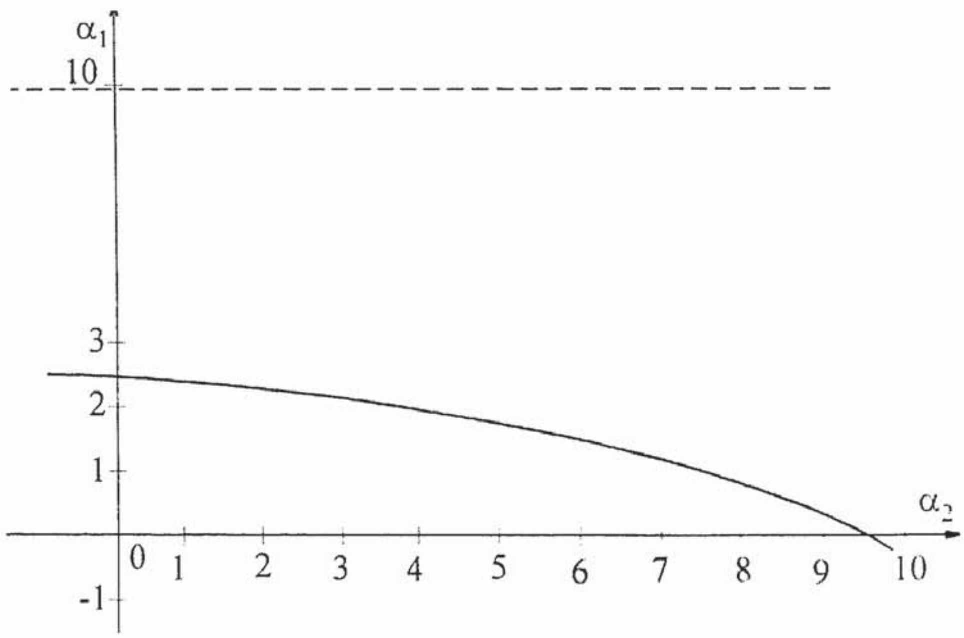

Рис. 2

На рис.2 представлен качественный график зависимости между величинами α_1 и α_2, полученные на основе уравнений (19)–(22) при $a=0{,}5$.

Итак, график, представленный на рис. 2, определяет границу области, в пределах которой возможно осуществление квазистатического деформирования стержня вида, близкого к (3). При пересечении траекторией нагружения статически особой кривой, изображенной на рис. 2, происходит смена вида квазистатического процесса, т.к. внешние силы являются потенциальными.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1976. 542 с.
2. Минаева Н.В. Адекватность математических моделей деформируемых тел. М.: Научная книга, 2006. 235 с.

539.375

ПРЕДЕЛЬНО-РАВНОВЕСНОЕ СОСТОЯНИЕ ПОКРЫТИЯ ПРИ НАЛИЧИИ МАЛЫХ ТРЕЩИН С КОНЦЕВЫМИ ПЛАСТИЧЕСКИМИ ЗОНАМИ

Канд. техн. наук, доц. Ш.Г. ГАСАНОВ

Рассматривается задача механики контактного разрушения для покрытия, имеющего в сечении трещины. Считается, что концевые зоны трещин находятся в состоянии пластического течения при постоянном напряжении. Определение неизвестных параметров, характеризующих рост трещин, сводится к решению системы сингулярных интегральных уравнений.

Разработка расчетных моделей исследования напряженно-деформированного состояния пары «покрытие – упругое основание» представляет актуальную проблему.

Постановка задачи. Рассмотрим задачу механики контактного разрушения для дорожного покрытия, имеющего в сечении произвольное число прямолинейных трещин с концевыми пластическими зонами. Причиной происхождения таких дефектов чаще всего бывает нарушение режима технологии строительства дорог или механические повреждения поверхности дороги в условиях интенсивной эксплуатации.