изображенной на рис. 2, происходит смена вида квазистатического процесса, т.к. внешние силы являются потенциальными.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1976. 542 с.
2. Минаева Н.В. Адекватность математических моделей деформируемых тел. М.: Научная книга, 2006. 235 с.

539.375

ПРЕДЕЛЬНО-РАВНОВЕСНОЕ СОСТОЯНИЕ ПОКРЫТИЯ ПРИ НАЛИЧИИ МАЛЫХ ТРЕЩИН С КОНЦЕВЫМИ ПЛАСТИЧЕСКИМИ ЗОНАМИ

Канд. техн. наук, доц. Ш.Г. ГАСАНОВ

Рассматривается задача механики контактного разрушения для покрытия, имеющего в сечении трещины. Считается, что концевые зоны трещин находятся в состоянии пластического течения при постоянном напряжении. Определение неизвестных параметров, характеризующих рост трещин, сводится к решению системы сингулярных интегральных уравнений.

Разработка расчетных моделей исследования напряженно-деформированного состояния пары «покрытие – упругое основание» представляет актуальную проблему.

Постановка задачи. Рассмотрим задачу механики контактного разрушения для дорожного покрытия, имеющего в сечении произвольное число прямолинейных трещин с концевыми пластическими зонами. Причиной происхождения таких дефектов чаще всего бывает нарушение режима технологии строительства дорог или механические повреждения поверхности дороги в условиях интенсивной эксплуатации.

Рассмотрим напряженно-деформированное состояние дорожного покрытия в процессе работы. Будем считать, что в сечении покрытия имеются прямолинейные внутренние трещины длиной $2\ell_k$ ($k = 1, 2, \ldots, N$). Рассматривается практически важный случай, когда трещины имеют малую длину. В этом случае напряженно-деформированное состояние в окрестности трещин можно с достаточной для практики точностью найти, решая соответствующую задачу для плоскости ($h \to \infty$, где h – высота покрытия) с трещинами, на берегах которых действуют силы, определяемые в процессе решения задачи.

Расчетная схема для дорожного покрытия принята в следующем виде:

1) покрытие является неразрезной балкой бесконечной длины неизменного поперечного сечения, лежащей на сплошном упругом основании;

2) вертикальные силы приложены в плоскости симметрии покрытия, а боковые и продольные силы не влияют на величину изгибающего момента;

3) существует линейная зависимость между величиной равномерно распределенной по длине покрытия нагрузки и вызванной ею осадкой y.

4) форма упругой линии изгиба дорожного покрытия от произвольной динамической нагрузки с учетом неровностей, колебаний подрессорных масс и т.п., в любой момент времени соответствует форме, возникающей от действия постоянной нагрузки, взятой в тот же момент времени.

Согласно этой расчетной схеме распределение изгибающего момента $M_{из}$ по длине бездефектного дорожного покрытия будет [1]

$$M_{из} = P_k \frac{f(\beta x)}{4\beta}; \quad f(\beta x) = e^{-\beta x}(\sin\beta x - \cos\beta x), \tag{1}$$

где $\beta = \sqrt{\dfrac{\lambda}{4EI}}$ - коэффициент относительной жесткости дорожного основания; λ - коэффициент постели основания; Е - модуль продольной упругости материала; I - момент инерции поперечного сечения покрытия относительно горизонтальной оси; x - расстояние от расчетного сечения до точки приложения силы P_k давления колеса.

Вблизи точки взаимодействия колеса с дорожным покрытием будут неправильности [1] в распределении напряжений по сравнению с распределением нормальных напряжений по элементарной теории изгиба балок. Поэтому к напряжениям, порождаемым изгибающим моментом (1), нужно еще добавить [1] местные напряжения

$$\sigma_r = -\frac{2P_k}{\pi}\frac{\cos\theta}{br}, \tag{2}$$

где r - радиальное расстояние от точки приложения силы давления колеса; b - ширина покрытия.

Материал покрытия моделируем упругопластической средой с механическими характеристиками G (модуль сдвига), μ (коэффициент Пуассона) и σ_T (предел текучести материала на растяжение). В центрах трещин разместим начала локальных систем координат $x_kO_ky_k$, оси x_k которых совпадают с линиями трещин и образуют углы α_k с осью x. Высокая концентрация напряжений вблизи вершины трещин в некоторых случаях приводит к разупрочнению материала, окружающего трещину. Это может проявляться в появлении зон пластического течения. Анализ экспериментальных данных, а также условий равновесия и развития трещины с учетом взаимодействия ее берегов и зон разупрочнения приводит к модели трещины с концевой зоной, в которой имеет место пластическое течение при постоянном напряжении. В ряде работ [2, 3] рассматривались модели трещин, в которых принимается, что в концевых зонах, размер которых соизмерим с длиной трещины, имеет место пластическое течение при постоянном напряжении [4]. Принимаем, что эти области примыкают к вершине трещин, а их размеры, заранее неизвестные, могут быть сравнимы с размерами трещин.

Выделим части трещин длиной d_{1k} и d_{2k} (концевые области), примыкающие к ее вершинам, в которых для данного материала имеет место пластическое течение при постоянном напряжении.

Так как концевые зоны и толщина зоны пластического течения малы по сравнению с остальной упругой частью сечения покрытия, то их можно мысленно заменить разрезами, поверхности которых взаимодействуют по некоторому закону и препятствуют раскрытию трещин.

Под действием контактного давления колеса (внешней нагрузки) на дорожное покрытие в концевых зонах, соединяющих берега трещин, возникают нормальные $\sigma_{y_k}(x_k) = \sigma_T$ и касательные усилия $\tau_{x_k y_k}(x_k) = \tau_T$. Следовательно, в концевых зонах к берегам трещин приложены нормальные и касательные напряжения, равные σ_T и τ_T (предел текучести материала на сдвиг), соответственно. Размеры концевых зон заранее неизвестны и подлежат определению при решении рассматриваемой задачи механики разрушения. Вне концевых зон (во внутренней области трещин) берега трещины свободны от нагрузок.

Граничные условия на берегах трещин будут иметь вид:

$$\sigma_{y_k} = 0; \qquad \tau_{x_k y_k} = 0 \quad \text{на свободных берегах трещин} \quad (k = 1, 2, \ldots, N) \tag{3}$$

$$\sigma_{y_k} = \sigma_T; \qquad \tau_{x_k y_k} = \tau_T \quad \text{на берегах концевых зон трещин}$$

Метод решения. Напряженно-деформированное состояние в окрестности трещин определяем приближенно, т.е. [5] будем удовлетворять граничным условиям задачи на контурах трещин –условию (3) и требовать, чтобы на значительном расстоянии от трещин напряженное состояние в покрытии совпадало с напряженным состоянием, вызванным давлением колеса P_k для сплошного покрытия.

Решения задачи ищем в виде

$$\sigma_x = \sigma_x^0 + \sigma_x^1; \quad \sigma_y = \sigma_y^0 + \sigma_y^1; \quad \sigma_{xy} = \sigma_{xy}^0 + \sigma_{xy}^1, \tag{4}$$

где напряжения σ_x^0, σ_y^0, σ_{xy}^0 есть распределение напряжений для сплошной бездефектной балки (покрытия). Тогда граничные условия (3) для определения введенных напряжений σ_x^1, σ_y^1, σ_{xy}^1 можно записать в виде

$$\begin{aligned} &\sigma_{y_k}^1 = -\sigma_{y_k}^0; \qquad \tau_{x_k y_k}^1 = -\tau_{x_k y_k}^0 \quad \text{на свободных берегах трещин} \\ &\sigma_{y_k}^1 = \sigma_T - \sigma_{y_k}^0; \quad \tau_{x_k y_k}^1 = \tau_T - \tau_{x_k y_k}^0 \quad \text{на берегах концевых зон трещин} \end{aligned} \tag{5}$$

Здесь компоненты $\sigma_{y_k}^0$, $\tau_{x_k y_k}^0$ по известным формулам [5] теории упругости определяются через σ_x^0, σ_y^0, τ_{xy}^0.

Компоненты напряжений σ_x^1, σ_y^1, σ_{xy}^1 должны удовлетворять уравнениям плоской задачи теории упругости. Следовательно, их можно выразить через две комплексные функции $\Phi(z)$ и $\Psi(z)$ по формулам Колосова–Мусхелишвили [5], используя которые, запишем краевые условия в виде граничной задачи для отыскания комплексных потенциалов $\Phi(z)$ и $\Psi(z)$

$$\Phi(t_k) + \overline{\Phi(t_k)} + t_k \overline{\Phi'(t_k)} + \overline{\Psi(t_k)} = \begin{cases} f_0(t_k) & \textit{на свободных берегах трещин} \\ \sigma_T - i\tau_T + f_0(t_k) & \text{на берегах концевых зон трещин} \end{cases} \tag{6}$$

Здесь $f_0(t_k) = -\left(\sigma^0_{y_k} - i\tau^0_{x_k y_k}\right)$; t_k – аффикс точек берегов k-ой трещины; i – мнимая единица.

Комплексные потенциалы $\Phi(z)$ и $\Psi(z)$, дающие решение граничной задачи (6) ищем в виде [6]

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi}\sum_{k=1}^{N}\int_{-\ell_k}^{\ell_k}\frac{g_k(t)\,dt}{t - z_k}; \tag{7}$$

$$\Psi(z) = \frac{1}{2\pi}e^{-2i\alpha_k}\sum_{k=1}^{N}\int_{-\ell_k}^{\ell_k}\left[\frac{\overline{g_k(t)}}{t - z_k} - \frac{\overline{T_k}e^{i\alpha_k}}{(t - z_k)^2}g_k(t)\right]dt,$$

где $T_k = te^{i\alpha_k} + z^0_k$; $\quad z_k = e^{-i\alpha_k}\left(z - z^0_k\right)$; $g_k(t)$ - искомые функции, характеризующие раскрытие берегов трещины.

Удовлетворяя функциями (7) краевым условиям (6) на берегах трещин с концевыми зонами, после некоторых преобразований, получим систему N сингулярных интегральных уравнений относительно неизвестных функций $g_k(x_k)$.

$$\sum_{k=1}^{N}\int_{-\ell_k}^{\ell_k}\left[R_{nk}(t, x_n)g_k(t) + S_{nk}(t, x_n)\overline{g_k(t)}\right]dt = \pi f_n(x_n) \tag{8}$$

$$|x_n| \le \ell_n \qquad (n = 1, 2, \ldots, N)$$

$$f_n(x_n) = \begin{cases} f^0_n(x_n) & \text{на свободных берегах трещин} \\ \sigma_T - i\tau_T + f^0_n(x_n) & \text{на берегах концевых зон трещин} \end{cases}$$

$$f^0_n(x_n) = -\left[\sigma^0_{y_n}(x_n) - i\tau^0_{x_n y_n}(x_n)\right]$$

Здесь R_{nk} и S_{nk} определяются по соотношениям

$$R_{n_k} = \frac{e^{i\alpha_k}}{2}\left(\frac{1}{T_k - X_n} + \frac{e^{-2i\alpha_n}}{\overline{T_k} - \overline{X_n}}\right).$$

$$S_{n_k} = \frac{e^{-i\alpha_k}}{2}\left[\frac{1}{\overline{T_k} - \overline{X_n}} - \frac{T_k - X_n}{\left(\overline{T_k} - \overline{X_n}\right)^2}e^{-2i\alpha_n}\right]. \qquad X_n = xe^{i\alpha_n} + z^0_n$$

К системе сингулярных интегральных уравнений (8) для внутренних трещин следует добавить дополнительные равенства

$$\int_{-\ell_k}^{\ell_k} g_k(t)\,dt = 0 \quad (k = 1, 2, \ldots, N), \tag{9}$$

обеспечивающие однозначность смещений при обходе контуров трещин.

Система комплексных сингулярных интегральных уравнений (8) при дополнительных условиях (9) с помощью процедуры алгебраизации [2, 6] сводится к системе $N{\times}M$ алгебраических уравнений для определения $N{\times}M$ неизвестных $g_k(t_m)$ (k = 1, 2, …, N; m = 1, 2, …, M):

$$\frac{1}{M}\sum_{m=1}^{M}\sum_{k=1}^{N}\ell_k\left[g_k(t_m)R_{nk}\left(\ell_k t_m, \ell_n x_r\right)+\overline{g_k(t_m)}S_{nk}\left(\ell_k t_m, \ell_n x_r\right)\right]= f_n(x_r) \qquad (10)$$

$$\sum_{m=1}^{M} g_n(t_m) = 0 \qquad (n = 1, 2, \ldots, N;\ r = 1, 2, \ldots, M\text{-}1),$$

Если в (10) перейти к комплексно сопряженным значениям, получим еще $N{\times}M$ алгебраических уравнений. Для замкнутости системы (10) не хватает $2N$ уравнений, определяющих размеры концевых зон. Условиями, служащими для нахождения размеров концевых зон, являются условия конечности напряжений в окрестности вершин каждой трещины. Записывая условия конечности напряжений, получаем еще $2N$ недостающих уравнения в следующем виде

$$\sum_{m=1}^{M}(-1)^m g_k(t_m) ctg\frac{2m-1}{4M}\pi = 0; \quad (k = 1, 2, \ldots, N) \qquad (11)$$

$$\sum_{m=1}^{M}(-1)^{m+M} g_k(t_m) tg\frac{2m-1}{4M}\pi = 0$$

Полученные алгебраические системы (10) и (11) позволяют определить значения искомых функций $g_k(t_m)$ $(k = 1, 2, \ldots, N; m = 1, 2, \ldots, M)$ в узловых точках, а также размеры концевых зон трещин. Система (10) и (11) из-за неизвестных размеров d_{1k} и d_{2k} $(k = 1, 2, \ldots, N)$ концевых областей трещин оказалась нелинейной. Нелинейную алгебраическую систему решали методом последовательных приближений.

Анализ предельного состояния. Для определения предельного равновесия вершин трещин с концевыми областями пластического течения используем условие предельного (критического) раскрытия берегов трещин у основания пластической зоны. Считается, что предельное состояние наступает, когда на краю концевой области пластического течения выполняется условие

$$\sqrt{\left(u_k^+ - u_k^-\right)^2 + \left(\upsilon_k^+ - \upsilon_k^-\right)^2} = \delta_c, \qquad (12)$$

где δ_c - трещиностойкость материала, определяемая опытным путем.

Используя решение задачи, вычислим смещения на берегах концевых зон трещин

$$-\frac{1+\kappa_0}{2G}\int_{-\ell_k}^{x_k} g_k(x_k)\,dx_k = \upsilon_k(x_k,0) - iu_k(x_k,0)\;(k=1,2,\dots,N)$$

где κ_0 - постоянная Мусхелишвили.

Смещения на берегах концевых зон при $x_k = x_{0k}$ будут

$$-\frac{1+\kappa_0}{2G}\int_{-\ell_k}^{x_k} g_k(x_k)\,dx_k = \upsilon_k(x_k,0) - iu_k(x_k,0)$$

Применяя замену переменных и заменяя интеграл суммой, находим

$$-\frac{1+\kappa_0}{G}\cdot\frac{\pi\ell_k}{M}\sum_{m=1}^{M_{1k}} g_k(t_m) = \upsilon_k(x_{0k},0) - iu_k(x_{0k},0) \tag{13}$$

где M_{1k} - число узловых точек, содержащихся в интервале $(-\ell_k, x_{0k})$.

Учитывая, что $g_k(t_m) = \upsilon_k^0(t_m) - iu_k^0(t_m)$ из (13) находим

$$\upsilon_k(x_{0k},0) = -\frac{1+\kappa_0}{G}\cdot\frac{\pi\ell_k}{M}\sum_{m=1}^{M_{1k}}\upsilon_k^0(t_m);$$

$$u_k(x_{0k},0) = -\frac{1+\kappa_0}{G}\cdot\frac{\pi\ell_k}{M}\sum_{m=1}^{M_{1k}}u_k^0(t_m)$$

Тогда модуль вектора перемещений на берегах концевой зоны при $x_k = x_{0k}$ будет

$$V_{0k} = \sqrt{u_k^2 + \upsilon_k^2} = \frac{1+\kappa_0}{G}\cdot\frac{\pi\ell_k}{M}\sqrt{A_k^2 + B_k^2}\,, \tag{14}$$

где $\quad A_k = \sum_{m=1}^{M_{1k}}\upsilon_k^0(t_m); \qquad B_k = \sum_{m=1}^{M_{1k}}u_k^0(t_m)$

Для определения предельного состояния, при котором происходит рост трещины, используем критическое условие (12).

Таким образом, условием, определяющим предельное значение внешней нагрузки (контактного давления), будет

$$\frac{1+\kappa_0}{G}\cdot\frac{\pi\ell_k}{M}\sqrt{A_k^2 + B_k^2} = \delta_c \qquad (k=1,2,\dots,N)$$

Анализ модели развития трещин в покрытии на упругом основании в процессе эксплуатации сводится к параметрическому совместному исследованию разрешающей алгебраической системы (10), (11) и критерия роста трещины при различных значениях параметров покрытия. Построенная расчетная модель позволяет варьированием параметров α_k и z_k^0 исследовать различные случаи расположения малых трещин в сечении покрытия на ее несущую способность.

В заключение отметим, что если к покрытию приложена система вертикальных нагрузок, то на основе принципа суперпозиции согласно (1) получим

$$M_{из}(x) = \sum_j \frac{P_{kj}}{4\beta} f\left(\beta \left| x - x_j \right|\right),$$

где x_j - координаты точки приложения силы P_{kj} от действия *j*-го колеса транспортного средства. Эпюра распределения изгибающего момента по длине дорожного покрытия одновременно определяет закон изменения во времени момента $M_{из}$ в рассеченном сечении при движении колес вдоль дорожного покрытия. Эта картина изменения нагрузки будет периодически повторяться при прохождении каждого автомобиля.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Тимошенко С.П. Сопротивление материалов. – М.: Наука, Т. 2.– 1965. – 480 с.
2. Мирсалимов В.М. Неодномерные упругопластические задачи. – М.: Наука, 1987. – 256 с.
3. Панасюк В.В. Механика квазихрупкого разрушения материалов. – Киев: Наукова думка, 1991. – 416.
4. Витвицкий П.М., Панасюк В.В., Ярема С.Я. Пластические деформации в окрестности трещины и критерии разрушения: Обзор // Проблемы прочности. – 1973. – №2. – С. 3 – 19.
5. Мусхелишвили Н.И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. – М.: Наука. 1966. – 707 с.
6. Панасюк В.В., Саврук М.П., Дацышин А.П. Распределение напряжений около трещин в пластинах и оболочках. – Киев: Наукова думка.,1976. – 443 с.