ние производится в том направлении, которое обеспечивает наибольшее значение к. п. д. прямого хода самотормозящейся передачи.

3. Передача с одновенцовыми сателлитами A^3_{II1} может быть самотормозящейся при обратном ходе с возможностью оттормаживания либо без таковой при сохранении высокого значения к. п. д. прямого хода. Свойства передачи с двухвенцовыми сателлитами разнотипного зацепления B^4_{II1} аналогичны свойствам передачи A^3_{II1}.

4. Передачи C^4_{1II} $\left(C^4_{II1}\right)$ с двухвенцовыми сателлитами однотипного зацепления могут быть самотормозящимися при обратном ходе с возможностью оттормаживания либо без таковой при обеспечении необходимого смещения рабочих участков профилей зацепления. В передачах C^4_{1II} $\left(C^4_{II1}\right)$ смещение производится от оси вращения водила при $z_1z_3 > z_2z_4$ и к оси при $z_1z_3 < z_2z_4$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Планетарные передачи / Справочник. Под ред. В.Н. Кудрявцева и Ю.Н. Кирдяшева. — Л.: Машиностроение, 1977. — 536 с.
2. Р е ш е т о в Д. Н. Расчет планетарных механизмов. — М.: Машгиз, 1952. — 72 с.
3. В е й ц В. Л. Динамика машинных агрегатов. — Л.: Машиностроение, 1969. — 370 с.
4. Пат. 1479765 РФ, МКИ F 16 H 1/18. Цилиндрическая зубчатая передача / В.В. Панюхин (РФ). — № 4336734/25-28. Опубл. 15.05.89. Бюл. № 18 // Открытия. Изобретения. — 1989. — № 18. — С. 156.
5. Т и м о ф е е в Г. А., П а н ю х и н В. В. Эвольвентные самотормозящиеся передачи равносмещенного зацепления. — В кн.: Элементы и устройства робототехнических систем: Межвузовский сборник. — М.: 1988. — С. 89—92.
6. К у д р я в ц е в В. Н. Планетарные передачи. М.-Л.: Машиностроение, 1966. — 306 с.
7. Б а р а н о в Г. Г. Курс теории механизмов и машин. — М.: Машиностроение. — 1966. — 508 с.
8. К о ж е в н и к о в С. Н. Теория механизмов и машин / Учебное пособие. — Изд. 3-е. — М.: Машиностроение. — 1970. — 574 с.

539.374

КОЛЕБАНИЯ В ЗАДАЧЕ ДВУХ НЕПОДВИЖНЫХ ЦЕНТРОВ

Д-р техн. наук, проф. К.И. РОМАНОВ

Плоская задача о движении материальной точки, притягиваемой двумя неподвижными центрами. По закону Ньютона разрешается в эллиптических координатах[1]. Ниже показано, что особенностью малых колебаний массы под действием центральных сил, определяемых законом Гука, является геометрическая нелинейность. Приближенно найдены 2 частоты свободных колебаний материальной точки и показано, что гармонические колебания являются доминирующими.

The plane problem about driving the mass point, attracted by two fixed centers on a Newton's laws is authorized in elliptical axials [1] .Below is displayed, that the common characteristics of small oscillations under operation of central forces on a mass determined by a Hooke law is geometrical nonlinearity. Two frequencies of the free oscillations of a mass point are approximately discovered and is displayed, that simple harmonic motions are dominating.

1. Постановка задачи. Рассмотрим материальную точку массой M, совершающую малые колебания около положения статического равновесия $x = 0$, $y = 0$, где x и y — декартовы координаты. Неподвижные центры притяжения и отталкивания расположены на удалениях r_0 от начала координат. Силы центрального взаимодействия определяются по закону Гука

$$F = \frac{E}{r_0}\Delta r,\ \Delta r = r - r_0, \tag{1}$$

где E — упругая постоянная, r — текущее расстояние материальной точки от неподвижного центра.

Симметричная задача в указанной постановке решается методами сопротивления материалов [2], показывающими, что колебания в этой задаче оказываются нелинейными даже при линейном законе центральных сил (1).

В несимметричной задаче система имеет две степени свободы и целью решения является определение двух частот свободных колебаний.

2. Формализация задачи в декартовых координатах. Потенциальная энергия системы определяется равенствами

$$U = U_1 + U_2,\ U_1 = \frac{E}{2r_0}\left(\Delta r_1\right)^2,\ U_2 = \frac{E}{2r_0}\left(\Delta r_2\right)^2,$$

$$r_1 = \left[\left(x + r_0\right)^2 + y^2\right]^{1/2},\ r_2 = \left[\left(r_0 - x\right)^2 + y^2\right]^{1/2}.$$

Учитывая, что $\Delta r_i = r_i - r_0$, $i = 1, 2$, получаем

$$U = Er_0\left[\left(\frac{x}{r_0}\right)^2 + 2 + \left(\frac{y}{r_0}\right)^2 - \sqrt{1 + \left(\frac{x}{r_0}\right)^2 + \frac{2x}{r_0} + \left(\frac{y}{r_0}\right)^2} - \sqrt{1 + \left(\frac{x}{r_0}\right)^2 - \frac{2x}{r_0} + \left(\frac{y}{r_0}\right)^2}\right].$$

По формуле [3]

$$(1 + X)^n = 1 + nX + \frac{n(n-1)}{2}X^2 + \ldots$$

при $n = 1/2$ определяем главную часть потенциальной энергии

$$U = \frac{1}{4}Er_0\left\{\left[\left(\frac{x}{r_0}\right)^2 + \left(\frac{y}{r_0}\right)^2\right]^2 + 4\left(\frac{x}{r_0}\right)^2\right\}. \tag{2}$$

В сочетании с кинетической энергией

$$K = \frac{M}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) \tag{3}$$

уравнения (2), (3) представляют собой систему Гарнье [4], решаемую в эллиптических координатах.

Далее получено приближенное решение задачи малых нелинейных колебаний, позволяющее определить частоты системы в виде формул.

Уравнения движения [1]

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial K}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{\partial K}{\partial q} = -\frac{\partial U}{\partial q},$$

где t — время, q — обобщенная координата, приводят к системе двух уравнений

$$\begin{cases} M\ddot{x} + E\left(\dfrac{2x}{r_0} + \dfrac{x^3}{r_0^3} + \dfrac{xy^2}{r_0^3}\right) = 0 \\ M\ddot{y} + E\left(\dfrac{y^3}{r_0^3} + \dfrac{x^2 y}{r_0^3}\right) = 0 \end{cases} \tag{4}$$

Заметим, что при $x = 0$ первое уравнение полученной системы отождествляется, а второе уравнение сводится к уравнению движения поперечных колебаний в симметричной задаче [2]. В свою очередь, при $y = 0$ второе уравнение отождествляется, а первое уравнение системы (4) принимает вид

$$M\ddot{x} + E\left(\frac{2x}{r_0} + \frac{x^3}{r_0^3}\right) = 0. \tag{5}$$

При продольных колебаниях, когда $y = 0$, точное уравнение движения не содержит второго, нелинейного члена в круглых скобках уравнения (5). Появление слагаемого Ex^3/r_0^3 в системе (4) обусловлено упрощением исходного выражения U до вида (2).

Следовательно, доминирующим движением вдоль координаты x является гармоническое движение по уравнению $x/r_0 = A\cos\omega t$, где $A = x/r_0$ — амплитудное значение $x(t)$, ω — частота свободных, нелинейных, связанных колебаний от начальной точки при $t = 0$ $x = x_0$, $y = y_0$, $\dot{x}_0 = 0$ $\dot{y}_0 = 0$ через состояние статического равновесия $x = y = 0$ до точки $x = -x_0$, $y = -y_0$ и обратно.

3. Формализация задачи в полярных координатах. Информация о возможной траектории движения материальной точки $x(y)$ может быть получена с помощью замены переменных по формулам $x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$. В этом случае выражения (2) и (3) принимают вид

$$U = \frac{1}{4}Er_0\left(\frac{\rho^4}{r_0^4} + 4\frac{\rho^2}{r_0^2}\cos^2\varphi\right),$$

$$K = \frac{M}{2}\left(\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\varphi}^2\right)$$

и уравнение Лагранжа приводит к системе двух уравнений

$$\begin{cases} M\dfrac{d\dot{\rho}}{dt} - M\rho\dot{\varphi}^2 + Er_0\left(\dfrac{\rho^3}{r_0^4} + \dfrac{2\rho}{r_0^2}\cos^2\varphi\right) = 0 \\ M\dfrac{d}{dt}(\rho^2\dot{\varphi}) - \dfrac{E}{r_0}\rho^2\sin 2\varphi = 0 \end{cases}$$

Второе уравнение полученной системы показывает, что при $\varphi = \text{const}$, когда $\dot{\varphi} = 0$, $x/r_0 = A\cos\omega t$, $y/r_0 = B\cos\omega t$, $x/y = A/B = \text{const}$, где $B = y_0/r_0$ — амплитудное значение $y(t)$, движение точки при $\varphi \neq 0$ невозможно. То есть гармоническое движение по закону $x/y = \text{const}$ в задаче не существует. Вместе с тем далее показано, что движение системы по гармоническому закону $x/r_0 = A\cos\omega t$, $y/r_0 = B\cos\omega t$ оказывается доминирующим в том смысле, что составляющие $x/r_0 = A\cos\omega t$ и $y/r_0 = B\cos\omega t$ намного значительнее других составляющих в уравнениях $x(t)$ и $y(t)$.

4. Определение частот свободных колебаний. Отклонение от прямолинейной траектории движения массы на плоскости x—y может быть приближенно определено с помощью ограниченного числа членов рядов $x(t)$ и $y(t)$. Например, примем

$$\begin{cases} x/r_0 = A\cos\omega t \\ y/r_0 = B\cos\omega t + C\cos 3\omega t \end{cases} \tag{6}$$

где $A = x_0/r_0$, $B + C = y_0/r_0$.

В этом представлении составляющая $C\cos 3\omega t$ является мерой помех гармонического движения, возникающих вследствие нелинейности системы, а значение отношения C/B можно классифицировать как вторичный эффект из-за связанности продольных и поперечных колебаний.

Подстановка выражений (6) в систему уравнений (4) приводит к невязкам последних. Умножая невязку первого уравнения на $\cos\omega t$, а невязку второго — на $B\cos\omega t + C\cos 3\omega t$, получаем по методу Бубнова—Галеркина—Канторовича систему двух алгебраических уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{Mr_0\omega^2}{E} = 2 + \dfrac{3}{4}\left(A^2 + B^2\right) + \dfrac{1}{2}C\left(B + C\right) \\ \dfrac{Mr_0\omega^2}{E} = \dfrac{1}{B^2 - 9C^2}\left(\dfrac{3}{4}B^4 + B^3C + 3B^2C^2 + \dfrac{3}{4}A^2B^2 + \dfrac{1}{2}A^2BC + \dfrac{3}{4}C^4 + \dfrac{1}{2}A^2C^2\right) \end{cases}$$

Приравнивая правые части этих уравнений, приводим уравнение, связывающее доли амплитуды B и C к виду

$$2B^2 = 18C^2 + \frac{29}{4}A^2C^2 + \frac{39}{4}B^2C^2 + B^3C + \frac{1}{2}A^2BC + \frac{3}{4}C^4.$$

Следовательно, $B >> C$, во всяком случае $B > 3C$. Таким образом, гармоника $B\cos\omega t$ оказывается доминирующей по сравнению с гармоникой $C\cos 3\omega t$.

Две частоты свободных колебаний массы могут быть найдены в гармоническом приближении

$$\begin{cases} \dfrac{x}{r_0} = A\cos\omega t \\ \dfrac{y}{r_0} = B\cos\omega t \end{cases} \tag{7}$$

с помощью решения уравнений движения в декартовых координатах (4) методом Бубнова—Галеркина—Канторовича.

С этой целью подставим выражения (7) в систему (4) и полученную невязку минимизируем с использованием функции времени $\cos\omega t$.

В результате выясняется, что в гармоническом приближении система имеет две частоты

$$\omega_1^2 = \frac{3}{4}\frac{E}{Mr_0}(A^2 + B^2),$$

$$\omega_2^2 = \frac{E}{Mr_0}\left[2 + \frac{3}{4}(A^2 + B^2)\right]$$

между которыми существует соотношение

$$\omega_2^2 = \omega_0^2 + \omega_1^2,$$

где ($\omega_0^2 = 2E/(Mr_0)$) — частота собственных продольных колебаний в гармоническом приближении, то есть по уравнению $M\ddot{x} + (2E/r_0)x = 0$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Уиттекер Э. Аналитическая динамика. — Ижевск. Издательский дом «Удмуртский университет». — 1999. — 588 с.
2. Тимошенко С. П. Колебания в инженерном деле. — М.: Физматгиз. — 439 с.
3. Двайт Г. Б. Таблицы интегралов и другие математические формулы. — М.: Наука, 1977. — 224 с.
4. Борисов А. В., Мамаев И. С. Современные методы теории интегрируемых систем. Москва—Ижевск: Институт компьютерных исследований. — 2003. —295 с.