

РАСЧЕТ И КОНСТРУИРОВАНИЕ МАШИН

620.16: 539.376

ОСАДКА КРУГОВОГО ЦИЛИНДРА В УСЛОВИЯХ УСТАНОВИВШЕЙСЯ ПОЛЗУЧЕСТИ*

*Д-р физ.-мат. наук, проф. А.М.ЛОКОЦЕНКО, д-р техн. наук, проф. В.А.ДЕМИН,
бакалавр В.В.НОСОВ*

Исследована осадка кругового цилиндра жесткими штампами в условиях установившейся ползучести. При решении задачи использовалась дробно-степенная связь интенсивностей напряжений и скоростей ползучести. Предложены две программы нагружения и рассмотрены полученные результаты.

Slump of the circular shaft by rigid stamps in conditions of steady-state creep is examined. In the solution of task a fractional-sedate link of stress intensity and rate of creep was used. Two programs of loading were put forward with the analysis of obtained results.

Технологические процессы обработки металлов обычно реализуются при комнатной температуре. При расчетах этих процессов, как правило, используются модели жесткоидеальнопластического тела или жесткопластического тела с упрочнением. Если необходимо уменьшить сопротивление металлов необратимому деформированию, технологические процессы проводятся в условиях горячей обработки металлов. В этих случаях, несмотря на сравнительно небольшое время деформирования, существенное значение имеет вязкость материала, поэтому расчеты таких процессов следует проводить на основе уравнений теории ползучести. В данном направлении известны классические результаты многих исследователей (Г. Генки, А. А. Ильющин, А. Ю. Ишлинский, Н. Н. Малинин, А. А. Поздеев, О. В. Соснин).

Нами рассматривается задача об осадке круговых цилиндров в условиях установившейся ползучести без учета образования «бочки». При этом предполагается, что мгновенные деформации малы по сравнению с деформациями ползучести, поэтому учитываются только деформации ползучести p_{ij} .

В [1—3] приведено решение Н.Н. Малинина об осадке круглого цилиндра при степенном законе установившейся ползучести или при учете упрочнения материала. В отличие от [1—3], ниже рассмотрено решение этой задачи для случая дробно-степенного закона установившейся ползучести [4], которое затем используется для сравнительного анализа эффективности различных программ нагружения.

Рассматривается осесимметричное деформирование круглого цилиндра радиуса R_0 и высоты $2H_0$ при продольном сжатии в условиях установившейся ползучести (рис. 1). Это сжатие цилиндра осуществляется двумя жесткими плитами, движущимися навстречу друг другу с относительной скоростью $2w$ (величина w может быть постоянной величиной или функцией времени t).

В решении использованы: гипотеза плоских сечений, условие несжимаемости и предположение о независимости напряжений и деформаций от продольной координаты. Расположим начало координат в середине оси цилиндра и введем в рассмотрение радиаль-

* Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект № 05-01-000226) и INTAS (проект № 03-51-6046).

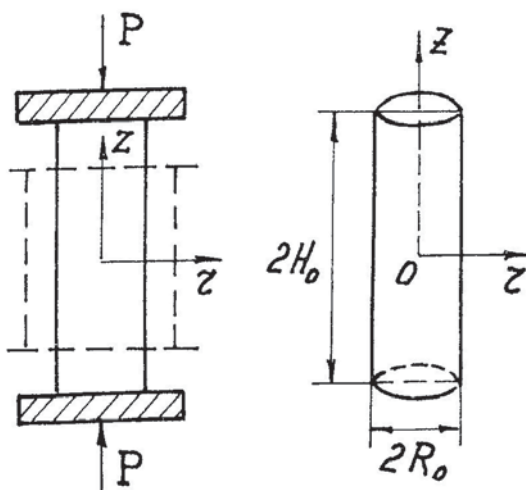


Рис. 1

ную координату r и осевую (продольную) координату z . Из условия поперечной симметрии напряженно-деформированное состояние исследуется только в половине цилиндра (при $0 \leq z \leq H_0$). Проекции скоростей произвольной точки цилиндра на оси r и z обозначим соответственно $u(t)$ и $-w(t)$. Логарифмическая деформация ползучести вдоль оси цилиндра p_{zz} и скорость осевой деформации \dot{p}_{zz} имеют следующий вид:

$$p_{zz} = \ln\left(\frac{H}{H_0}\right), \quad \dot{p}_{zz} = \frac{\dot{H}}{H} = -\frac{\dot{w}}{H}, \quad (1)$$

здесь и ниже точка означает производную по времени t , $2H$ — высота цилиндра при произвольном значении t .

Скорости радиальной и поперечной деформаций ползучести в осесимметричной задаче определяются следующими кинематическими соотношениями:

$$\dot{p}_{rr} = \frac{\partial u}{\partial r}, \quad \dot{p}_{\theta\theta} = \frac{u}{r}. \quad (2)$$

Из условия несжимаемости при учете (2) получим

$$\dot{p}_{rr} + \dot{p}_{\theta\theta} + \dot{p}_{zz} = \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r} - \frac{\dot{w}}{H} = 0,$$

откуда

$$\frac{\partial}{\partial r}(ru) = r \frac{\partial u}{\partial r} + u = \frac{wr}{H} = -\dot{p}_{zz}r. \quad (3)$$

Из (1) следует, что скорость осевой деформации \dot{p}_{zz} не зависит от r . В связи с этим интегрирование (3) приводит к следующему выражению:

$$u = \frac{wr}{2H} + \frac{C(t)}{r}.$$

Из граничного условия $u = 0$ при $r = 0$ следует, что $C(t) \equiv 0$, в этом случае $u = wr/(2H)$. В результате выражения для проекций скоростей деформаций ползучести принимают следующий вид:

$$\dot{p}_{rr} = \frac{\partial u}{\partial r} = \frac{w}{2H}, \quad \dot{p}_{00} = \frac{u}{r} = \frac{w}{2H}, \quad \dot{p}_{zz} = -\frac{w}{H}. \quad (4)$$

Соотношения (4) подтверждают, что условие несжимаемости выполняется.

Интенсивность скоростей деформаций ползучести в общем случае равна

$$\dot{p}_u = \frac{\sqrt{2}}{3} \sqrt{(\dot{p}_{rr} - \dot{p}_{00})^2 + (\dot{p}_{00} - \dot{p}_{zz})^2 + (\dot{p}_{zz} - \dot{p}_{rr})^2 + 6(\dot{p}_{r0}^2 + \dot{p}_{0z}^2 + \dot{p}_{rz}^2)}$$

Сдвиговые деформации равны нулю ($\dot{p}_{r0} = \dot{p}_{0z} = 0$ вследствие осесимметричности задачи, а $\dot{p}_{rz} = 0$ — из-за предположения об отсутствии образования «бочки»), поэтому с учетом (4) получаем

$$\dot{p}_u = \frac{2}{\sqrt{3}} \sqrt{(\dot{p}_{rr})^2 + \dot{p}_{rr}\dot{p}_{00} + (\dot{p}_{00})^2} = \frac{w}{H} = -\dot{p}_{zz}. \quad (5)$$

Компоненты тензора скоростей ползучести связаны с компонентами тензора напряжений гипотезой пропорциональности девиаторов напряжений s_{ij} и скоростей деформаций ползучести \dot{p}_{ij}

$$\dot{p}_{ij} = \frac{3}{2} \frac{\dot{p}_u}{\sigma_u} s_{ij} = \frac{3}{2} \frac{\dot{p}_u}{\sigma_u} (\sigma_{ij} - \sigma \delta_{ij}), \quad (6)$$

где σ_u — интенсивность напряжений, δ_{ij} — символ Кронекера, $\sigma = (\sigma_{rr} + \sigma_{00} + \sigma_{zz})/3$ — среднее напряжение. Из (6) при учете равенства $\dot{p}_{rr} = \dot{p}_{00}$

$$\sigma_{rr} = \sigma_{00}. \quad (7)$$

Интенсивность напряжений в общем случае равна

$$\sigma_u = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_{rr} - \sigma_{00})^2 + (\sigma_{00} - \sigma_{zz})^2 + (\sigma_{zz} - \sigma_{rr})^2 + 6(\tau_{r0}^2 + \tau_{rz}^2 + \tau_{0z}^2)}$$

Из условия осевой симметричности задачи следует, что $\tau_{r0} = \tau_{z0} = 0$, а из гипотезы плоских сечений: $\tau_{rz} = 0$. В связи с этим, а также в связи с равенством напряжений σ_{rr} и σ_{00} , интенсивность напряжений будет равна

$$\sigma_u = \sigma_{rr} - \sigma_{zz} = \sigma_{rr} + g, \quad g(r, t) = -\sigma_{zz}, \quad (8)$$

где $g(r, t) > 0$ — абсолютная величина давления штампа на днища цилиндра.

Вырежем из цилиндра, находящегося в деформированном состоянии, тонкостенную цилиндрическую оболочку — радиусы r и $(r + dr)$. Затем вырежем из нее элемент оболочки, который ограничен двумя осевыми сечениями, пересекающимися под малым углом $d\varphi$. Высота рассматриваемого элемента равна высоте сжимаемого цилиндра $2H$ (рис. 2). Обозначим интенсивность сил трения на торцах цилиндра вследствие давления штампа через q . При условии равновесия сумма проекций на ось r всех сил, действующих на поверхность полосы, равна нулю

$$-(2Hrd\varphi)\sigma_{rr} + (r + dr)d\varphi \cdot 2H(\sigma_{rr} + d\sigma_{rr}) - 2(rd\varphi dr)q - 2(2Hdr)\sigma_{00} \frac{d\varphi}{2} = 0.$$

При составлении этого уравнения равновесия вследствие малости угла $d\varphi$ использовано приближенное равенство $\sin(0,5d\varphi) \approx 0,5d\varphi$. С учетом равенства радиальной и поперечной компонент тензора напряжений получаем

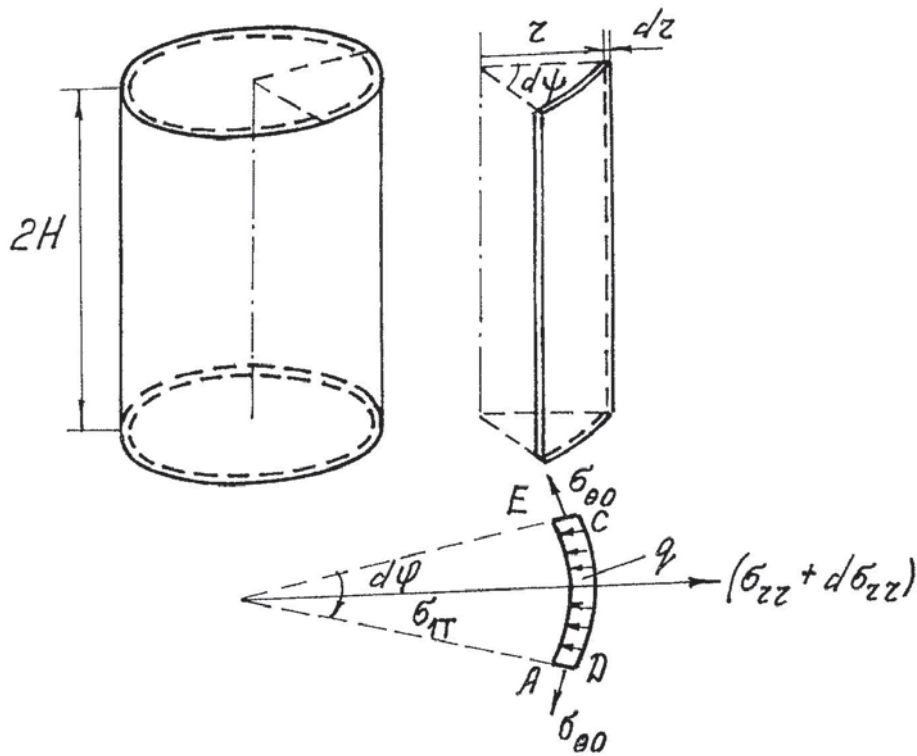


Рис. 2

Из (8) следует

$$\frac{d\sigma_{rr}}{dr} = \frac{q}{H}. \quad (9)$$

$$\frac{d\sigma_{rr}}{dr} = \frac{d\sigma_u}{dr} - \frac{dg}{dr}. \quad (10)$$

Из (5) очевидно, что интенсивность скоростей деформаций ползучести \dot{p}_u постоянна во всем объеме цилиндра, величина \dot{p}_u зависит только от времени. Рассмотрим дробно-степенную зависимость интенсивности скоростей ползучести от интенсивности напряжений [4]

$$\dot{p}_u = \frac{1}{t_0} f(\sigma_u), \quad f(\sigma_u) = \left(\frac{\sigma_u}{\sigma_b - \sigma_u} \right)^n. \quad (11)$$

В (11) постоянная величина t_0 имеет размерность времени, а σ_b характеризует условный предел кратковременной прочности при соответствующей температуре. Из (11) следует, что σ_u — также постоянная величина во всем объеме цилиндра, зависящая только от времени. Преобразуя (11) с учетом соотношения (5), получим выражение для интенсивности напряжений

$$\sigma_u = \sigma_b \left[1 + \left(\frac{H}{wt_0} \right)^{(1/n)} \right]^{-1}. \quad (12)$$

Ниже рассмотрены два варианта решения задачи при различных предположениях о связи интенсивности сил трения q с максимальным касательным или нормальным напряжениями.

Связь интенсивности сил трения с максимальным касательным напряжением.

Пусть интенсивность сил трения на торцах цилиндра q пропорциональна величине максимального касательного напряжения, $\chi = \text{const}$ — коэффициент пропорциональности: $q = \chi \tau_{\max}$. Используя (7) и (8), получаем

$$q = \chi \tau_{\max} = \frac{\chi}{2} (\sigma_{\max} - \sigma_{\min}) = \frac{\chi}{2} (\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}) = \frac{\chi \sigma_u}{2}. \quad (13)$$

Преобразование выражения (13) с учетом (7)—(10) приводит к такому соотношению

$$\frac{q}{H} = \frac{\chi \sigma_u}{2H} = \frac{d\sigma_{rr}}{dr} = -\frac{dg}{dr},$$

так как $\frac{d\sigma_u}{dr} = 0$. В результате получаем

$$\frac{dg}{dr} = -\frac{\chi \sigma_u}{2H}. \quad (14)$$

Интегрирование (14) приводит к следующему уравнению

$$g(r, t) = B(t) - \frac{\chi \sigma_u(t)}{2H(t)} r. \quad (15)$$

Так как нормальное радиальное напряжение σ_{rr} на поверхности цилиндра ($r = R$) тождественно равно нулю, то согласно (8),

$$g(R, t) = \sigma_u(R, t) = B(t) - \frac{\chi \sigma_u(t)}{2H(t)} R(t). \quad (16)$$

Исключив $B(t)$ из (15) и (16), получаем следующее выражение для давления штампа $g(r, t)$

$$g(r, t) = \sigma_u(t) \left(1 + \frac{\chi R(t)}{2H(t)} - \frac{\chi r}{2H(t)} \right). \quad (17)$$

Модуль силы давления штампа на торцы цилиндра определяется следующим уравнением

$$P(t) = 2\pi \int_0^{R(t)} g(r, t) r dr. \quad (18)$$

В дальнейшем под понятиями «сжимающая сила» или «сила давления» будет подразумеваться модуль этой силы. Введем безразмерные переменные

$$\begin{aligned} a &= \frac{R_0}{H_0}, \quad \bar{P} = \frac{P}{\pi R_0^2 \sigma_b}, \quad \bar{H} = \frac{H}{H_0}, \quad \bar{w} = \frac{t_0}{H_0} w, \\ \bar{t} &= \frac{t}{t_0}, \quad \bar{V} = \frac{V}{\pi R_0^2 H_0 \sigma_b}, \quad \bar{\sigma}_u = \frac{\sigma_u}{\sigma_b}, \end{aligned} \quad (19)$$

где V — энергия деформирования. Подставляя (17) в (18), при учете условия несжимаемости $HR^2 = H_0 R_0^2$ и безразмерных переменных (19) получаем

$$\bar{P} = \bar{\sigma}_u F_1(\bar{H}), \quad F_1(\bar{H}) = \frac{1}{\bar{H}} \left[1 + \frac{a\chi}{6} (\bar{H})^{-1,5} \right]. \quad (20)$$

При учете (12), (20) основные определяющие выражения принимают следующий вид:

$$\bar{P} = \left[1 + \left(\frac{\bar{H}}{\bar{w}} \right)^{1/n} \right]^{-1} F_1(\bar{H}), \quad \bar{w} = \bar{H} \left[\frac{F_1(\bar{H})}{\bar{P}} - 1 \right]^n, \quad (21)$$

$$\bar{H}(\bar{t}) = 1 - \int_0^{\bar{t}} \bar{w} d\bar{t}, \quad \bar{V} = \int_{\bar{H}}^1 \bar{P} d\bar{H}.$$

Рассмотрим два варианта осадки цилиндра:

1) скорость осадки цилиндра $\bar{w}(\bar{t}) = \text{const} = \bar{w}_0$ постоянна, в этом случае

$$\bar{H}(\bar{t}) = 1 - \bar{w}_0 \bar{t}, \quad \bar{P}(\bar{t}) = (\bar{w}_0)^n \left[1 + \left(\frac{\bar{H}}{\bar{w}_0} \right)^{1/n} \right]^{-1}; \quad (22)$$

2) сжимающая сила $\bar{P}(\bar{t}) = \text{const} = \bar{P}_0$ постоянна, в этом случае

$$\bar{t} = \int_{\bar{H}}^1 \left[\frac{F_1(\bar{H})}{\bar{P}_0} - 1 \right]^n d\bar{H}, \quad \bar{w} = \bar{H} \left[\frac{F_1(\bar{H})}{\bar{P}_0} - 1 \right]^n, \quad (23)$$

$$\bar{V} = \bar{P}_0 (1 - \bar{H}(\bar{t})).$$

Уравнения (22) и (23) позволяют связать зависящие от времени скорость сближения плит штампа, высоту цилиндра и сжимающую силу при каждой из этих двух программ нагружения. Представляет интерес оценить эффективность осаживания цилиндров. С этой целью проведено исследование осадки цилиндра на одну и ту же величину $(1 - \bar{H}_1)$ за одно и то же время \bar{t}_1 (т.е. осадка от $\bar{H}(\bar{t} = 0) = 1$ до $\bar{H}(\bar{t} = \bar{t}_1) = \bar{H}_1$) при $n = 7$. Для сравнения результатов был использован энергетический критерий. Вычисления показали, что энергия деформирования \bar{V}_1 , затрачиваемая на осадку цилиндра по программе (22), меньше, чем энергия деформирования \bar{V}_2 , накопленная при выполнении программы (23). Эта разница $(\bar{V}_2 - \bar{V}_1)$ возрастает с увеличением отношения a .

Связь интенсивности сил трения с нормальным напряжением. Пусть интенсивность сил трения на торцах цилиндра q пропорциональна величине нормального напряжения, $\mu = \text{const}$ — коэффициент пропорциональности (коэффициент трения)

$$q = \mu g. \quad (24)$$

Эта зависимость имеет название закона трения Кулона. Из соотношений (9), (10) получим

$$\frac{q}{H} = \frac{d\sigma_r}{dr} = -\frac{dg}{dr},$$

так как $\frac{d\sigma_u}{dr} = 0$.

С учетом (24) находим

$$\frac{dg}{dr} = -\frac{\mu g}{H}.$$

Интегрирование этого уравнения и учет граничного условия на поверхности цилиндра $r = R$ (равенство нулю нормального радиального напряжения) приводит к следующему выражению для давления штампа $g(r, t)$:

$$g(r, t) = \sigma_n \exp\left[\frac{\mu(R(t) - r)}{H(t)}\right]. \quad (25)$$

Модуль силы давления штампа $P(t)$ на торцы цилиндра определяем из уравнений (18) и (25)

$$\begin{aligned} P(t) &= 2\pi \int_{R_n}^{R(t)} g(r, t) r dr = \\ &= 2\pi \sigma_b \left[1 + \left(\frac{H}{wt_0}\right)^{1/n}\right]^{-1} \left[\left(\frac{H}{\mu}\right)^2 \exp\left(\frac{\mu}{H} R\right) - \left(\frac{H}{\mu}\right)^2 - \frac{H}{\mu} R\right]. \end{aligned} \quad (26)$$

Вводя безразмерные переменные (19), получаем

$$\bar{P}(t) = \frac{2\bar{H}^2}{a^2\mu^2} \left[1 + \left(\frac{\bar{H}}{\bar{w}}\right)^{(1/n)}\right]^{-1} \left[\exp\left(a\mu(\bar{H})^{-1.5}\right) - a\mu(\bar{H})^{-1.5} - 1\right]. \quad (27)$$

Рассмотрим два вида нагружения цилиндра при осадке:

1) скорость сближения плит штампа постоянна; $\bar{w} = \text{const} = \bar{w}_0$, в этом случае

$$\begin{cases} \bar{H} = 1 - \bar{w}_0 \bar{t}, & \bar{P}(\bar{t}) = \left[1 + \left(\frac{\bar{H}}{\bar{w}_0}\right)^{(1/n)}\right]^{-1} \beta(\bar{H}) \\ \beta(\bar{H}) = \frac{2}{a^2\mu^2} \bar{H}^2 \left[\exp\left(a\mu\bar{H}^{-1.5}\right) - a\mu\bar{H}^{-1.5} - 1\right] & \text{при } \mu > 0 \\ \beta(\bar{H}) = \bar{H}^{-1} & \text{при } \mu = 0, \quad \bar{V}(\bar{t}) = \int_{\bar{H}}^1 \bar{P} d\bar{H} \end{cases} \quad (28)$$

2) сжимающая сила постоянна: $\bar{P} = \text{const} = \bar{P}_0$, в этом случае

$$\bar{w} = \bar{H} \left(\frac{\beta(\bar{H})}{\bar{P}_0} - 1\right)^{-n}, \quad \bar{H} = 1 - \int_0^{\bar{t}} \bar{w} d\bar{t}; \quad \bar{V} = \int_{\bar{H}}^1 \bar{P} d\bar{H} = \bar{P}_0(1 - \bar{H}). \quad (29)$$

На рис. 3 приведены результаты применения дробного закона установившейся ползучести при описании осадки на величину $(1 - \bar{H}_1)$ за одно и то же время \bar{t}_1 . В этих вычислениях использованы одни и те же значения следующих параметров: $a = 4$, $\mu = 0,3$, $n = 7$, $\bar{H}_1 = 0,8$, $\bar{t}_1 = 100$. При этом на рис. 3 кривая 1 характеризует зависимость $\bar{P}(\bar{t})$ при постоянной скорости $\bar{w}_0 = 0,002$, кривая 2 — зависимость $\bar{w}(\bar{t})$ при постоянной сжимающей силе $\bar{P}_0 = 0,6$. На рис. 4 приведены зависимости $\bar{V}(\bar{t})$, полученные при тех же условиях (\bar{V}_1 соответствует программе нагружения (28), \bar{V}_2 — программе (29)). Согласно рис. 4 превышение \bar{V}_2 над \bar{V}_1 составляет 6,4 %.

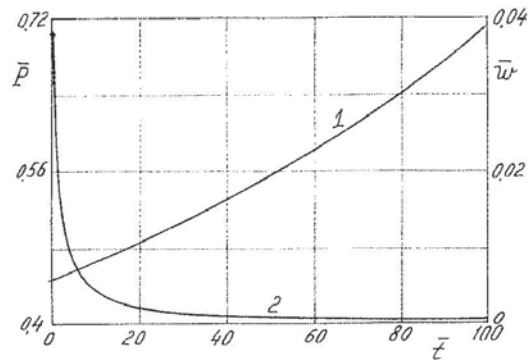


Рис. 3

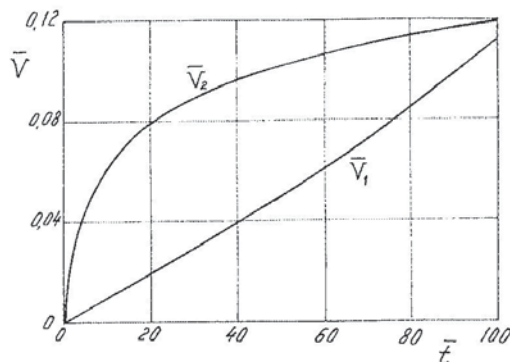


Рис. 4

Выводы

Получена связь между зависящими от времени скоростью сближения плит штампа, высотой цилиндра и сжимающей силой. Проведены вычисления всех основных параметров при двух программах нагружения: при постоянной скорости сближения оснований цилиндра и при постоянной сжимающей силе. Вычисления показали, что энергия деформации, затрачиваемая на осадку цилиндра при постоянной скорости сближения оснований цилиндра, меньше, чем при постоянной сжимающей силе.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. М а л и н и н Н. Н. Приближенные решения некоторых технологических задач // Известия вузов. Машиностроение. — 1977. — № 12. — С. 119—122.
2. М а л и н и н Н. Н. Технологические задачи пластичности и ползучести. — М.: Высшая школа, 1979. — 119 с.
3. М а л и н и н Н. Н. Ползучесть в обработке металлов. — М.: Машиностроение, 1986. — 216 с.
4. Ш е с т е р и к о в С. А., Ю м а ш е в а М. А. Конкретизация уравнения состояния в теории ползучести // Известия АП СССР. Механика твердого тела. — 1984. — № 1. — С. 86—91.