№ 4 *2007*

539.374

АДИАБАТИЧЕСКИЕ ИНВАРИАНТЫ В ТЕОРИИ ПРОДОЛЬНЫХ КОЛЕБАНИЙ СТЕРЖНЯ

Д-р техн. наук, проф. К.И. РОМАНОВ

Показано, что в теории продольных колебаний стержня приближенно может быть получен адиабатический инвариант, представляющий собой отношение полной энергии к массе и частоте.

It is displayed, that in the theory of longitudinal oscillations of a rod the adiabatic invariant representing a ratio of a total energy to mass and frequency can be approximately received.

Рассмотрим продольные колебания стержня с неизменными по длине плотностью ρ, площадью поперечного сечения F и модулем упругости E. Уравнение движения имеет вид [1]

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{E\partial^2 u}{\rho\partial z^2}, \tag{1}$$

где u — осевое перемещение, t — время, z — осевая координата.

Предположим, что параметры стержня ρ, F, l и E — медленно, адиабатически изменяющиеся функции времени. Изменение параметров технических систем может быть обусловлено, например, сбросом балласта, выгоранием топлива, коррозией, структурными изменениями материала.

Будем при этом условии отыскивать решение (1) в виде

$$u = A(t)\varphi_k, \tag{2}$$

где $A(t)$ — функция времени, φ_k — k-ая форма собственных колебаний невозмущенного стержня.

Подставим теперь (2) в уравнение (1). Тогда получим

$$\ddot{A}\varphi_k - A\frac{E}{\rho}\frac{d^2\varphi_k}{dz^2} \neq 0 .$$

Применяя метод Бубнова—Галеркина—Канторовича, имеем

$$\ddot{A} - A\frac{E}{\rho}\frac{\int_0^l \frac{d^2\varphi_k}{dz^2}\varphi_k dz}{\int_0^l \varphi_k^2 dz} = 0.$$

Заметим, что отыскание решения в виде (2) представляет собой нулевое приближение асимптотического метода, примененного в [2] к задаче о поперечных колебаниях балки переменной длины.

Например, для закрепленного по концам стержня $\varphi_k = \sin(k\pi z/l)$ мы получаем дифференциальное уравнение, аналогичное уравнению движения системы с одной степенью свободы

$$\ddot{A} + \omega_0^2(t)A = 0, \tag{3}$$

где $\omega_0^2(t) = E/\rho(k\pi/l)^2$ — медленно меняющаяся функция времени на каждой гармонике из-за изменения параметров системы.

Решение уравнения (3) дается приближением Вентцеля—Крамерса—Бриллюэна и имеет вид [3]

$$A(t) = \frac{a}{\sqrt{\omega_0(t)}}\cos\vartheta,$$

где $a = \text{const}$, $d\vartheta/dt = \omega_0(t)$.

В этом решении для стержня

$$u = \frac{a\varphi_k}{\sqrt{\omega_0(t)}}\cos\vartheta,$$

Например, для закрепленного по концам стержня

$$u = \frac{a}{\sqrt{\omega_0(t)}}\sin\frac{k\pi z}{l}\cos\vartheta.$$

Определим теперь полную энергию стержня при его продольных колебаниях [1]

$$\Pi = K + U,$$

где

$$\left.\begin{aligned} K &= \frac{1}{2}\int_0^l \rho F\dot{u}^2 dz \\ U &= \frac{1}{2}\int_0^l EF\left(\frac{\partial u}{dz}\right)^2 dz \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Например, для закрепленного по концам стержня

$$K = \frac{1}{4}\rho Fla^2\omega_0(t)\sin^2\vartheta,$$

$$U = \frac{1}{4}\rho Fla^2\omega_0(t)\cos^2\vartheta,$$

$$\Pi = \frac{1}{4}\rho Fla^2\omega_0(t)$$

и, следовательно,

$$\frac{\Pi(t)}{m(t)\omega_0(t)} = \frac{\Pi}{m\omega_0} = \text{const}. \tag{5}$$

где $m = \rho Fl$ — масса стержня.

Таким образом, отношение полной энергии к массе и частоте является в нулевом приближении адиабатическим инвариантом.

Аналогичный вывод можно сделать и в случае других граничных условий. Также может быть получен такой же адиабатический инвариант и в теории колебаний других элементов конструкций, например, при поперечных колебаниях стержней и пластинок.

Заметим, что при выводе соотношения (5) знать сами функции φ_k не требуется, поскольку структура общих формул (4) такова, что при любых φ_k оказывается

$$\Pi(t) = K(t)/\sin^2 \vartheta,$$

т.е. полная энергия элемента конструкции определяется выражением кинетической энергии, общим для всех тонкостенных элементов конструкций, колебания которых зависят по (2) от одной функции времени.

При указанном условии дифференциальное уравнение движения собственных колебаний представляет собой уравнение Эйлера соответствующей вариационной задачи. Поэтому при $m = \text{const}$ и $\omega_0 = \text{const}$ из равенства (5) следует $\Pi = \text{const}$, т.е. приходим к консервативной системе.

На каждой форме собственных колебаний в адиабатической системе существует инвариант

$$J_k = \frac{\Pi_k(t)}{m(t)\omega_k(t)},$$

т.е. обнаруживается квантование, аналогичное тому, как квантуются частоты в теории собственных колебаний.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бидерман В. Л. Прикладная теория механических колебаний. — М.: Высшая школа, 1972. — 416 с.
2. Лежнева А. А. Изгибные колебания балки переменной длины. — МТТ. — 1970. — № 1. — С. 159—162.
3. Рабинович М. И., Трубецков Д. И. Введение в теорию колебаний и волн. — Москва—Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2000. — 500 с.

531.8

ВЛИЯНИЕ УГЛА ПОВОРОТА КОНСОЛЬНОЙ ПРУЖИНЫ, ПОДВЕРЖЕННОЙ ДЕЙСТВИЮ СИЛ ГРАВИТАЦИИ, ВОКРУГ ОСИ В ЗАДЕЛКЕ НА ПРОГИБЫ СВОБОДНОГО КРАЯ И СОБСТВЕННЫЕ ЧАСТОТЫ

Асп. Р. Н. БАДИКОВ, д-р техн. наук, проф. Ф. Д. СОРОКИН

На основе известных уравнений механики стержней В.А. Светлицкого формулируется краевая задача для консольной винтовой цилиндрической пружины с прямой осью, подверженной действию сил тяжести, с помощью которой проводится решение задачи поиска зависимости прогиба свободного края и первых восьми собственных частот от угла поворота пружины вокруг собственной оси в заделке.

The equations of the theory of thin elastic rod was used to solve the boundary value problem which was formed for one edge fixed screw cylindrical spring subjected to gravity loading. Based on this static solution the lower own frequency was found for different values of angle about screw axis on the fixed edge.

Цилиндрическая пружина является объектом, сложным для расчетов, ввиду нетривиальной геометрии. Существуют приближенные методы поиска решений для нагруженных цилиндрических пружин, основанные на эмпирических зависимостях [1, 2]. Подобные методики расчета дают результаты с приемлемой для инженерной практики точностью, однако существуют более точные методы решения подобных стержневых задач, основанные на применении дифференциальных уравнений механики стержней [3—5]. Применение менее