

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Андреева Л. Е. Упругие элементы приборов. — М.: Машиностроение, 1981. — 392 с.
2. Полищук Д. Ф. Обобщенная теория цилиндрических пружин. — Ижевск: Изд-во Удм. ун-та. — 216 с.
3. Светлицкий В. А. Механика стержней: Учеб. для вузов. В 2-х ч. Ч. 1. Статика. — М.: Высшая школа, 1987. — 320 с.
4. Светлицкий В. А. Механика стержней: Учеб. для вузов. В 2-х ч. Ч. 2. Динамика. — М.: Высшая школа, 1987. — 304 с.
5. Расчеты на прочность в машиностроении / С. Д. Пономарев, В. Л. Бидерман и др. — М.: Машигиз, 1959. — Т. 3. — 1120 с.

666.1.4:681.7.068.4

ОЦЕНКА СТАТИЧЕСКИХ СВОЙСТВ ОБЪЕКТА УПРАВЛЕНИЯ, СОДЕРЖАЩЕГО УПРУГО-ВЯЗКУЮ СРЕДУ

Канд. техн. наук, доц. В.А. ИЛЬИЧЕВ, асп. Л.Б. АЛЕКСЕЕВА, д-р техн. наук, проф. В.П. УВАРОВ

Процесс вытяжки стеклоизделий (световодов) из разогретой стекломассы рассматривается как объект управления, статические свойства которого определяются на основе интегрирования системы нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных. Полученные решения позволяют оценить чувствительность процесса к возмущениям в установившемся режиме движения стекломассы.

Process of glassware (optical paths) extract from a liquid glass is considered as a plant of control which static properties are determined on the basis of integration in a system of nonlinear differential partial equations. The received decisions allow to evaluate perturbation responsivity of the process in the established conditions of glass mass flow.

К объектам управления, содержащим упруго-вязкую среду, можно отнести разнообразные технологические процессы изготовления одножильных и многожильных стеклянных стержней и волокон. Это могут быть световоды, полые трубки, тонкие штабики с диаметром поперечного сечения 0,5...2 мм. При их изготовлении применяется метод вытягивания из фильеры или заготовки, конец которой размягчен под действием температуры. Размягченное таким образом стекло может вытягиваться под действием собственной силы тяжести, внешних растягивающих усилий или выдавливаться из замкнутого объема.

К стеклянным стержням (световодам), используемым в оптической промышленности, предъявляются высокие требования к стабильности диаметра и формы поперечного сечения по их длине. Поэтому технологический процесс изготовления таких стержней требует постоянного контроля и управления.

Выбор структуры управления, определение требований к измерительным комплексам зависит от свойств объекта управления, который включает в себя как собственно процесс вытяжки, так и устройства, осуществляющие вытяжку.

Решение возникающих в связи с этим задач требует, прежде всего, разработки математических моделей, связывающих входные и выходные параметры процесса. Это позволит оценивать статические свойства объекта управления, определяющие чувствительность выхода процесса к изменению технологических параметров в установившемся режиме. На основе такой оценки можно определить допустимые пределы изменения этих параметров.

Оценка динамических свойств связана с изучением переходных режимов, возникающих при управлении процессом вытяжки.

Выделим зону формирования световода (рис. 1), которая представляет собой переход от заготовки (или фильеры) до готового изделия. На рис. 1 обозначено: r , z — радиальная и осевая координаты; L — длина зоны формирования.

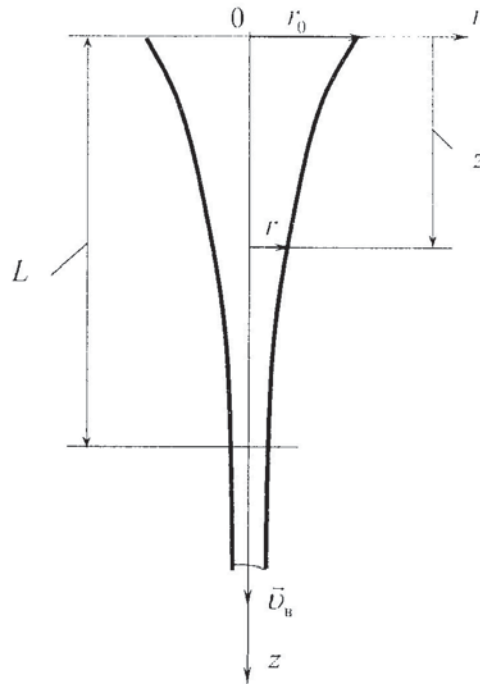


Рис. 1. Зона формирования световода

Геометрия зоны формирования определяется после интегрирования системы дифференциальных уравнений, которая состоит из уравнения неразрывности, уравнений равновесия сил (кинетостатические уравнения) и уравнений, определяющих физическое состояние среды (модель Максвелла) [1]. Выбор этой модели обусловлен тем, что стекломасса в зоне формирования обладает как вязкими, так и упругими свойствами. Это среда, способная к релаксации.

Если считать, что напряжения, скорость, вязкость стекломассы являются функциями только осевой координаты, то получим модель одномерного потока, состоящую из следующих уравнений [1]:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial S}{\partial t} + \frac{\partial(Sv)}{\partial z} &= 0 \\ \rho \left(\frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial z} \right) &= \rho g + \frac{\partial p}{\partial z} \\ p + \lambda \left(\frac{\partial p}{\partial t} + v \frac{\partial p}{\partial z} \right) &= 3 \mu \frac{\partial v}{\partial z} \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

где t — время; v , p — соответственно скорость и напряжение в сечении $z(t)$ в момент

времени t ; S — площадь рассматриваемого сечения; ρ , λ , μ — соответственно плотность, время релаксации и динамическая вязкость стекломассы в рассматриваемом сечении зоны формирования; g — ускорение свободного падения.

Граничные условия задачи определяются скоростью вытяжки v_n и скоростью подачи v_n заготовки в зону нагрева

$$z = 0: v = v_n; z = L: v = v_n. \quad (2)$$

Система уравнений (1) с граничными условиями (2) описывает движение упруго-вязкой среды с подвижными нижней границей. Поскольку найти аналитическое решение этой системы не представляется возможным, то для него необходимо применить ту или иную разностную схему. Но использование разностных методов дает надежный результат только при фиксированных границах. Переход может быть осуществлен с помощью

дифференциального оператора $\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{t v_n} \frac{\partial}{\partial x}$. Такого рода задача решена в [2]. Однако

полученное решение не приспособлено для анализа перехода процесса вытяжки к установившемуся режиму. Была осуществлена попытка получить приближенное решение. С этой целью определяли реализуемые диапазоны технологических и геометрических параметров

$$v_n = 1 \text{ м/мин} \dots 10 \text{ м/с}, v \in (0, 017 \dots 10) \text{ [м/с];}$$

$$D = 10 \dots 20 \text{ мм}, D \in [0, 01 \dots 0, 02] \text{ [м/с], диаметр заготовки;}$$

$$R \in [0, 005 \dots 0, 01] \text{ [м], радиус заготовки; } r = 0, 25 \dots 0, 5 \text{ мм;}$$

$$r \in [0, 25 \cdot 10^{-3} \dots 0, 5 \cdot 10^{-3}] \text{ [м], радиус световода;}$$

$$v \in [v_n, v_n] = v_n \left[\left(\frac{r}{R} \right)^2, 1 \right]; v_n \leq 0, 01 v_n; g = 9, 8 \text{ м/с}^2; \rho \cong 2, 5 \cdot 10^3 \text{ [кг/м}^3\text{];}$$

$$G = 2500 \text{ кг/мм}^2 = 2, 5 \cdot 10^{10} \text{ Па, модуль сдвига; } \mu \in [10^6 \dots 10^8] \text{ [Па} \cdot \text{с]}$$

$$\lambda = \frac{\mu}{G} \in \frac{1}{2, 5} [10^{-4} \dots 10^{-2}] \text{ [с].}$$

Было выяснено, что распределение скорости сечения $v = v(z)$ имеет квазилинейный характер. Исходя из этого, в соответствии с (1) было получено соотношение, определяющее длину зоны формирования в момент времени t ,

$$z = \left(1 - \left(\frac{1}{K} \right)^{\frac{1}{1-K}} \right) t v_n, \quad (3)$$

где K — коэффициент перетяжки, равный $K = \frac{v_n}{v} = \frac{S_0}{S}$, $K \gg 1$; S_0 — площадь сечения заготовки.

Из соотношения (3) можно найти рабочие режимы, соответствующие определенной длине зоны формирования.

Зная длину зоны формирования, можно определить ее геометрию при установившемся режиме. Для этого в системе (1) следует приравнять частные производные по времени нулю.

Второе и третье уравнения полученной таким образом системы могут быть проинтегрированы независимо от первого уравнения. В граничные условия (2) напряжение p

не входит. Поэтому можно свести систему из двух дифференциальных уравнений относительно функций $p = p(z)$ и $v = v(z)$ к одному дифференциальному уравнению второго порядка вида

$$\frac{d^2 v}{dz^2} = \frac{\rho}{3\mu - \lambda \rho v^2} \left(2\lambda \left(\frac{dv}{dz} \right)^2 + (v - \lambda g) \frac{dv}{dz} - g \right).$$

Это уравнение допускает приближенное аналитическое решение, полученное в [3]. Как показывают расчеты для диапазона выбранных параметров относительная погрешность аналитического решения по отношению к численному не превышает 1%. Кроме того, напряжение оказывается практически постоянным по всей длине зоны формирования.

После выхода на установившийся режим могут происходить отклонения технологических параметров. Эти отклонения вызовут возмущения в зоне формирования световода, что приведет к изменению его геометрических характеристик. Необходимо выявить степень влияния такого рода возмущений на геометрию вытягиваемого световода.

Откликом на возмущения, т. е. параметром, определяющим качество световода, является площадь сечения $S = S(z, t)$, где t — момент времени наблюдения. Уравнения возмущений могут быть получены из уравнений движения стекломассы. Решения задачи ищутся в виде

$$\left. \begin{aligned} \tilde{v}(z, t) &= v(z) + \bar{v}(z, t) \\ \tilde{\mu}(z, t) &= \mu(z) + \bar{\mu}(z, t) \\ \tilde{S}(z, t) &= S(z) + \bar{S}(z, t) \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

где $v(z)$, $\mu(z)$, $S(z)$ — решения для скорости, вязкости, площади поперечного сечения зоны формирования, соответствующие установившемуся движению стекломассы; $\bar{v}(z, t)$, $\bar{\mu}(z, t)$, $\bar{S}(z, t)$ — возмущения скорости, вязкости, площади поперечного сечения зоны формирования световода.

После подстановки соотношений (4) в уравнении движения стекломассы для установившегося движения можно получить уравнения возмущений

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \bar{v}}{\partial t} &= -(v + \bar{v}) \frac{\partial \bar{v}}{\partial z} + \frac{1}{c} \frac{\partial \bar{p}}{\partial z} - \bar{v} \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial \bar{p}}{\partial t} &= \frac{\mathfrak{M}(\mathfrak{M})}{\mu} \frac{\partial \bar{v}}{\partial z} - (v + \bar{v}) \frac{\partial \bar{p}}{\partial z} - \bar{v} \frac{\partial p}{\partial z} - \frac{\bar{p} 3\mathfrak{M}}{\mu} \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial \bar{S}}{\partial t} &= -(S + \bar{S}) \frac{\partial \bar{v}}{\partial z} - (v + \bar{v}) \frac{\partial \bar{S}}{\partial z} - \frac{\bar{S} v - \bar{v} S}{v} \frac{\partial v}{\partial z} \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

Система (5) допускает приближенное интегрирование при обоснованных практических исследованиях допущениях. На первом этапе можно проинтегрировать первые два уравнения этой системы, поскольку функция $S = S(z)$ явным образом в них не входит. С учетом этого получено уравнение связи возмущений по вязкости и скорости

$$\alpha_v = \alpha_\mu + (\alpha_{v_0} - \alpha_\mu) \exp\left(-\frac{1 - \alpha_k}{1 + \alpha_\mu} \tau\right), \quad (6)$$

где $\alpha_v = \frac{\bar{v}}{v}$; $\alpha_\mu = \frac{\bar{\mu}}{\mu}$; $\alpha_k = \frac{1}{K}$; $\tau = \frac{t}{L} v_\mu$; α_{v_0} — возмущение скорости в начальный момент времени.

После интегрирования третьего уравнения системы (5) можно получить уравнение связи возмущения с откликом

$$1 + \alpha_s = (1 + \alpha_v)^{-1}, \quad (7)$$

где $\alpha_s = \bar{S} / S$.

Используя соотношение (7), можно нормировать технологические параметры таким образом, чтобы обеспечить заданное качество световода.

Если ввести отклонение не площади α_s , а радиуса α_r , то (7) можно представить в виде

$$|\alpha_r| = \sqrt{\left| \frac{1}{1 + \alpha_v} - 1 \right|}.$$

По последнему выражению на рис. 2 представлена связь между безразмерным отклонением радиуса α_r и возмущением по скорости и вязкости α_v . Как следует из графика, требования к возмущению по скорости и вязкости носят довольно жесткий характер. Так, для того, чтобы отклонение радиуса световода не превышало 6 %, возмущение α_v не должно превышать 0,4 %.

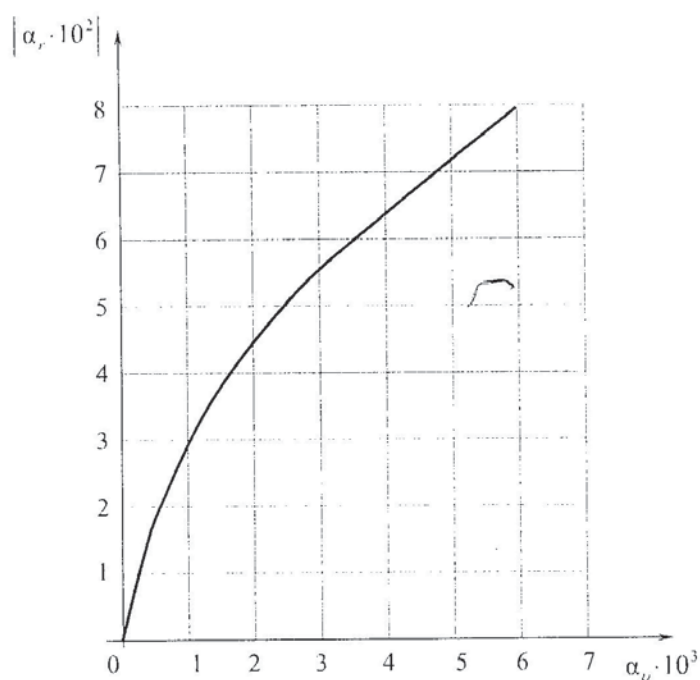


Рис. 2. Влияние возмущений на геометрию световода

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Уваров В. П., Ильичев В. А. Математические модели процесса вытяжки оптических стержней. — С.-Петербург, Химиздат, 2003. — 136 с.
2. Ильичев В. А. Решение нестационарной задачи движения вязко-упругой среды с подвижными границами // Известия вузов. Машиностроение. — 2005. — № 9. — С. 15—19.
3. Ильичев В. А. Численное и аналитическое решение задачи установившегося движения стекломассы // Известия вузов. Машиностроение. — 2006. — № 2. — С. 11—14.