

РАСЧЕТ И КОНСТРУИРОВАНИЕ МАШИН

539.3

К ИССЛЕДОВАНИЮ ДИНАМИЧЕСКОГО ПОВЕДЕНИЯ СИСТЕМ С РАСПРЕДЕЛЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ НА ЭВМ*

Канд. физ.-мат. наук, доц. А.Ю. КАРПАЧЕВ, студ. М.В. НЕБЕСНЫЙ, студ. В.А. ОВЧИННИКОВ

Разработан математический аппарат анализа напряженно-деформированного состояния тонких круглых пластин (дисков) с переменным профилем сечения вдоль радиального направления. Пластины находятся в сложном движении, при котором относительное и переносное движение представляют собой вращение вокруг пересекающихся взаимно-перпендикулярных осей. Приведено сопоставление результатов численных расчетов с данными экспериментов.

The mathematical apparatus of the deflected mode analysis of thin round plates (disks) with a variable profile of section along a radial direction is developed. Plates are in compound motion at which relative and translational motion is the rotation around intersected mutual-perpendicular axes. Comparison of results of numerical calculations to data of experiments is instanced.

Изучение динамического поведения систем с распределенными параметрами имеет большое практическое значение. В частности, это касается упругих кольцевых тонких пластин, совершающих сложное движение, которыми можно моделировать работу основных конструктивных элементов реальных машин и механизмов.

Для демонстрации деформации таких упругих тел в виде резинового диска при его сложном вращении может служить лабораторная установка, показанная на рис. 1. Она является усовершенствованным аналогом механического прибора, описанного в [1]. В нем сложное движение обеспечивается за счет вращения рукоятки. Диск посредством ремня приводится в относительное вращение, одновременно происходит движение кронштейна, которое вызывает переносное вращение вокруг вертикальной оси. В отличие от прототипа в предлагаемой установке вращения обеспечивают два независимо управляемых электромотора, причем блок управления 2 позволяет изменять значения переносной и относительной скорости вращения диска 1. Максимальные значения прогибов диска в результате деформации могут быть визуально зафиксированы по шкале определения линейных перемещений 3. Качественная картина деформированного состояния диска при работе установки представлена на рис. 2.

В дальнейшем под относительным движением диска считаем его вращение с постоянной угловой скоростью ω , вокруг оси y , как показано на рис. 3. Переносное движение предполагаем происходящим с постоянной угловой скоростью ω_c вокруг оси z .

При наличии описанного сложного движения диска он деформируется таким образом, что каждая его частица смещается в направлении, противоположном ускорению,

* В статью вошли фрагменты материалов, подготовленных на кафедре теоретической механики МГТУ им. Н.Э. Баумана и представленные М. Небесным и В. Овчинниковым на Студенческой инновационной научно-инженерной выставке «Политехника—2006», их работа удостоена Диплома I-ой степени, студенты рекомендованы на премию Президента РФ в области НИР студентов. В проведении и оформлении экспериментальных исследований активно участвовал студент М.Р. ОСТРОУМОВ, который также способствовал успешному выступлению своих товарищей на выставке.

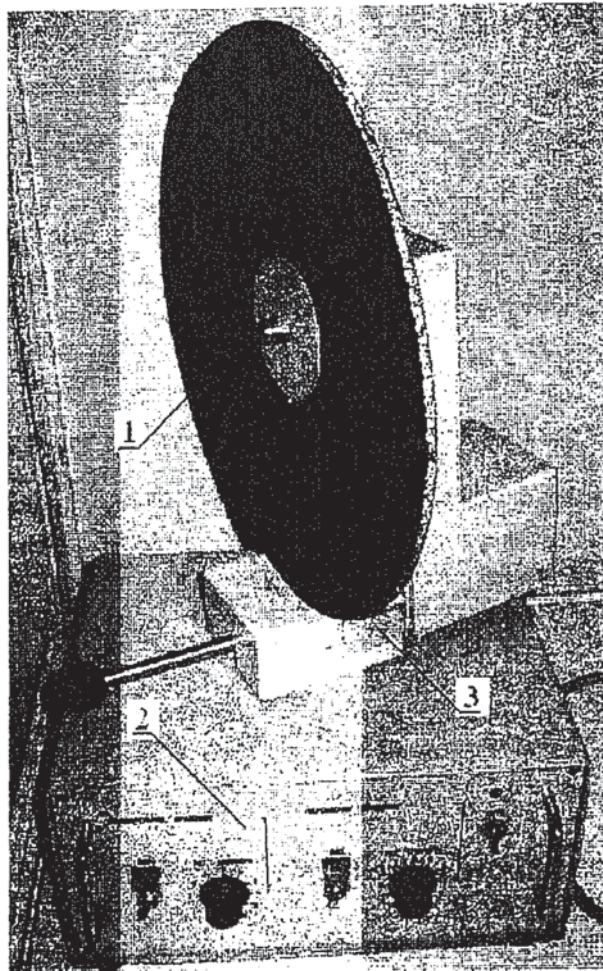


Рис. 1. Вид экспериментальной установки

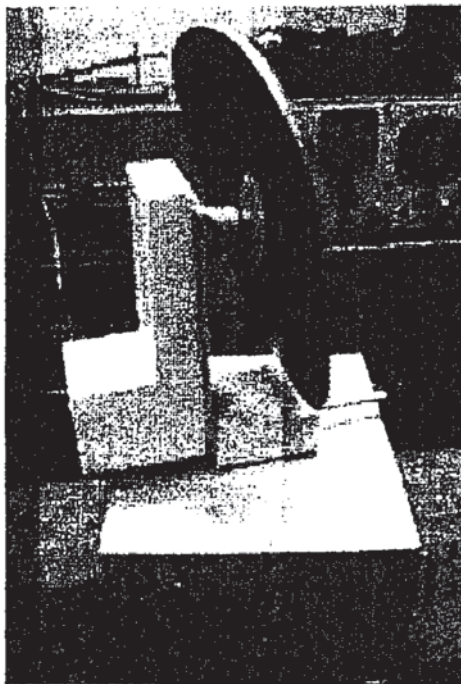


Рис. 2. Деформация резинового диска при его сложном вращении

$$\bar{a} = \bar{a}_r + \bar{a}_e + \bar{a}_k, \quad (1)$$

где \bar{a}_r — относительное ускорение, \bar{a}_e — переносное ускорение и \bar{a}_k — ускорение Кориолиса. Последняя составляющая ускорения (рис. 3) определяется известной формулой

$$\bar{a}_k = 2(\bar{\omega}_e \times \bar{v}_r), \quad (2)$$

где \bar{v}_r — относительная скорость. Это приводит к растяжению и изгибу диска.

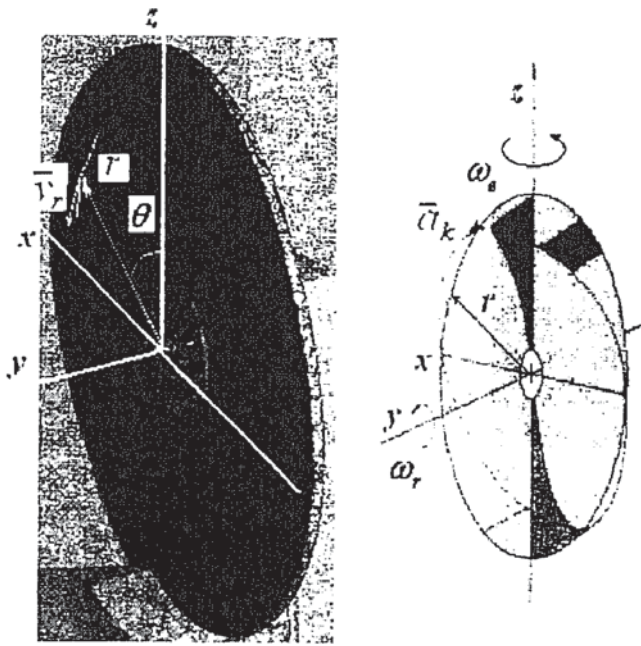


Рис. 3. Кинематическая схема

Расчет деформаций рассмотренного тела с позиций двумерной геометрически нелинейной теории круглых пластин может оказаться слишком трудоемким. Решение вопроса осложняется нелинейным характером зависимостей ускорений, а следовательно, и вызывающих эти ускорения сил от порождающих их деформаций.

Обратимся к допущениям, которые позволяют исследовать деформацию диска на основе решения одномерной краевой задачи с использованием линеаризованных уравнений [2].

Перемещения точек срединной поверхности диска в направлении нормали к ней W считаем малыми по сравнению с его радиусом s .

Используемые линеаризованные соотношения построены в предположении, что напряженное состояние диска состоит из основного и дополнительного. Первое вызвано растяжением диска в его плоскости и обусловлено относительным ускорением $a_r = a_r^n = \omega_r^2 r$, второе — от изгиба из его плоскости как следствие проявления ускорений $a_k = 2\omega_e \omega_r r \cos \theta$ и $a_e = a_e^n = \omega_e^2 W$.

Рассмотрим случаи, когда $\omega_e^2 \ll \omega_r^2$. При выполнении этого условия основное напряженное состояние диска можно считать осесимметричным. Действием аэродинамических сил на диск пренебрегаем.

Для решения задачи о расчете основного напряженного состояния можно воспользоваться основными соотношениями теории растяжения пластин в виде системы из двух дифференциальных уравнений [2]

$$\frac{d\tilde{u}}{d\tilde{r}} = (1 - \mu^2) \frac{\tilde{N}_r}{k_h} - \mu \frac{\tilde{u}}{\tilde{r}},$$

$$\frac{d\tilde{N}_r}{d\tilde{r}} = k_h \frac{\tilde{u}}{\tilde{r}^2} - (1 - \mu) \frac{\tilde{N}_r}{\tilde{r}} - k_h \tilde{q}_r \tilde{r} \quad (3)$$

и одного алгебраического

$$\tilde{N}_\theta = k_h \frac{\tilde{u}}{\tilde{r}} + \mu \tilde{N}_r, \quad (4)$$

где переменные параметры представлены в безразмерной форме и имеют вид

$$\tilde{r} = \frac{r}{c}, \quad \tilde{u} = \frac{c\eta}{h_0^2} u, \quad \tilde{N}_{(r \leftrightarrow \theta)} = \frac{\eta c^2}{E h_0^3} N_{(r \leftrightarrow \theta)}, \quad \tilde{q}_r = \frac{\eta c^4}{E h_0^2} \rho \omega_r^2, \quad h = k_h h_0,$$

$$(\eta = 12(1 - \mu^2)). \quad (5)$$

N_r и N_θ — силы в сечениях, отнесенные к единице длины сечения, (показаны на рис. 4, а), h_0 — некоторая характерная толщина профиля диска, ρ — плотность его материала, u — перемещения точек вдоль радиуса, E — модуль Юнга, μ — коэффициент Пуассона. Соотношения (3)—(5) позволяют найти основное напряженное состояние пластины (диска) при известных граничных условиях и угловой скорости вращения.

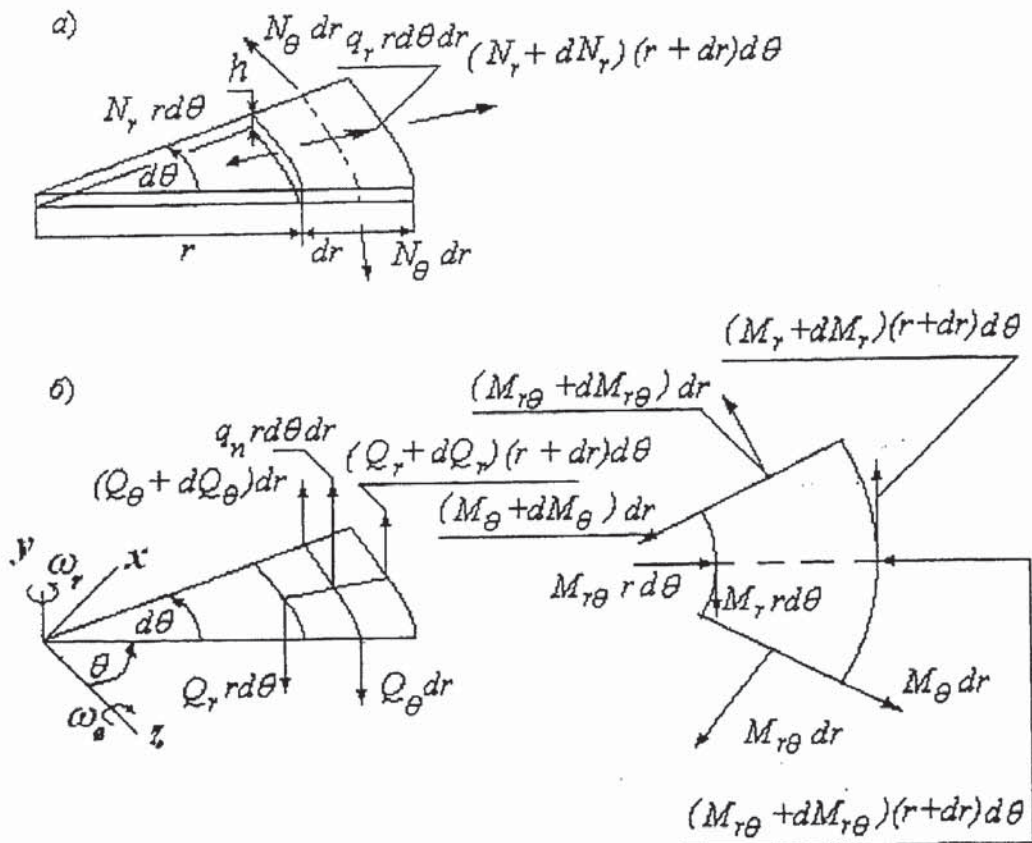


Рис. 4. Расчетные схемы к выводу основных соотношений теории круглых пластин

Дифференциальные уравнения, описывающие движения элемента пластины при ее изгибе, примем в виде, использованном в [2],

$$\begin{aligned} \frac{\partial(rM_{r\theta})}{\partial r} + M_{r\theta} + \frac{\partial M_{\theta}}{\partial \theta} - Q_{\theta}r &= 0, \\ \frac{\partial(rM_r)}{\partial r} - M_{\theta} + \frac{\partial M_{r\theta}}{\partial \theta} - Q_r r &= 0, \\ \frac{\partial(rQ_r)}{\partial r} + \frac{\partial Q_{\theta}}{\partial \theta} + q_n r + N_r r \frac{\partial^2 W}{\partial r^2} + N_{\theta} r \left(\frac{\partial^2 W}{r^2 \partial \theta^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial W}{\partial r} \right) - q_r h r \frac{\partial W}{\partial r} &= 0, \end{aligned} \quad (6)$$

где $W = W(r, \theta)$.

Уравнения (6) получены добавлением в уравнения равновесия элемента пластины распределенной инерционной силы

$$q_n = \rho h (2\omega_e \omega_r r \cos \theta + \omega_e^2 W), \quad (7)$$

как показано на рис. 4, б.

Первые два уравнения (6) соответствуют уравнениям моментов, причем изгибающие (M_r , M_{θ}) моменты и момент кручения ($M_{r\theta}$) в сечениях пластины связаны с ее прогибом соотношениями упругости

$$\begin{aligned} M_r &= -\frac{Eh^3}{\eta} \left[\frac{\partial^2 W}{\partial r^2} + \mu \left(\frac{1}{r} \frac{\partial W}{\partial r} + \frac{\partial^2 W}{r^2 \partial \theta^2} \right) \right], \\ M_{\theta} &= -\frac{Eh^3}{\eta} \left[\mu \frac{\partial^2 W}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial W}{\partial r} + \frac{\partial^2 W}{r^2 \partial \theta^2} \right], \\ M_{r\theta} &= -\frac{Eh^3}{12(1+\mu)} \left[\frac{\partial^2 W}{r \partial r \partial \theta} - \frac{\partial W}{r^2 \partial \theta} \right]. \end{aligned} \quad (8)$$

Приведенная поперечная сила в кольцевом сечении определяется по формуле

$$Q = Q_r + \frac{\partial M_{r\theta}}{r \partial \theta}. \quad (9)$$

Третье уравнение в (6) соответствует уравнению проекций поперечных сил (Q_r , Q_{θ}) на нормаль к деформированному элементу пластины.

При деформации диска наблюдается его перегиб или образование формы деформирования с одним узловым диаметром, перемещения точек которого — $W = 0$. В связи с этим переменные, входящие в (6), представим в следующем виде:

$$\begin{aligned} W &= w \cos \theta, \quad M_{r\theta} = H \sin \theta, \\ M_r &= M \cos \theta, \quad Q_r = V_r \cos \theta, \\ M_{\theta} &= L \cos \theta, \quad Q_{\theta} = V_{\theta} \sin \theta, \\ Q &= V \cos \theta. \end{aligned} \quad (10)$$

Введем безразмерные параметры

$$\tilde{w} = \sqrt{\eta} \frac{w}{h_0}, \quad \tilde{\vartheta} = \frac{c}{h_0} \sqrt{\eta} \vartheta, \quad \tilde{M} = \frac{c^2 \eta^{3/2}}{E h_0^4} M, \quad (M \leftrightarrow H, L),$$

$$\tilde{Q} = \frac{c^3 \eta^{3/2}}{E h_0^4} Q, \quad (Q \leftrightarrow V_r, V_\theta), \quad (11)$$

причем

$$\frac{d\tilde{w}}{d\tilde{r}} = \tilde{\vartheta}. \quad (12)$$

Соотношения (8) с учетом (5), (10)—(12) примут вид

$$\frac{d\tilde{\vartheta}}{d\tilde{r}} = -\frac{\tilde{M}}{k_h^3} - \mu \left(\frac{\tilde{\vartheta}}{\tilde{r}} - \frac{\tilde{w}}{\tilde{r}^2} \right), \quad (13)$$

$$\tilde{L} = -k_h^3 \left(\mu \frac{d\tilde{\vartheta}}{d\tilde{r}} + \frac{\tilde{\vartheta}}{\tilde{r}} - \frac{\tilde{w}}{\tilde{r}^2} \right),$$

$$\tilde{H} = k_h^3 (1 - \mu) \left(\frac{\tilde{\vartheta}}{\tilde{r}} - \frac{\tilde{w}}{\tilde{r}^2} \right), \quad (14)$$

а уравнения движения элемента пластины запишутся в форме

$$\frac{d(\tilde{r}\tilde{H})}{d\tilde{r}} + \tilde{H} - \tilde{L} - \tilde{V}_\theta \tilde{r} = 0,$$

$$\frac{d(\tilde{r}\tilde{M})}{d\tilde{r}} - \tilde{L} + \tilde{H} - \tilde{V}_r \tilde{r} = 0, \quad (15)$$

$$\begin{aligned} & \frac{d(\tilde{r}\tilde{V}_r)}{d\tilde{r}} + \tilde{V}_\theta + k_h \tilde{q}_k \tilde{r}^2 + \tilde{N}_r \tilde{r} \frac{d\tilde{\vartheta}}{d\tilde{r}} + \tilde{N}_\theta \tilde{r} \left(\frac{\tilde{\vartheta}}{\tilde{r}} - \frac{\tilde{w}}{\tilde{r}^2} \right) + \\ & + k_h \tilde{q}_e \tilde{r} \tilde{w} - k_h \tilde{q}_r \tilde{r}^2 \tilde{\vartheta} = 0, \end{aligned}$$

где

$$\tilde{q}_k = \frac{c^5 \eta^{3/2}}{E h_0^3} 2\rho \omega_e \omega_r, \quad \tilde{q}_e = \frac{c^5 \eta^{3/2}}{E h_0^3} \rho \omega_e^2. \quad (16)$$

Исключив из (15) \tilde{V}_θ и введя $\tilde{V} = \tilde{V}_r + \frac{\tilde{H}}{\tilde{r}}$, с учетом (13) и (14) получим

$$\frac{d\tilde{M}}{d\tilde{r}} = \tilde{V} - (1 - \mu) \frac{\tilde{M}}{\tilde{r}} - k_h^3 \frac{(1 - \mu)(3 + \mu)}{\tilde{r}} \left(\frac{\tilde{\vartheta}}{\tilde{r}} - \frac{\tilde{w}}{\tilde{r}^2} \right), \quad (17)$$

$$\begin{aligned} \frac{d\tilde{V}}{d\tilde{r}} = & -k_h^3 \frac{(1 - \mu)(3 + \mu)}{\tilde{r}^2} \left(\frac{\tilde{\vartheta}}{\tilde{r}} - \frac{\tilde{w}}{\tilde{r}^2} \right) + \left(\frac{\mu}{\tilde{r}^2} + \frac{\tilde{N}_r}{k_h^3} \right) \tilde{M} + \\ & + (\mu \tilde{N}_r - \tilde{N}_\theta) \left(\frac{\tilde{\vartheta}}{\tilde{r}} - \frac{\tilde{w}}{\tilde{r}^2} \right) - \frac{\tilde{V}}{\tilde{r}} + k_h (\tilde{q}_r \tilde{r} \tilde{\vartheta} - \tilde{q}_k \tilde{r} - \tilde{q}_e \tilde{w}). \end{aligned} \quad (18)$$

Для проведения расчетов систему уравнений (3) запишем в матричной форме

$$\frac{d}{d\bar{r}}\{X\} = [A]\{X\} + \{G\}, \quad (19)$$

где $\{X\} = (x_1, x_2)^T$, $x_1 = \bar{u}$, $x_2 = \bar{N}_r$, $[A]$ — матрица (2×2) переменных коэффициентов,

$$a_{11} = -\mu/\bar{r}, \quad a_{12} = (1-\mu^2)/k_h, \quad a_{21} = k_h/\bar{r}^2, \quad a_{22} = -(1-\mu)/\bar{r}, \quad (20)$$

а $\{G\} = (g_1, g_2)^T$ — вектор правых частей

$$g_1 = 0, \quad g_2 = -k_h \bar{q}_r \bar{r}. \quad (21)$$

Решение уравнения (19) должно быть подчинено двум условиям на границах интервала интегрирования: $\bar{r} = \bar{k}$, $\bar{r} = 1$, где $\bar{k} = b/c$, b — радиус зажимных фланцев диска. Численное решение можно получить с использованием метода начальных параметров (НП).

Поясним алгоритм проведения расчета указанным методом применительно к рассматриваемой задаче. Внешний контур пластины свободен от напряжений: $\bar{N}_r(1) = 0$, а на внутреннем контуре закрепление примем в виде жесткой заделки: $\bar{u}(\bar{k}) = 0$. Тогда полагая нулевыми компоненты вектора правых частей, проинтегрируем (19) с граничными условиями $x_1(\bar{k}) = 0$, $x_2(\bar{k}) = 1$; второй раз интегрирование (19) следует проводить с учетом компонент вектора правых частей, но при нулевых граничных условиях.

Искомую силу на внутреннем контуре определим как $\bar{N}_r(\bar{k}) = x_2(\bar{k}) = -x_2^1(1)/x_2^2(1)$, где $x_2^1(1)$, $x_2^2(1)$ — значения компоненты x_2 на внешнем контуре, полученные соответственно в результате первого и второго интегрирований. Затем после интегрирования уравнения (19) при найденных граничных условиях $x_1(\bar{k}) = 0$, $x_2(\bar{k}) = \bar{N}_r(\bar{k})$, определим значения радиальных, а используя (4), и окружных распределенных сил.

Систему уравнений (12), (13), (17), (18) представим в виде одного уравнения

$$\frac{d}{d\bar{r}}\{Y\} = [B]\{Y\} + \{D\}, \quad (22)$$

где $\{Y\} = (y_1, y_2, y_3, y_4)^T$, $y_1 = \bar{w}$, $y_2 = \bar{\vartheta}$, $y_3 = \bar{M}$, $y_4 = \bar{V}$, а $[B]$ — матрица (4×4) переменных коэффициентов,

$$b_{11} = 0, \quad b_{12} = 1, \quad b_{13} = 0, \quad b_{14} = 0, \quad b_{21} = \mu/\bar{r}^2, \quad b_{22} = -\mu/\bar{r}, \quad b_{23} = -1/k_h^3,$$

$$b_{24} = 0, \quad b_{31} = k_h^3(3+\mu)(1-\mu)/\bar{r}^3, \quad b_{32} = -k_h^3(1-\mu)(3+\mu)/\bar{r}^2,$$

$$b_{33} = -(1-\mu)/\bar{r}, \quad b_{34} = 1, \quad (23)$$

$$b_{41} = [k_h^3(1-\mu)(3+\mu)/\bar{r}^2 - (\mu\bar{N}_r - \bar{N}_\theta)]/\bar{r}^2 - k_h \bar{q}_r,$$

$$b_{42} = k_h \bar{q}_r \bar{r} + (\mu\bar{N}_r - \bar{N}_\theta)/\bar{r} - k_h^3(1-\mu)(3+\mu)/\bar{r}^3,$$

$$b_{43} = \mu/\bar{r}^2 + \bar{N}_r/k_h^3, \quad b_{44} = -1/\bar{r},$$

$$\{D\} = (0, 0, 0, -k_h \bar{q}_k \bar{r})^T.$$

Решение уравнения (22) должно удовлетворять граничным условиям $\bar{r} = \bar{k}$ $\bar{w} = 0$, $\bar{\vartheta} = 0$; $\bar{r} = 1$ $\bar{M} = 0$, $\bar{V} = 0$.

Проведение расчетов определения прогибов пластины с использованием уравнения (22) можно осуществить также методом НП в последовательности, по аналогии с решением краевой задачи, на основе уравнения (19).

Рассмотрим результаты исследования деформации диска лабораторной установки с помощью предлагаемого способа. Предварительно было установлено, что характеристики материала диска составляют $E = 3,5$ МПа, $\mu = 0,5$, $\rho = 280$ кг/м³. Его геометрические параметры: $c = 160$ мм, $h_0 = 6$ мм, $k_h = 1$. Расчет проводился для значений относительной угловой скорости $\omega_r = 20$ рад/с и 37 рад/с при постоянном значении переносной угловой скорости ω_e , равном 2,2 рад/с.

На рис. 5 представлены в виде графиков полученные зависимости прогибов диска от значений его радиуса. Прогиб диска, наблюдаемый в проведенном опыте на лабораторной установке, представлен на рис. 6. Угловая скорость собственного вращения диска в эксперименте составляла примерно 4,5 об/с. Сопоставление теоретических и экспериментальных данных максимальных перемещений точек диска обнаруживает удовлетворительное совпадение результатов, свидетельствующее о правомерности предложенного подхода к анализу поведения диска. Проведенные исследования также показали, что учет в расчетах при определении прогибов диска относительного и переносного ускорения вносит уточнения, составляющие 8—23 % от значений прогибов, обусловленных ускорением Кориолиса.

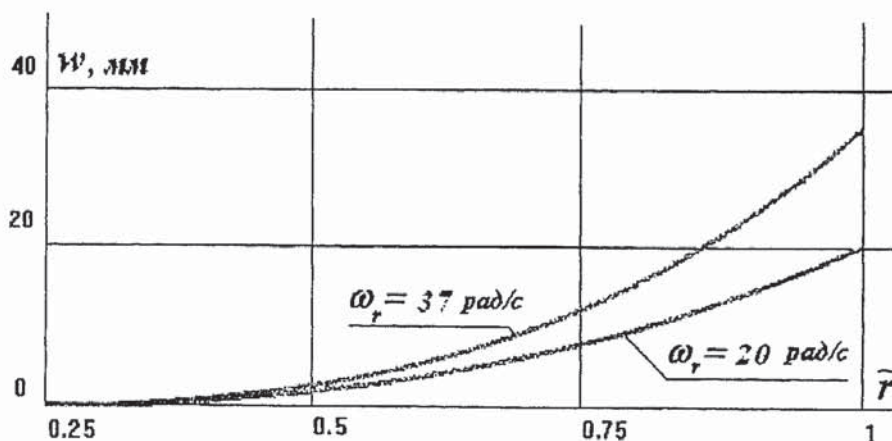


Рис. 5. Расчетные значения прогиба диска в радиальном направлении

Результаты исследования переменности толщины диска в радиальном направлении на прогиб представлены на рис. 7. При этом зависимости толщин профиля сечения для трех анализируемых случаев приняты в виде

- 1) $k_h = 1,3 - 0,5\tilde{r}$, 2) $k_h = 1$, 3) $k_h = 0,7 + 0,5\tilde{r}$.

Материал пластин (дисков) — сталь, с характеристиками $E = 2,1 \cdot 10^5$ МПа, $\mu = 0,3$, $\rho = 7811$ кг/м³, геометрические параметры пластин $c = 0,3$ м, $h_0 = 0,004$ м, а $\omega_r = 50$ рад/с, $\omega_e = \pi$ рад/с. Как видно из рис. 7, утонение диска к его периферии ведет к уменьшению максимального прогиба на 17 %, а утолщение профиля — к увеличению прогиба на 34 % по сравнению с прогибом диска постоянной толщины (случай 2).



Рис. 6. Эксперимент по определению максимального значения прогиба диска

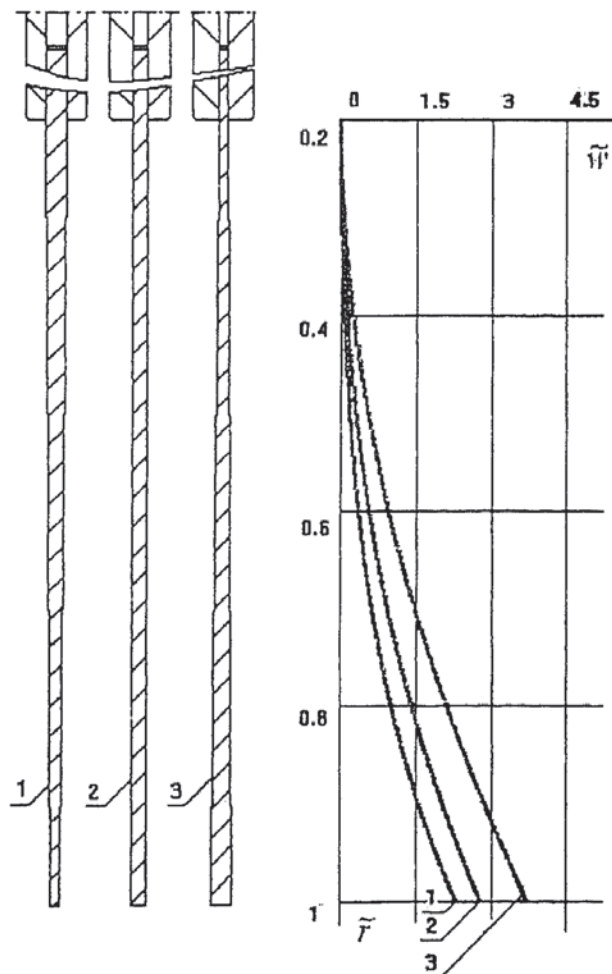


Рис. 7. Влияние формы профиля диска на его прогиб

ВЫВОДЫ

1. Предложенный метод позволяет определить влияние на прогиб пластины каждой из составляющих ускорения — $\bar{a}_r, \bar{a}_e, \bar{a}_k$ ее точек.

2. Метод дает возможность находить рациональный профиль диска, обеспечивающий допустимый прогиб при заданных параметрах движения.

3. Лабораторная установка создает условия для экспериментальных исследований кинематических границ применимости принятых допущений.

4. Разработанный метод и полученные на его основе результаты могут быть использованы при проектировании и проверочных расчетах дисковых носителей мобильных информационных систем, а также тонких дисков в конструкциях энергетических и силовых установок.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Динамика. Методические указания по проведению практических занятий с использованием моделей и приборов по курсу «Теоретическая механика». Ч. II. Под ред. Блюмина Г.Д. — Изд. МВТУ. — 1988. — 57 с.
2. Карпачев А. Ю. Собственные динамические характеристики вращающихся круглых пил при неравномерном нагреве // Вестник машиностроения. — 2006. — № 5. — С. 32—36.

539.374

ПРОДОЛЬНЫЕ КОЛЕБАНИЯ ОДНОРОДНОЙ АТОМНОЙ ЦЕПОЧКИ

Д-р техн. наук, проф. К.И. РОМАНОВ

Разработан метод приближенного исследования движения физически нелинейной цепной системы, составленной из одинаковых атомов, рассматриваемых как сосредоточенная масса. Показано на основе закона сохранения энергии, что колебания цепочки сводятся к динамике системы с одной степенью свободы. Полученный результат может быть применен при анализе любой однородной цепной системы в условиях механических или электрических колебаний.

The method of the approximate research of atomic motion in a physically nonlinear linked structure made of identical atoms, considered as the concentrated mass is developed. It is displayed on the basis of law of conservation of energy, that the atomic oscillations are reduced to dynamics of system with one degree of freedom. The received result can be applied at the analysis of any homogeneous chain system in conditions of mechanical or electric oscillations.

Продольные колебания однородной цепочки изучались в [1] в случае линейных связей между атомами. В результате для закрепленной по концам цепочки было показано, что с помощью подстановки

$$x_k = A(t) \sin k\beta, \quad \beta = \frac{s\pi}{n+1}, \quad (1)$$

где x_k — смещение атомов из положений равновесия (рис. 1); $A(t)$ — функция времени; β — параметр, зависящий от числа полуволин колебаний s ; n — число колеблющихся масс (на рис. 1 изображена цепочка при $n = 4$), система большого числа атомов сводится к системе с одной степенью свободы.

Ниже указанная подстановка применена к задаче о свободных колебаниях цепочки при нелинейных силах межатомного взаимодействия [2, 3]