№ 5 2007

531.80

ВЛИЯНИЕ РАДИУСА КРИВИЗНЫ ОСИ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ПРУЖИНЫ, ИЗОГНУТОЙ В ДУГУ ОКРУЖНОСТИ, НА НИЗШУЮ СОБСТВЕННУЮ ЧАСТОТУ (МОДЕЛЬ РАБОЧЕГО ЭЛЕМЕНТА СПИРАЛЬНОГО ГРОХОТА).

Асп. Р. Н. БАДИКОВ, д-р техн. наук, проф. Ф. Д. СОРОКИН

На основе известных уравнений механики стержней В.А. Светлицкого формулируется краевая задача для винтовой цилиндрической пружины с прямой осью, подверженной изгибу, с помощью которой решается задача поиска низшей собственной частоты, а также находится приближенное выражение для зависимости низшей собственной частоты пружины от параметров изгиба.

The equations of the theory of thin elastic rod was used to solve the boundary value problem which was formed for screw cylindrical spring subjected to bending. Based on this static solution the lower own frequency was found and the equation for lower own frequency versus bending parameters was determined.

Для просеивания и измельчения сухого сыпучего материала применяются так называемые «спиральные грохоты». Это установки, рабочим органом которых являются цилиндрические пружины. Они просеивают рабочий сыпучий материал сквозь зазоры между витками, а также дробят крупные фракции рабочего сыпучего материала, захватываемые витками пружины вследствие изменения межвиткового расстояния, обусловленного деформацией пружины.

Стремление увеличить производительность и уменьшить энергозатраты привело к идее выводить систему на резонансные режимы работы, что, в свою очередь, поставило задачу поиска резонансных режимов работы с тем, чтобы управлять этими режимами путем изменения параметров системы. Так, можно управлять резонансными режимами работы путем изменения геометрии (например, поворотом концов пружины).

Получим выражение для низшей частоты изогнутой в дугу окружности пружины, заделанной по концам (рис. 1). Пружина в ненапряженном состоянии имеет такие геометрические параметры: D_0 — диаметр витка пружины; H_0 — высота пружины; d_0 — диаметр проволоки пружины; α_0 — угол подъема витка пружины; ρ — плотность материала проволоки пружины; i —число витков пружины.

Для цилиндрической пружины будут иметь место особенные выражения в интерпретации эквивалентного стержня для характеристик изгибной жесткости и массы единицы длины пружины в зависимости от ее параметров. Изгибную жесткость для пружины вычисляют, используя соотношение [3]

$$\mathrm{E}J_{\text{и}}=\frac{H_0 d_0^4}{32 D_0 i}\frac{\mathrm{E}}{2+\mu},$$

и учитывая при этом, что высота пружины $H_0=\pi D_0 i \operatorname{tg}\alpha_0$ [3],

$$\mathrm{E}J_{\text{и}}=\frac{\pi\mathrm{E}}{32(2+\mu)}d_0^4\operatorname{tg}\alpha_0. \quad (1)$$

Для пружины масса единицы длины эквивалентного стержня будет

$$q = \frac{\rho A L}{H_0} = \frac{\pi \rho d_0^2}{4 \sin \alpha_0},$$

где $A = \frac{\pi d_0^2}{4}$ — площадь сечения проволоки; $L = H_0 \sin \alpha_0$ — длина проволоки пружины.

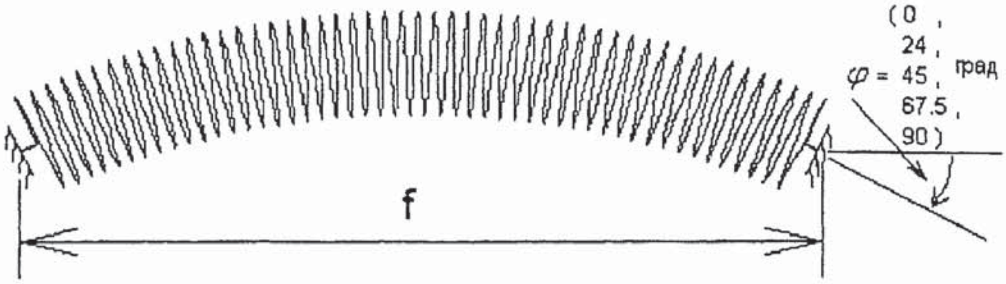

Рис. 1

При варьировании угла φ наклона осей концов пружины по отношению к осям ненагруженной пружины (рис. 1), сделаем предположение о подобии пружины, изогнутой в дугу окружности, консольно-закрепленному стержню (рис. 2). Выражение для низшей частоты собственных колебаний консольно-закрепленного стержня имеет вид [4]

$$p_0 = 3,52\sqrt{\frac{EJ_{и}}{ql^4}} \qquad (2)$$

где l — длина балки.

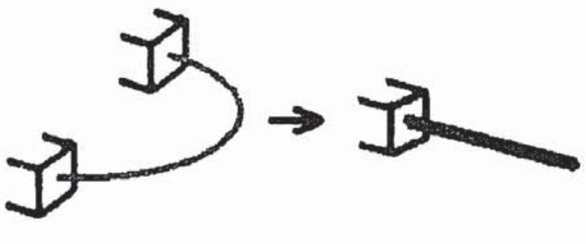

Рис. 2

Используя ранее полученное выражение для $EJ_{и}$ и q, получим

$$\sqrt{\frac{EJ_{и}}{ql^4}} = \sqrt{\frac{Ed_0^2 tg\alpha_0 \sin\alpha_0}{8(2+\mu)\rho}}\frac{1}{l^2}.$$

Подставляя в (2), найдем

$$p_0 = 3,52\sqrt{\frac{Ed_0^2 tg\alpha_0 \sin\alpha_0}{8(2+\mu)\rho}}\frac{1}{l^2}. \qquad (3)$$

Коэффициент 2 для изгибной жесткости и массы единицы длины, введенный для приведения «сложенной пополам» пружины к консольно-закрепленному стержню, в полученном выражении взаимно сократился.

Для определения приведенной длины l модели консольного стержня представим пружину в виде равнобедренного треугольника с двумя сторонами, равными $\frac{H_0}{2}$, и третьей стороной, равной f — расстоянию между концами осевой линии пружины. Тогда l можно будет условно принять за высоту равностороннего треугольника и вычислить как катет прямоугольного треугольника (рис. 3), т.е.

$$l^2 = \frac{H_0^2}{4} - \frac{f^2}{4}.$$

Окончательно выражение для низшей собственной частоты пружины, изогнутой в полуокружность, примет вид

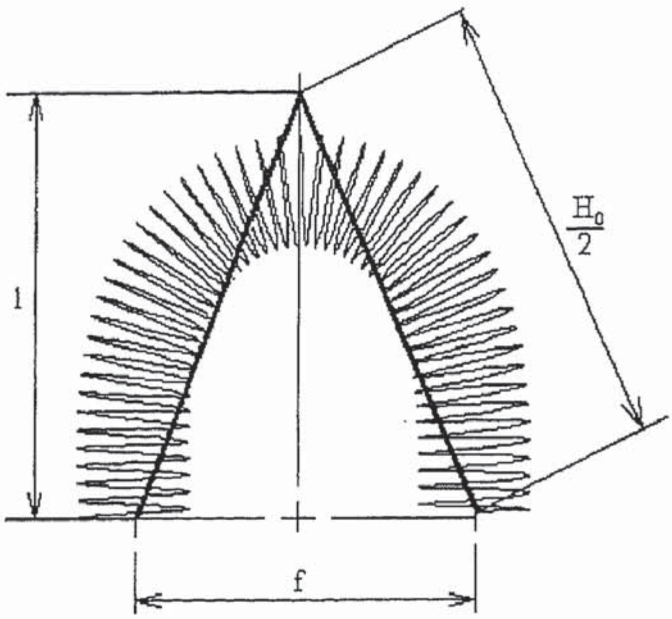

Рис. 3

$$p_0 = 3,52\sqrt{\frac{Ed_0^2 tg\alpha_0 \sin\alpha_0}{8(2+\mu)\rho}}\frac{1}{(\frac{H_0^2}{4}-\frac{f^2}{4})}. \qquad (4)$$

Сравнение полученного соотношения низшей собственной частоты для цилиндрической пружины, параметры которой следующие:

количество витков i, шт 50
диаметр проволоки d_0, м 0,006
диаметр пружины D, м 0,059
угол подъема α_0, град 2,78
модуль упругости E, Па........ 2,00E+11
коэффициент Пуассона μ 0,33
плотность ρ, кг/м^3 7800
высота пружины H_0, м 0,450228

с результатом, полученным с помощью уравнений малых колебаний механики стержней [2], решаемых относительно найденного с использованием нелинейных уравнений статики механики стержней [1] состояния равновесия изогнутой цилиндрической пружины, заделанной по краям (рис. 1), для разных значений угла φ поворота концов пружины, показывает, что необходимо ввести поправочные коэффициенты, используемые при вычислении l: $l^2 = \frac{H_0^2}{4}K_H - \frac{f^2}{4}K_f$, $K_H = \frac{1}{\left(\frac{\varphi}{90}0{,}2 + 0{,}8\right)}$, $K_f = 0{,}5$ (φ подставляется в градусах в диапазоне от 0 до 90).

Выражение (4) с введением поправочных коэффициентов принимает вид

$$p_0 = 3{,}52\sqrt{\frac{\mathrm{E}d_0^2 \mathrm{tg}\alpha_0 \sin\alpha_0}{8(2+\mu)\rho}}\frac{1}{\left(\frac{H_0^2}{4}\frac{1}{\left(\frac{\varphi}{90}0{,}2+0{,}8\right)} - \frac{f^2}{4}\frac{1}{2}\right)}. \tag{5}$$

Сравнение приближенного соотношения и решения по уравнениям механики стержней показано на рис. 4—8.

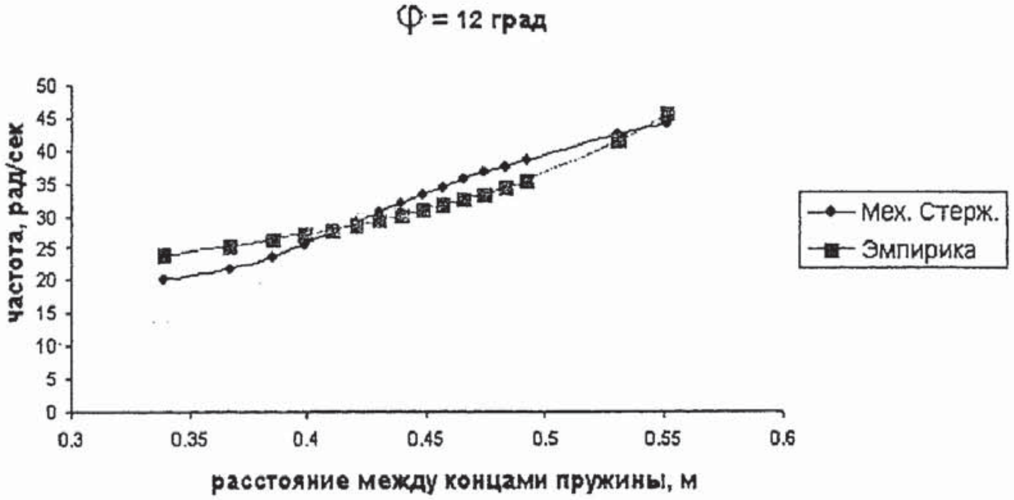

Рис. 4

Рис. 5

Разница между более точным решением [1, 2] и приближенным выражением (5) для изогнутой в дугу окружности цилиндрической пружины составляет, в среднем, не более 5%, следовательно, полученное выражение для низшей собственной частоты может успешно использовано при конструировании пружинных мельниц с варьируемой геометрией упругого элемента, для проектирования установки с требуемой низшей частотой собственных колебаний.

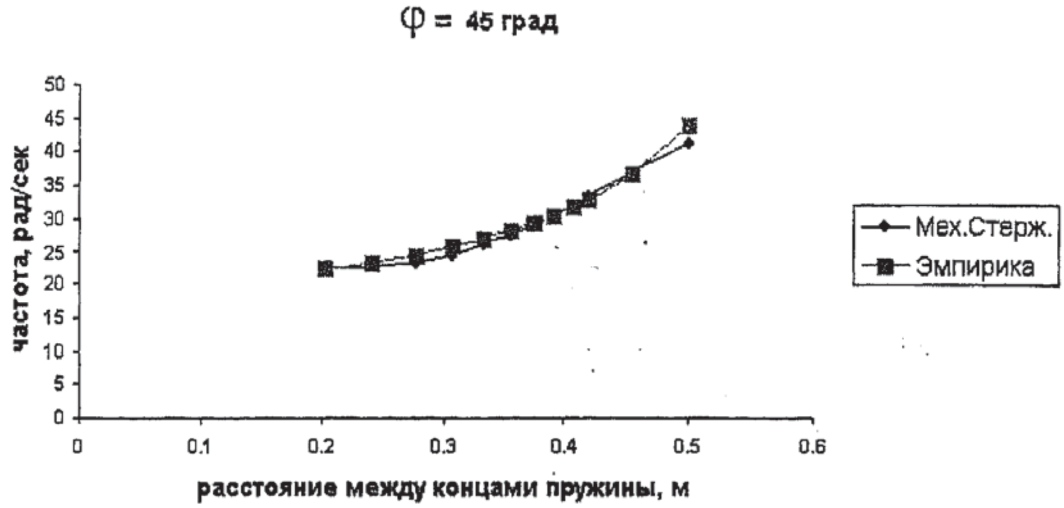

Рис. 6

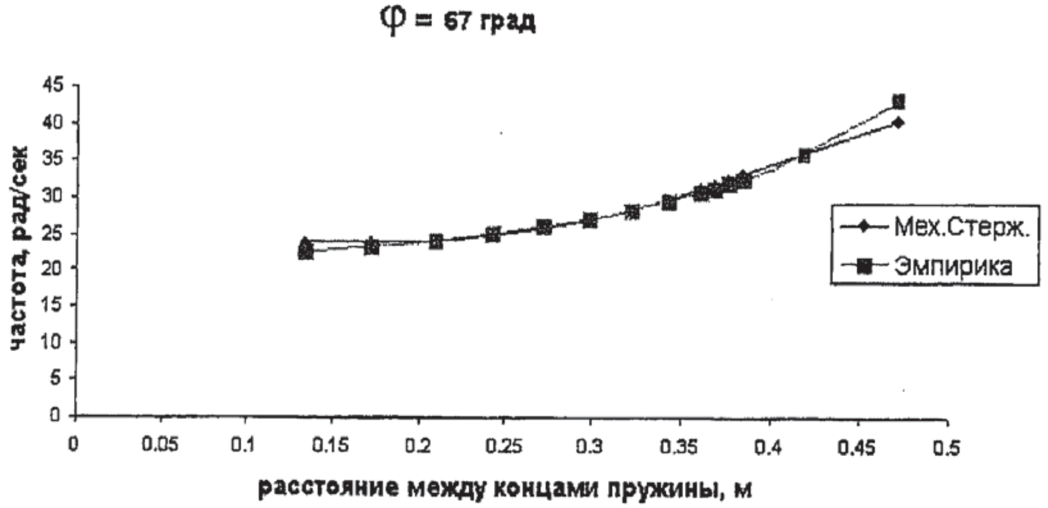

Рис. 7

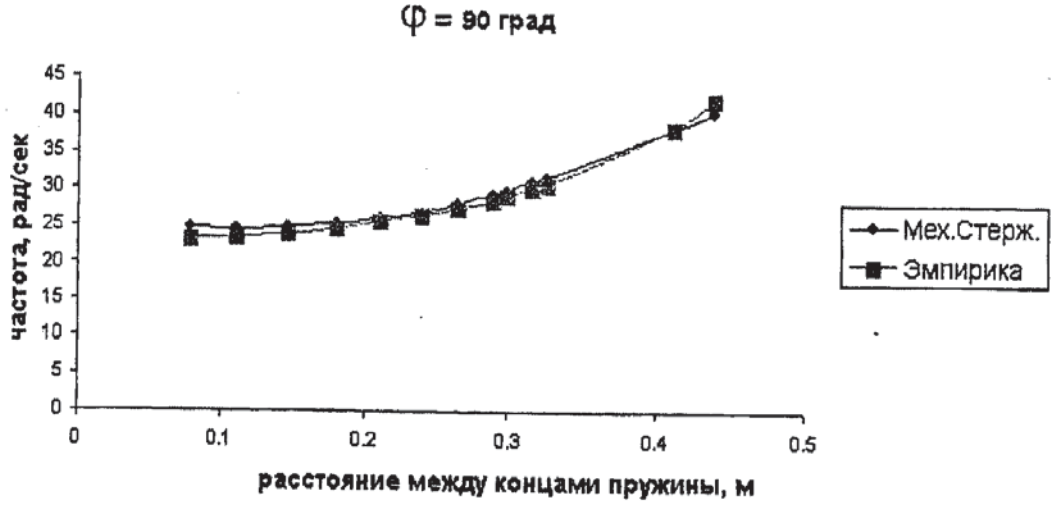

Рис. 8

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Светлицкий В. А. Механика стержней: Учеб. для втузов. В 2-х ч. Ч. 1. Статика. — М.: Высшая школа, 1987. — 320 с.
2. Светлицкий В. А. Механика стержней: Учеб. для втузов. В 2-х ч. Ч. 2. Динамика. — М.: Высшая школа, 1987. — 304 с.
3. Андреева Л. Е. Упругие элементы приборов. — М.: Машиностроение, 1981. — 392 с.
4. Пономарев С. Д., Бидерман В. Л. и др. Расчеты на прочность в машиностроении. М., 1959. — Т. 3. — 1120 с.

539.3

ИССЛЕДОВАНИЕ ПРОДОЛЬНО-ПОПЕРЕЧНОГО ИЗГИБА УПРУГОЙ ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ПЛАСТИНЫ

Канд. физ.-мат. наук, ст. препод. Н. В. МИНАЕВА, канд. физ.-мат. наук, доц. Ю.Г. МОРОЗОВ

Рассматривается поведение упругой, шарнирно закрепленной по всем краям прямоугольной пластины с начальным прогибом, поперечной и продольными нагрузками. Решение соответствующей задачи найдено методом возмущений с точностью до величины первого порядка малости.

Behavior of the elastic hinge spring fixed on all edges with the initial sag, shear and longitudinal loads is examined. Task solution is found using a perturbation method within magnitude of the first order of smallness.

Функция $w(x, y)$, описывающая продольно-поперечный изгиб пластины, по линейной теории является решением следующего дифференциального уравнения [1]:

$$D\nabla^4(w-f)+h\left(q\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+p\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)=r, \tag{1}$$

где $\nabla^4=\dfrac{\partial^4}{\partial x^4}+2\dfrac{\partial^4}{\partial x^2\partial y^2}+\dfrac{\partial^4}{\partial y^4}$, $f(x,y)$ — функция, описывающая начальный прогиб; h — толщина пластины; D — цилиндрическая жесткость; $r(x, y)$ — интенсивность поперечной нагрузки; q — интенсивность продольной нагрузки, приложенной на краях при $x = 0$ и $x = a$; p — интенсивность продольной нагрузки, приложенной на краях при $y = 0$ и $y = b$, с граничными условиями

$$\begin{gathered} w(0, y) = f(0, y);\ w(a, y) = f(a, y); \\ w(x, 0) = f(x, 0);\ w(x, b) = f(x, b); \\ \left.\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right|_{x=0} = \left.\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right|_{x=0};\ \left.\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right|_{x=a} = \left.\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right|_{x=a}; \\ \left.\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right|_{y=0} = \left.\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right|_{y=0};\ \left.\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right|_{y=b} = \left.\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right|_{y=b}. \end{gathered} \tag{2}$$