СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Светлицкий В. А. Механика стержней: Учеб. для втузов. В 2-х ч. Ч. 1. Статика. — М.: Высшая школа, 1987. — 320 с.
2. Светлицкий В. А. Механика стержней: Учеб. для втузов. В 2-х ч. Ч. 2. Динамика. — М.: Высшая школа, 1987. — 304 с.
3. Андреева Л. Е. Упругие элементы приборов. — М.: Машиностроение, 1981. — 392 с.
4. Пономарев С. Д., Бидерман В. Л. и др. Расчеты на прочность в машиностроении. М., 1959. — Т. 3. — 1120 с.

539.3

ИССЛЕДОВАНИЕ ПРОДОЛЬНО-ПОПЕРЕЧНОГО ИЗГИБА УПРУГОЙ ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ПЛАСТИНЫ

Канд. физ.-мат. наук, ст. препод. Н. В. МИНАЕВА, канд. физ.-мат. наук, доц. Ю.Г. МОРОЗОВ

Рассматривается поведение упругой, шарнирно закрепленной по всем краям прямоугольной пластины с начальным прогибом, поперечной и продольными нагрузками. Решение соответствующей задачи найдено методом возмущений с точностью до величины первого порядка малости.

Behavior of the elastic hinge spring fixed on all edges with the initial sag, shear and longitudinal loads is examined. Task solution is found using a perturbation method within magnitude of the first order of smallness.

Функция $w(x, y)$, описывающая продольно-поперечный изгиб пластины, по линейной теории является решением следующего дифференциального уравнения [1]:

$$D\nabla^4(w-f)+h\left(q\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+p\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)=r, \tag{1}$$

где $\nabla^4=\frac{\partial^4}{\partial x^4}+2\frac{\partial^4}{\partial x^2\partial y^2}+\frac{\partial^4}{\partial y^4}$, $f(x,y)$ — функция, описывающая начальный прогиб; h — толщина пластины; D — цилиндрическая жесткость; $r(x, y)$ — интенсивность поперечной нагрузки; q — интенсивность продольной нагрузки, приложенной на краях при $x = 0$ и $x = a$; p — интенсивность продольной нагрузки, приложенной на краях при $y = 0$ и $y = b$, с граничными условиями

$$w(0, y)=f(0, y);\ w(a, y)=f(a, y);$$

$$w(x, 0)=f(x, 0);\ w(x, b)=f(x, b);$$

$$\left.\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right|_{x=0}=\left.\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right|_{x=0};\ \left.\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right|_{x=a}=\left.\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right|_{x=a}; \tag{2}$$

$$\left.\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right|_{y=0}=\left.\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right|_{y=0};\ \left.\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right|_{y=b}=\left.\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right|_{y=b}.$$

Пусть при $f(x, y) = f_0(x, y)$, $r(x, y) = r_0(x, y)$ задача (1), (2) имеет решение

$$w(x, y) = w_0(x, y). \tag{3}$$

Оно будет иметь физический смысл, т.е. состояние пластины, соответствующее (3), будет физически осуществимо, а решение это можно брать в качестве приближенного решения задачи (1), (2) при достаточно малых отклонениях f от f_0 и r от r_0, если решение задачи (1), (2) непрерывно зависит от функций $f(x, y)$ и $r(x, y)$ при $f(x, y) = f_0(x, y)$, $r(x, y) = r_0(x, y)$. Для проведения анализа непрерывности зависимости решения задачи (1), (2) от функций $f(x, y)$, $r(x, y)$, как следует из теоремы о неявных функциях [2, 3], необходимо составить вспомогательную задачу относительно функции $\zeta(x, y)$, которая в данном случае будет такой:

$$D\nabla^4(w_0+\zeta-f_0)+h\left[q\frac{\partial^2(w_0+\zeta)}{\partial x^2}+p\frac{\partial^2(w_0+\zeta)}{\partial y^2}\right]=r_0; \tag{4}$$

$$(w_0+\zeta)_{x=0}=f(0, y);\ (w_0+\zeta)_{x=a}=f(a, y);$$

$$(w_0+\zeta)_{y=0}=f(y, 0);\ (w_0+\zeta)_{y=b}=f(x, b);$$

$$\left.\frac{\partial^2(w_0+\zeta)}{\partial x^2}\right|_{x=0}=\left.\frac{\partial^2 f_0}{\partial x^2}\right|_{x=0};\ \left.\frac{\partial^2(w_0+\zeta)}{\partial x^2}\right|_{x=a}=\left.\frac{\partial^2 f_0}{\partial x^2}\right|_{x=a}; \tag{5}$$

$$\left.\frac{\partial^2(w_0+\zeta)}{\partial y^2}\right|_{y=0}=\left.\frac{\partial^2 f_0}{\partial y^2}\right|_{y=0};\ \left.\frac{\partial^2(w_0+\zeta)}{\partial y^2}\right|_{y=b}=\left.\frac{\partial^2 f_0}{\partial y^2}\right|_{y=b}.$$

Поскольку (3) является решением задачи (1), (2) при $f(x, y) = f_0(x, y)$, $r(x, y) = r_0(x, y)$, то краевая задача относительно функции $\zeta(x, y)$ принимает следующий вид:

$$D\nabla^4\zeta+h\left(q\frac{\partial^2\zeta}{\partial x^2}+p\frac{\partial^2\zeta}{\partial y^2}\right)=0, \tag{6}$$

$$\zeta(0, y)=\zeta(a, y)=\zeta(x, 0)=\zeta\,(x, b)=$$

$$=\left.\frac{\partial^2\zeta}{\partial x^2}\right|_{x=0}=\left.\frac{\partial^2\zeta}{\partial x^2}\right|_{x=a}=\left.\frac{\partial^2\zeta}{\partial y^2}\right|_{y=0}=\left.\frac{\partial^2\zeta}{\partial y^2}\right|_{y=b}=0. \tag{7}$$

Итак, исследование непрерывности зависимости решения задачи (1), (2) от f и r свелось к нахождению условия, при котором задача (6), (7) имеет нетривиальное решение.

Удовлетворяя граничным условиям (7), решение задачи (6), (7) ищем в виде

$$\zeta=d\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}. \tag{8}$$

В результате подстановки (8) в (6) получаем следующее условие нетривиальности решения задачи (6), (7):

$$(k^2m^2+n^2)^2=\alpha k^2m^2+\beta n^2, \tag{9}$$

где $\alpha=\dfrac{b^2h}{\pi^2Dq}$; $\beta=\dfrac{b^2h}{\pi^2Dp}$; $k=\dfrac{b}{a}$.

Например, при $k = 2$ (9) можно записать

$$\beta = -4\frac{m^2}{n^2}\alpha + n^2\left(4\frac{m^2}{n^2}+1\right)^2. \tag{10}$$

Пусть в задаче (1)—(2) функции, описывающие начальный прогиб и поперечное воздействие, заданы с точностью до малых параметров, т.е. $f(x, y) = f_0(x, y) + \varepsilon_1\varphi_1(x, y)$ и $r(x, y) = r_0(x, y) + \varepsilon_2\varphi_2(x, y)$. А параметры внешних воздействий p и q принадлежат области непрерывности зависимости, ограниченной графиком функции (10). В этом случае решение, как следует из аналитичности выражений в (1)—(4), будет аналитическими функциями параметров ε_i в окрестности точки $\varepsilon_i = 0$, поэтому в этом случае будем искать его в виде степенных рядов (являющихся рядами Тейлора)

$$w = \sum_{k,l=0}^{\infty}\varepsilon_1^k\varepsilon_2^l w^{kl}. \tag{11}$$

Подставляя (11) в (1)—(2) и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях малых параметров, получаем, например, для первого приближения следующие задачи:

$$D\nabla^4 w^{10} + h\left(q\frac{\partial^2 w^{10}}{\partial x^2} + p\frac{\partial^2 w^{10}}{\partial y^2}\right) = D\nabla^4\varphi_1 \tag{12}$$

с граничными условиями

$$\begin{gathered} w^{10}(0, y) = \varphi_1(0, y);\ w^{10}(a, y) = \varphi_1(a, y); \\ w^{10}(x, 0) = \varphi_1(x, 0);\ w^{10}(x, b) = \varphi_1(x, b); \\ \left.\frac{\partial^2 w^{10}}{\partial x^2}\right|_{x=0} = \left.\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial x^2}\right|_{x=0};\ \left.\frac{\partial^2 w^{10}}{\partial x^2}\right|_{x=a} = \left.\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial x^2}\right|_{x=a}; \\ \left.\frac{\partial^2 w^{10}}{\partial y^2}\right|_{y=0} = \left.\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial y^2}\right|_{y=0};\ \left.\frac{\partial^2 w^{10}}{\partial y^2}\right|_{y=b} = \left.\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial y^2}\right|_{y=b}; \end{gathered} \tag{13}$$

$$D\nabla^4 w^{01} + h\left(q\frac{\partial^2 w^{01}}{\partial x^2} + p\frac{\partial^2 w^{01}}{\partial y^2}\right) = \varphi_2 \tag{14}$$

с граничными условиями

$$\begin{gathered} w^{01}(0, y) = w^{01}(a, y) = w^{01}(x, 0) = w^{01}(x, b) = \\ = \left.\frac{\partial^2 w^{01}}{\partial x^2}\right|_{x=0} = \left.\frac{\partial^2 w^{01}}{\partial x^2}\right|_{x=a} = \left.\frac{\partial^2 w^{01}}{\partial y^2}\right|_{y=0} = \left.\frac{\partial^2 w^{01}}{\partial y^2}\right|_{y=b} = 0. \end{gathered} \tag{15}$$

Пусть $\varphi_1 = \sin\frac{\pi x}{a}\sin\frac{\pi y}{2b}$ и $\varphi_2 = \sin\frac{\pi x}{a}\sin\frac{\pi y}{b}$. Удовлетворяя граничным условиям, решения задач (12)—(13) и (14)—(15) ищем в виде

$$w^{10} = C_1\sin\frac{\pi x}{a}\sin\frac{\pi y}{2b}, \tag{16}$$

$$w^{01} = C_2\sin\frac{\pi x}{a}\sin\frac{\pi y}{b}. \tag{17}$$

Подставляя в (12), (14), получаем уравнения для нахождения постоянных C_1, C_2

$$\frac{25\pi^2}{4a^2}C_1 - \frac{h}{D}(4q+p)C_1 = \frac{25\pi^2}{4a^2}, \tag{18}$$

$$\frac{3\pi^4}{a^4}C_2 - \frac{h}{D}\frac{\pi^2}{a^2}(4q+p)C_2 = 1. \tag{19}$$

Из них находим значения C_1, C_2

$$C_1 = \frac{1}{1-\frac{4}{25}(4\alpha_1+\beta_1)}, \tag{20}$$

$$C_2 = \frac{a^4/\pi^4}{3-(\alpha_1+\beta_1)}, \tag{21}$$

где $\alpha_1 = \frac{a^2qh}{\pi^2 D}$; $\beta_1 = \frac{a^2ph}{\pi^2 D}$.

Итак, с точностью до величин первого порядка малости решение задачи (1)—(2), характеризующее продольно-поперечный изгиб, имеет следующий вид

$$w = w_0(x,y) + \varepsilon_1 w^{10}(x,y) + \varepsilon_2 w^{01}(x,y), \tag{22}$$

так как остаточные члены рядов Тейлора (11) будут величинами второго порядка малости.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Вольмир А. С. Устойчивость упругих систем. — М.: Физматгиз, 1963. — 980 с.
2. Колмогоров А. Н., Фомин С. В. Элементы теории функций и функционального анализа. — М.: Наука, 1976. — 542 с.
3. Минаева Н. В. Адекватность математических моделей деформируемых тел. — М.: Научная книга, 2006. — 235 с.