

ОПЫТ ИСКЛЮЧЕНИЯ ИЗБЫТОЧНЫХ СВЯЗЕЙ В ШЕСТИЗВЕННЫХ ПЛОСКИХ МЕХАНИЗМАХ

*Д-р техн. наук, проф. Л. Т. ДВОРНИКОВ, канд. техн. наук, доц. Л. Н. ГУДИМОВА,
асс. Н. С. БОЛЬШАКОВ*

Известно, что все плоские рычажные механизмы, обладая избыточностью связей, функционируют с принуждением к движению. Излагается метод обнаружения и устранения избыточных связей путем адресной замены шарниров на кинематические пары более высоких классов, что обеспечивает механизмам самоустановливаемость, безыносность, и высокий КПД.

It is known, that flat lever mechanisms, possessing redundancy of connections, function with compulsion to movement. The method of detection and elimination of superfluous connections by address replacement of hinges by kinematic pairs higher classes that provides to mechanisms self-installation, non-abrasiveness, and high output-input ratio is stated.

Наиболее важные результаты в решении задачи исключения избыточных связей в механизмах были получены профессором Решетовым Л. Н. [1]. Его метод хорошо известен и широко используется на практике. Авторы предпринимают попытку обосновать возможный алгоритм решения подобных задач. В [2] одним из авторов настоящей статьи было предложено использовать для выявления и устранения избыточных связей в плоских механизмах систему двух уравнений, которые описывают исследуемую схему одновременно и как плоскую, и как пространственную (нулевого семейства). Совместное решение таких уравнений позволяет определить, сколько пар плоской схемы механизма должно быть заменено на пары более высоких классов.

В самом общем виде предложенная система имеет вид

$$\begin{cases} \sum_{k=5}^1 p_k = \frac{3n - W}{2}, \\ \sum_{k=5}^1 k \cdot p_k = 6n - W, \end{cases} \quad (1)$$

где W — требуемая подвижность кинематической цепи, k — класс кинематических пар ($k = 5, 4, 3, 2, 1$), n — число звеньев цепи.

В той же работе [1] было показано, что число избыточных связей q любой механической системы можно определить по зависимости

$$q = m(p - n), \quad (2)$$

где m — число общих связей, накладываемых на механическую систему в целом (по Добровольскому В.В.), p — общее число пар исследуемой системы. Известно, что для плоских механизмов $m = 3$, тогда для них

$$q = 3(p - n), \quad (3)$$

а для классически пространственных механизмов $m = 0$ и такие механизмы оказываются безыносными, самоустанавливающимися.

Если исключить в кинематических цепях плоских механизмов кинематические пары первого и второго классов, т.е. принять, что $p_1 = 0, p_2 = 0$ (из-за сложности их реализации

в механизмах), то система (1) примет вид

$$\begin{cases} p_5 + p_4 + p_3 = \frac{3n - W}{2} \\ 5p_5 + 4p_4 + 3p_3 = 6n - W \end{cases} \quad (4)$$

Несмотря на то, что в (4) число неизвестных ($p_k = 3$) более числа уравнений, система эта вполне разрешима, так как по ней ищутся лишь целые и положительные решения. Если решить первое уравнение системы (4) относительно количества кинематических пар третьего класса, то получим

$$p_3 = \frac{3n - W}{2} - p_4 - p_5. \quad (5)$$

Подставляя (5) во второе уравнение системы (4), после простейших преобразований найдем, что

$$p_4 = \frac{3n + W}{2} - 2p_5. \quad (6)$$

С учетом (6) преобразуем (5) так, чтобы значение p_3 определялось однозначно числом пар p_5

$$p_3 = p_5 - W. \quad (7)$$

Теперь, задаваясь значениями числа пар p_5 , по (6) и (7) можно определять соответствующие значения чисел пар p_4 и p_3 .

Рассмотрим применение зависимостей (6) и (7) для конкретной задачи, которую сформулируем так: известный плоский четырехзвенник ($n = 3$, четвертое звено — стойка) с четырьмя парами p_5 путем замены на пары более высоких классов преобразовать в безызбыточный механизм.

В первоначальном виде исследуемый механизм показан на рис. 1, и все используемые в нем пары есть пары p_5 . Согласно (3) в этом механизме три избыточные связи. Подставляя известные значения $n = 3$, $W = 1$ в (6) и (7), получим

$$\begin{cases} p_4 = 5 - 2p_5 \\ p_3 = p_5 - 1 \end{cases} \quad (8)$$

откуда могут быть найдены всего два целочисленных положительных решения

1. $p_5 = 2, p_4 = 1, p_3 = 1,$
2. $p_5 = 1, p_4 = 3, p_3 = 0.$

Оба эти решения реализованы в схемах на рис. 1, b и c.

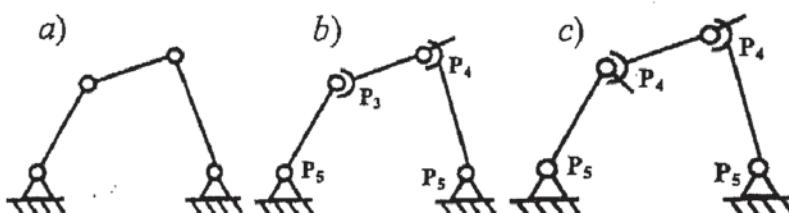


Рис. 1. Четырехзвенний механизм

При построении нами были использованы три вида пар: p_5 в виде обычного шарнира (рис. 2, a), пара p_4 рассмотрена в качестве примера в виде сферического шарнира с пальцем (рис. 2, b) (возможно применение и другой кинематической пары IV класса), а p_3 в виде сферического шарнира без пальца (рис. 2, c).

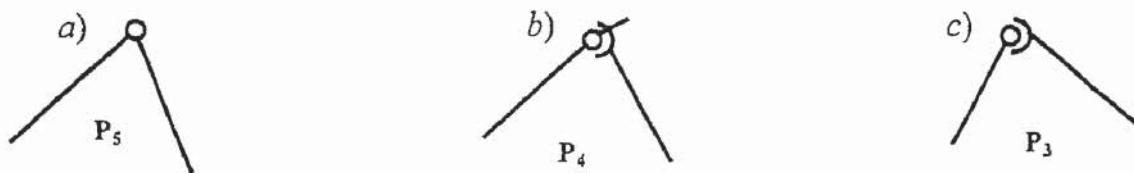


Рис. 2. Условное обозначение кинематических пар

Показанное решение одноконтурного механизма с тремя линейными подвижными звеньями уже известно и приводилось в публикациях, например в работах Богубаева Н.С. [3].

Все другие плоские механизмы, содержащие более трех подвижных звеньев, выполняются неодноконтурными, причем в них могут находиться как подвижные, так и неподвижные замкнутые контуры. На рис. 3 показаны два шестизвездника. Один (рис. 3, a) с двумя неподвижными относительно стойки контурами ($ABCD$ и $DCEFG$), второй (рис. 3, b) с двумя контурами ($ABDFG$ и $CDEF$), один из которых ($CDEF$) является подвижным. Если поставить задачу исключения избыточных связей в этих механизмах, то формальное решение задачи по уравнениям (6) и (7) не может быть ответом на вопрос — какие именно из шарниров следует заменить на пары более высоких классов. В соответствии с изложенным, введем в рассмотрение два вида избыточных связей. Одни назовем родовыми, другие контурными.



Рис. 3. Шестизвездные механизмы

Как следует из формулы (2), избыточные связи для всего механизма определяются, в частности, параметром m , т.е. числом общих связей, накладываемых на весь механизм. Это понятие было введено проф. Добровольским В.В. По параметру m Добровольский В.В. разделил все механизмы на роды — первого ($m = 1$), второго ($m = 2$), третьего ($m = 3$) и т.д. Исходя из этого, авторы нашли целесообразным избыточные связи, появляющиеся в результате наложения общих связей m на весь механизм, называть «родовыми».

В сложных механизмах необходимо добиться такого расположения кинематических пар более высоких классов, чтобы безызбыточными были одновременно и замкнутые контуры и механизм в целом. Прежде чем приступить к решению задачи исключения избыточных связей в сложных механизмах обратимся к задаче о разделении механизма на простые контуры. Главное условие правильного выбора вида дополнительных контуров заключается в том, чтобы ни одно из звеньев механизма не было использовано дважды. Обратимся к схемам механизмов, приведенным на рис. 3.

Первый из них должен быть представлен в виде рис. 4, *a* и *b* или рис. 4, *c* и *d*; а второй в виде рис. 4, *e* и *f* или рис. 4, *g* и *h*. Обратим внимание на то, что разделение механизма на контуры является операцией вполне очевидной, но ответственной, и для различных механизмов требует часто вдумчивого подхода. Найдем для механизмов, приведенных на рис. 3, общее число избыточных связей, необходимые количества пар более высоких классов для замены ими пар p_5 и способ такого расположения найденных пар в механизме, чтобы избыточность связей отсутствовала как в механизме в целом, так и в любом его контуре.

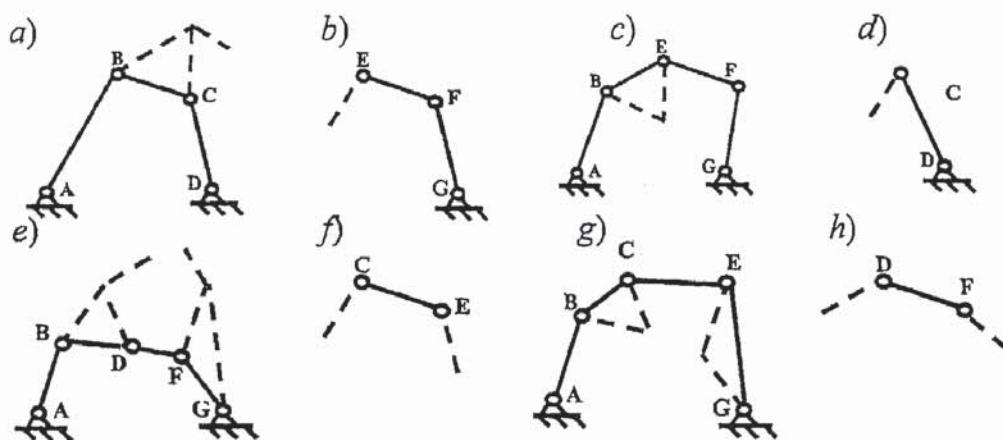


Рис. 4. Разделение рассматриваемых механизмов на контуры

Прежде всего обратимся к механизму, приведенному на рис. 3, *a*. По (3) найдем, что общее число избыточных связей в нем $q = 6$. Подставляя значения $W = 1, n = 5$ в уравнения (6) и (7), составим систему

$$\begin{cases} p_4 = 8 - 2p_5 \\ p_3 = p_5 - 1 \end{cases} \quad (9)$$

Найдем целочисленные положительные решения полученной системы. Всего их четыре

1. $p_5 = 4, p_4 = 0, p_3 = 3,$
 2. $p_5 = 3, p_4 = 2, p_3 = 2,$
 3. $p_5 = 2, p_4 = 4, p_3 = 1,$
 4. $p_5 = 1, p_4 = 6, p_3 = 0.$
- (10)

Если говорить о механизме в целом, то формально каждое из приведенных решений является удовлетворительным. Однако при этом не гарантируется, что каждый из контуров механизма будет безызбыточным.

Обратимся теперь к рис. 4, *a*, *b*, *c*, *d*, на котором показаны разделения механизма на контуры — на части. Первая часть первого разделения механизма (рис. 4, *a*) состоит из трех подвижных звеньев ($n = 3$) и четырех кинематических пар ($p_5 = 4$), для нее $W = 3n - 2p_5 = 3 \cdot 3 - 2 \cdot 4 = 1$.

Для этой части механизма составим систему уравнений по (6) и (7)

$$\begin{cases} p_4 = 5 - 2p_5 \\ p_3 = p_5 - 1 \end{cases} \quad (11)$$

Вторая часть первого разделения (рис. 4, *b*) содержит два подвижных звена $n = 2$ и три пары пятого класса $p_5 = 3$, для нее $W = 0$. Система уравнений в этом случае по (6) и (7) запишется в виде

$$\begin{cases} p_4 = 3 - 2p_5, \\ p_3 = p_5. \end{cases} \quad (12)$$

Система (11) имеет два решения

$$p_5 = 2, p_4 = 1, p_3 = 1, \quad (13)$$

$$p_5 = 1, p_4 = 3, p_3 = 0. \quad (14)$$

Система (12) дает также два решения положительных решения

$$p_5 = 1, p_4 = 1, p_3 = 1, \quad (15)$$

$$p_5 = 0, p_4 = 3, p_3 = 0. \quad (16)$$

Комплексных решений для первого разделения механизма, исходя из рассмотрения его частей, будет четыре. Это алгебраические суммы решений (13) и (15); (14) и (15); (13) и (16); (14) и (16), т.е.

$$\begin{aligned} 1. & p_5 = 3, p_4 = 2, p_3 = 2, \\ 2. & p_5 = 2, p_4 = 4, p_3 = 1, \\ 3. & p_5 = 2, p_4 = 4, p_3 = 1, \\ 4. & p_5 = 1, p_4 = 6, p_3 = 0. \end{aligned} \quad (17)$$

Обратим внимание, что полученные решения (2) и (3) тождественны. Сопоставим решения (10) и (17). Из сопоставления видно, что первое решение из (10) для заданной схемы непригодно. Остальные три удовлетворяют с точки зрения устранения и родовых, и контурных избыточных связей. Перейдем к рассмотрению второго разделения механизма (рис. 3, *a*) на части (рис. 4, *c*, *d*). Первая часть второго разделения при $n = 2$, $p_5 = 5$ дает подвижность $W = 2$. Из уравнений (6) и (7) составим для этой части систему

$$\begin{cases} p_4 = 7 - 2p_5 \\ p_3 = p_5 - 2 \end{cases} \quad (18)$$

Вторая часть второго разделения будет иметь $n = 1$, $p_5 = 2$ подвижность $W = -1$, для нее уравнения (6) и (7) представим системой

$$\begin{cases} p_4 = 1 - 2p_5, \\ p_3 = p_5 + 1. \end{cases} \quad (19)$$

Система (18) имеет два решения

$$p_5 = 3, p_4 = 1, p_3 = 1, \quad (20)$$

$$p_5 = 2, p_4 = 3, p_3 = 0. \quad (21)$$

Система (19) — одно решение

$$p_5 = 0, p_4 = 1, p_3 = 1. \quad (22)$$

Комплексных решений для второго разделения будет два — это (20) и (22); (21) и (22), т.е.

$$\begin{aligned} 1. p_5 = 3, p_4 = 2, p_3 = 2, \\ 2. p_5 = 2, p_4 = 4, p_3 = 1. \end{aligned} \quad (23)$$

Сравним теперь все три решения в поставленной задачи, а именно (10), (17) и (23). Совпадающими являются только два те, что записаны как (23). Обратимся к первому из решений (23). Это решение появилось из пяти независимых друг от друга частных решений: из второго уравнение общего решения механизма (10), решений уравнений (13), (15), (20) и (22). Перепишем их в одну систему

$$\left\{ \begin{array}{l} 1. p_5 = 3, p_4 = 2, p_3 = 2 \\ 2. p_5 = 2, p_4 = 1, p_3 = 1 \\ 3. p_5 = 1, p_4 = 1, p_3 = 1 \\ 4. p_5 = 3, p_4 = 1, p_3 = 1 \\ 5. p_5 = 0, p_4 = 1, p_3 = 1 \end{array} \right. \quad (24)$$

Поставим теперь задачу так: найти, какие именно (адресно) шарниры исследуемого механизма необходимо заменить на пары более высоких классов и на какие именно. Не решив такой задачи, гарантировать безызбыточность механизма не возможно.

Поступим так: идентифицируем все кинематические пары механизма (рис. 3, a), обозначив их соответствующими буквами (на рис. 4, a это уже показано) и запишем алгебраические уравнения, соответствующие решениям (24). В левых частях в виде суммы обозначенных буквами кинематических пар, входящих в рассматриваемые схемы, а в правых частях в виде суммы соответствующих решений (24). Так, из первого решения (24) следует, что

$$A + B + C + D + E + F + G = 3p_5 + 2p_4 + 2p_3, \quad (25)$$

из второго решения по (13)

$$A + B + C + D = 2p_5 + p_4 + p_3, \quad (26)$$

из третьего решения по (15)

$$E + F + G = p_5 + p_4 + p_3. \quad (27)$$

из четвертого решения по (20)

$$A + B + E + F + G = 3p_5 + p_4 + p_3, \quad (28)$$

и из пятого решения по (22)

$$C + D = p_4 + p_3. \quad (29)$$

В целом получим систему

$$\left\{ \begin{array}{l} A + B + C + D + E + F + G = 3p_5 + 2p_4 + 2p_3 \\ A + B + C + D = 2p_5 + p_4 + p_3 \\ E + F + G = p_5 + p_4 + p_3 \\ A + B + E + F + G = 3p_5 + p_4 + p_3 \\ C + D = p_4 + p_3 \end{array} \right. \quad (30)$$

В этой системе 7 неизвестных (A, B, C, D, E, F, G) и пять уравнений. Чтобы решить эту систему, необходимо задаться еще двумя уравнениями. Поступим так: ведущее звено

1 (рис. 3, а) целесообразно соединить со стойкой шарниром p_5 с целью наиболее простой организации привода, т.е. примем, что

$$A = p_5. \quad (31)$$

Обратим внимание на то, что это условие не противоречит системе (30). Во всех уравнениях, где справа наличествует пара A , слева имеется p_5 . По этой же причине и с теми же основаниями примем, что

$$G = p_5. \quad (32)$$

Подставим (31) и (32) в систему (30) и упростим ее

$$\begin{cases} B + C + D + E + F = p_5 + 2p_4 + 2p_3 \\ B + C + D = p_5 + p_4 + p_3 \\ E + F = p_4 + p_3 \\ B + E + F = p_5 + p_4 + p_3 \\ C + D = p_4 + p_3 \end{cases} \quad (33)$$

Система (33) может быть решена любым способом решения алгебраических систем. Подставим $(C + D)$ из пятого уравнения во второе и найдем, что $B + p_4 + p_3 = p_5 + p_4 + p_3$, $B = p_5$.

Подставив B в четвертое уравнение системы, получим $E + F = p_4 + p_3$, тогда система (33) даст по два тождественных уравнения $C + D = p_4 + p_3$, $E + F = p_4 + p_3$. Это означает, что при замене пар в точках C и D на пары p_4 или p_3 , точно также как и в точках E и F — безызбыточность механизма будет гарантирована.

Учитывая то обстоятельство, что кинематическая пара D в механизме (рис. 5) является опорной, её следовало бы выполнить в виде пары p_4 и исполнить её как цилиндрический шарнир, а шаровой шарнир переместить в точку C . Алгоритм позволяет это сделать. И вообще, при решении задачи исключения избыточных связей следует особо учитывать требования к наиболее нагруженным контурным опорным кинематическим парам.

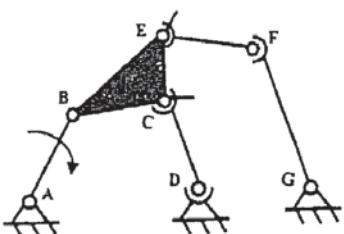


Рис. 5. Шестизвенный безызбыточный механизм

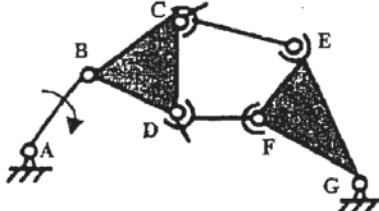


Рис. 6. Шестизвенный безызбыточный механизм

Рассмотрим теперь механизм, приведенный на рис. 3, б. Число избыточных связей в нем также равно шести, он состоит из пяти звеньев ($n = 5$), степень подвижности равна единице ($W = 1$). Подставим эти значения в уравнения (6) и (7) и получим следующую систему уравнений

$$\begin{cases} p_4 = 8 - 2p_5, \\ p_3 = p_5 - 1. \end{cases} \quad (34)$$

Найдем целые положительные решения исследуемой системы. Их, как и в предыдущем механизме, всего четыре.

$$\begin{aligned} 1. p_5 &= 4, p_4 = 0, p_3 = 3, \\ 2. p_5 &= 3, p_4 = 2, p_3 = 2, \\ 3. p_5 &= 2, p_4 = 4, p_3 = 1, \\ 4. p_5 &= 1, p_4 = 6, p_3 = 0. \end{aligned} \quad (35)$$

На рис 4, e, f, g, h показаны разделения механизма с подвижным контуром. Первое разделение (рис. 4, e, f) состоит из контура $(ABDFG)$, в котором число подвижных звеньев ($n = 4$), число кинематических пар пятого класса ($p_5 = 5$), подвижность ($W = 2$). Оставшаяся часть механизма, после выделения контура, представлена одним звеном (CE). Для него: ($n = 1$), ($p_5 = 2$), ($W = -1$).

Второе разделение содержит контур $(ABC EG)$, состоящий из четырех подвижных звеньев ($n = 4$), пяти кинематических пар ($p_5 = 5$), с подвижностью ($W = 2$) и звена (DF), которое имеет ($n = 1$), ($p_5 = 2$), ($W = -1$).

Рассмотрим решение первого разделения. Для контура $ABDFG$ (рис. 4, e) приведенные выше значения n , p_5 , W подставим в уравнения (6) и (7) и получим следующую систему

$$\begin{cases} p_4 = 7 - 2p_5, \\ p_3 = p_5 - 2. \end{cases} \quad (36)$$

Для звена (CE) уравнения (6) и (7) примут такой вид

$$\begin{cases} p_4 = 1 - 2p_5, \\ p_3 = p_5 + 1. \end{cases} \quad (37)$$

Система (36) будет иметь два решения

$$1. p_5 = 2, p_4 = 3, p_3 = 0, \quad (38)$$

$$2. p_5 = 3, p_4 = 1, p_3 = 1. \quad (39)$$

Система (37) имеет только одно решение

$$1. p_5 = 0, p_4 = 1, p_3 = 1. \quad (40)$$

Комплексных решений для первого разделения механизма (рис. 4, e, f) из объединения рассмотренных отдельных решений (38) и (40); (39) и (40) будет два

$$\begin{aligned} 1. p_5 &= 2, p_4 = 4, p_3 = 1, \\ 2. p_5 &= 3, p_4 = 2, p_3 = 2. \end{aligned} \quad (41)$$

Полученные решения (41) сопоставим с решениями (35), определенными для всего механизма. Из сравнения видно, что первое и четвертое решения уравнений (35) не пригодны. Оставшиеся два удовлетворяют условиям устранения родовых и контурных избыточных связей. Теперь перейдем к рассмотрению второго разделения (рис. 4, d, h). Уравнения (6) и (7) для контура $(ABC EG)$ будут иметь вид, определяемый системой

$$\begin{cases} p_4 = 7 - 2p_5 \\ p_3 = p_5 - 2 \end{cases} \quad (42)$$

Для звена (DF) эти уравнения запишутся так

$$\begin{cases} p_4 = 1 - 2p_5, \\ p_3 = p_5 + 1. \end{cases} \quad (43)$$

Система (42) имеет два решения

$$1. p_5 = 2, p_4 = 3, p_3 = 0, \quad (44)$$

$$2. p_5 = 3, p_4 = 1, p_3 = 1. \quad (45)$$

Система (43) — только одно решение

$$1. p_5 = 0, p_4 = 1, p_3 = 1. \quad (46)$$

Комплексные решения для второго разделения, полученные при сложении (44) и (46); (45) и (46)

$$\begin{cases} 1. p_5 = 2, p_4 = 4, p_3 = 1, \\ 2. p_5 = 3, p_4 = 2, p_3 = 2. \end{cases} \quad (47)$$

Сравним теперь все три полученных решения: для всего механизма (35), для первого разделения (41), для второго разделения (47). Первое и четвертое решения (35) не совпадают с решениями (41) и (47). Остальные могут использоваться при дальнейшем решении задачи. В качестве примера рассмотрим второе решение, которое явилось результатом пяти независимых друг от друга решений, таких как: общего родового решения для всего механизма — уравнение (35), первого разделения — уравнения (39) и (40), и второго разделения — уравнения (45) и (46). Объединим их в одну систему

$$\begin{cases} 1. p_5 = 3, p_4 = 2, p_3 = 2, \\ 2. p_5 = 3, p_4 = 1, p_3 = 1, \\ 3. p_5 = 0, p_4 = 1, p_3 = 1, \\ 4. p_5 = 3, p_4 = 1, p_3 = 1, \\ 5. p_5 = 0, p_4 = 1, p_3 = 1. \end{cases} \quad (48)$$

Теперь найдем, какие именно шарниры необходимо заменить на пары более высоких классов. Обозначим кинематические пары буквами, приведенными на рис. 4, e, f, g, h , и запишем, как и в предыдущем примере, слева алгебраические уравнения, соответствующие решению системы (48), в виде последовательных буквенных сумм кинематических пар, а справа — в виде сумм решений уравнений.

$$\begin{cases} A + B + C + D + E + F + G = 3p_5 + 2p_4 + 2p_3, \\ A + B + D + F + G = 3p_5 + p_4 + p_3, \\ C + E = p_4 + p_3, \\ A + B + C + E + G = 3p_5 + p_4 + p_3, \\ D + F = p_4 + p_3. \end{cases} \quad (49)$$

Чтобы решить эту систему введем еще два уравнения. Примем, что звенья 1 и 5 целисообразно соединить со стойками шарнирами p_5 , т.е.

$$A = p_5, \quad (50)$$

$$G = p_5. \quad (51)$$

Запишем систему (49) с учетом принятых условий (50) и (51)

$$\begin{cases} B + C + D + E + F = p_5 + 2p_4 + 2p_3, \\ B + D + F = p_5 + p_4 + p_3, \\ C + E = p_4 + p_3, \\ B + C + E = p_5 + p_4 + p_3, \\ D + F = p_4 + p_3. \end{cases} \quad (52)$$

Подставим $(D + F)$ во второе уравнение системы (52) и получим, что

$$B + p_4 + p_3 = p_5 + p_4 + p_3, \quad B = p_5.$$

Учитывая полученное значение B , систему (52) теперь запишем так

$$\begin{cases} C + D + E + F = 2p_4 + 2p_3, \\ D + F = p_4 + p_3, \\ C + E = p_4 + p_3, \\ C + E = p_4 + p_3, \\ D + F = p_4 + p_3. \end{cases} \quad (53)$$

Анализ полученных решений означает, что от замены кинематических пар в точках F и D на пары p_4 или p_3 , как и точках C и E , безызбыточность и контуров, и всего механизма в целом будет обеспечена. На рис. 6 приведен рассмотренный механизм, в котором расположение кинематических пар соответствует проведенному решению.

Таким образом, для устранения избыточных связей в любой механической системе без изменения числа звеньев необходимо провести замену используемых кинематических пар на пары более высоких классов.

Авторам представляется необходимым указать на то, что при решении аналогичных задач следует стремиться создавать машины, которые бы удовлетворяли условиям максимально возможного увеличения коэффициента полезного действия (а это достигается созданием безызбыточных, самоустанавливающихся механизмов), требуемой точности движения выходных звеньев и исключением опасных для машин колебательных процессов в них. Изложенный метод позволяет решать задачи не только полного, но и ограниченного исключения избыточных связей в механизмах.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Решетов Л. Н. Самоустанавливающиеся механизмы: Справочник. — М.: Машиностроение, 1979. — 334 с.
2. Дворников Л. Т. Начала теории структуры механизмов. Учебное пособие. Новокузнецк, СибГТМА, 1994. — 102 с.
3. Богубаев Н. С. Избыточные связи в плоских механизмах высоких классов и методы их устранения // Сб. науч. статей «Совершенствование процессов и узлов горных машин». — Фрунзе, 1990. — С. 65—73.