

РАСЧЕТ И КОНСТРУИРОВАНИЕ МАШИН

539.37

РАЗРУШЕНИЕ ПЕРЕМОЧКИ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО ОТВЕРСТИЯ В ПЛАСТИНЕ

Д-р техн. наук, проф. Г. Т. ТАРАБРИН, асп. Л. Л. ЛЕВЦАНОВА

Получено решение задачи о напряжениях в упругой пластине с эллиптическим отверстием, подкрепленным перемычкой, permanently разрушающейся при росте нагрузки на краях пластины.

The solution of the problem about stresses in the elastic plate with the elliptical hole reinforced by the crosspiece permanently destroyed under increase of the loading at the edges of the plate was received.

Постановка задачи. Эллиптическое отверстие с полуосями длины a , b в однородной изотропной, бесконечно больших размеров пластине подкреплено деформируемой перемычкой, ось которой совпадает с полуосью эллипса a . Пластина помещена в прямоугольные декартовы координаты x , y , начало которых совмещено с центром эллипса, а ось x с полуосью a (рис. 1). Решается задача линейной теории упругости о плоском напряженном состоянии пластины с одноосно напряженной перемычкой с заданной для перемычки зависимостью напряжения в ней q от линейной деформации e от начала нагружения перемычки до полного ее разрушения (рис. 2).

Пластина подвергается воздействию равномерно распределенной на бесконечности нагрузки интенсивности p , направление которой или совпадает с осью перемычки, тогда на бесконечности компоненты тензора напряжения $\sigma_x = p$, $\sigma_y = 0$, $\tau_{xy} = 0$, или перпендикулярно ей, тогда на бесконечности $\sigma_x = 0$, $\sigma_y = p$, $\tau_{xy} = 0$.

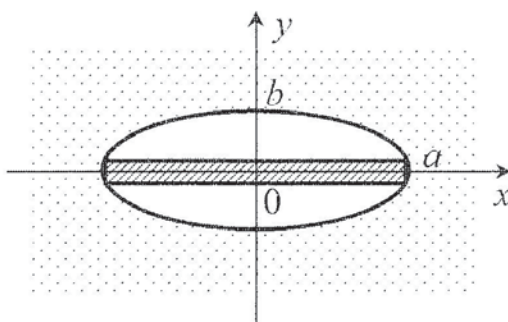


Рис. 1

Зависимость $q(e)$ принята в виде [1]

$$q = eE_w \text{ при } 0 \leq e \leq e_0, \quad q = eE_w [1 - f(e)] \text{ при } e_0 < e \leq e_n,$$

где E_w — модуль Юнга; e_0 — предел целостности — деформация, до наступления которой в перемычке не возникает микротрещин; e_n — предел деформируемости — деформация, при которой перемычка оказывается полностью разрушенной; функция $f(e)$ характеризует

степень разрушения перемычки в виде равномерно рассеянного тумана микротрещин. Предлагаемый метод решения задачи не обусловлен видом функции $f(e)$. Она может быть любой, адекватно аппроксимирующей экспериментально полученную зависимость $q(e)$. При выполнении расчетов нами она принята простейшей линейной $f(e) = (e - e_0)/(e_n - e_0)$, что может быть приемлемо для хрупких материалов, таких, например, как керамика, стекло, цементный камень, чугун и некоторые титановые сплавы. Величина (e_n/e_0) является характеристикой хрупкости (чем она меньше, тем более хрупок материал).

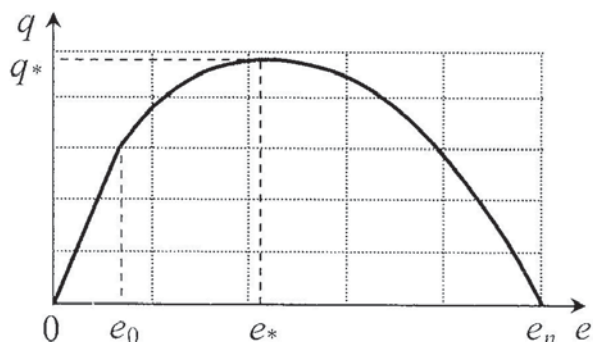


Рис. 2

Задача о напряженно-деформированном состоянии пластины с подкрепленным отверстием является внешне статически неопределимой: лишней неизвестной является нагрузка p , если задаваться значением напряжения q , возникающего в результате взаимодействия контура отверстия с перемычкой. Поэтому разрешающая система уравнений для пластины должна быть дополнена уравнением совместности перемещений контура отверстия и концов перемычки.

Напряженно-деформированное состояние пластины. Задача решается методом Колосова—Мусхелишвили [2] с использованием конформного отображения внешности эллиптического отверстия на плоскости комплексной переменной $z = x + iy$ на внешность единичного круга с центром в начале координат плоскости комплексной переменной $\zeta = re^{i\theta}$, осуществляемого функцией

$$z = \omega(\zeta) = R(\zeta + m/\zeta), \quad R = (a+b)/2, \quad m = (a-b)/(a+b).$$

Напряжения определяются формулами

$$\sigma_x = \operatorname{Re} [2\varphi'(z) - \bar{z}\varphi''(z) - \psi'(z)],$$

$$\sigma_y = \operatorname{Re} [2\varphi'(z) + \bar{z}\varphi''(z) + \psi'(z)],$$

$$\tau_{xy} = \operatorname{Im} [\bar{z}\varphi''(z) + \psi'(z)].$$

Комплексные потенциалы Колосова—Мусхелишвили $\varphi(z)$, $\psi(z)$ представляют собой суммы

$$\varphi(z) = \varphi_1(z) + \varphi_2(z), \quad \psi(z) = \psi_1(z) + \psi_2(z),$$

в которых $\varphi_1(z)$, $\psi_1(z)$ — потенциалы задачи от действия p при отсутствии q и $\varphi_2(z)$, $\psi_2(z)$ — потенциалы от действия q при отсутствии p . Эти потенциалы, после подстановки $z = \omega(\zeta)$, имеют вид

$$\varphi_1(z) = pR [\zeta + (2\delta - m)/\zeta] / 4,$$

$$\psi_1(z) = -pR [\delta/m\zeta + \delta\zeta - (1+m^2)(\delta - m)\zeta/m(\zeta^2 - m)] / 2,$$

где $\delta = 1$ при нагрузке p , направленной вдоль оси x , т.е. по направлению оси перемычки, и $\delta = -1$ при нагрузке p , направленной вдоль оси y , т.е. перпендикулярно направлению оси перемычки;

$$\varphi_2(z) = -(qR/2\pi i) [-(2m/\zeta) \ln(\zeta_2/\zeta_1) + F(\zeta)],$$

$$\psi_2(z) = -(qR/2\pi i) \left\{ \left[2(1+m^2)\zeta/(\zeta^2 - m) \right] \ln(\zeta_2/\zeta_1) - J(\zeta) \right\},$$

$$F(\zeta) = \sum_{k=1}^4 (-1)^k \ln(\zeta_k - \zeta) [(\zeta + m/\zeta) - (\zeta_k + m/\zeta_k)],$$

$$J(\zeta) = \sum_{k=1}^4 (-1)^k \ln(\zeta_k - \zeta) (m\zeta_k + 1/\zeta_k),$$

где $\zeta_1 = -\zeta_3 = \exp(-i\vartheta)$, $\zeta_2 = -\zeta_4 = \exp(i\vartheta)$ — точки единичной окружности на комплексной плоскости $\zeta = \rho \exp(i\theta)$, представляющие собой образы угловых точек перемычки, $2\vartheta = \zeta_1 \wedge \zeta_2 = \zeta_3 \wedge \zeta_4$ — угол в радианах.

Уравнение совместности перемещений. Перемещения u в пластине по направлению оси x и перемещения v по направлению оси y определяются формулой

$$2\mu(u + iv) = v_* \varphi(z) - z \bar{\varphi}'(z) - \bar{\psi}(z),$$

где $\mu = E/2(1+\nu)$, $v_* = (3-\nu)/(1+\nu)$, E — модуль Юнга, ν — коэффициент Пуассона, $\bar{\varphi}'(z) = \text{Re}\varphi'(z) - i\text{Im}\varphi'(z)$.

Ширина перемычки принимается малой настолько, что перемещения точек по всей ширине контакта перемычки с контуром отверстия пластины отождествляются с перемещением $u(a, 0)$ точки в вершине эллипса. Вследствие неразрывности смещений в точках соединения перемычки и пластины перемещение $u(a, 0)$ равно удлинению полудлины перемычки ea от напряжения q . Это приводит к уравнению совместности перемещений

$$\text{Re} [v_* \varphi(a) - a \bar{\varphi}'(a) - \bar{\psi}(a)] = 2\mu ea.$$

Расчет несущей способности. Левая часть уравнения совместности перемещений зависит от значений p, q . Задаваясь последовательно возрастающими значениями $e \in [0, e_n]$ и вычисляя по ним $q(e)$, из этого уравнения можно вычислить последовательно возрастающую нагрузку p и проследить, таким образом, процесс разрушения перемычки с ростом нагрузки p путем вычисления значений $f(e)$. Вместе с тем, при известных значениях p, q можно рассчитать поле напряжений в пластине и проследить изменение концентрации напряжений около отверстия. Полученные значения напряжений дают возможность сделать оценку несущей способности пластины из данного материала с заданными полуосями эллиптического отверстия, подкрепленного перемычкой заданной ширины и ориентации относительно направления действия нагрузки p .

Примеры расчетов выполнены для материала пластины с модулем Юнга $E = 200$ ГН/м² и коэффициентом Пуассона $\nu = 0,25$. У перемычки модуль Юнга $E_w = 150$ ГН/м², полуширина как доля от перпендикулярной ей полуоси эллипса $h = 0,17$, предел целостности $e_0 = 0,001$, характеристика хрупкости $e_n/e_0 = 5$.

На рис. 3 показаны графики зависимости степени разрушения перемычки f от нагрузки p при различных соотношениях длин полуосей a/b . Сплошные линии — нагрузка p перпендикулярна перемычке, штриховые линии — нагрузка параллельна перемычке, $f_* = 0,375$ степень разрушения при максимальном значении напряжения $q_* / e_0 E_w = 1,56$.

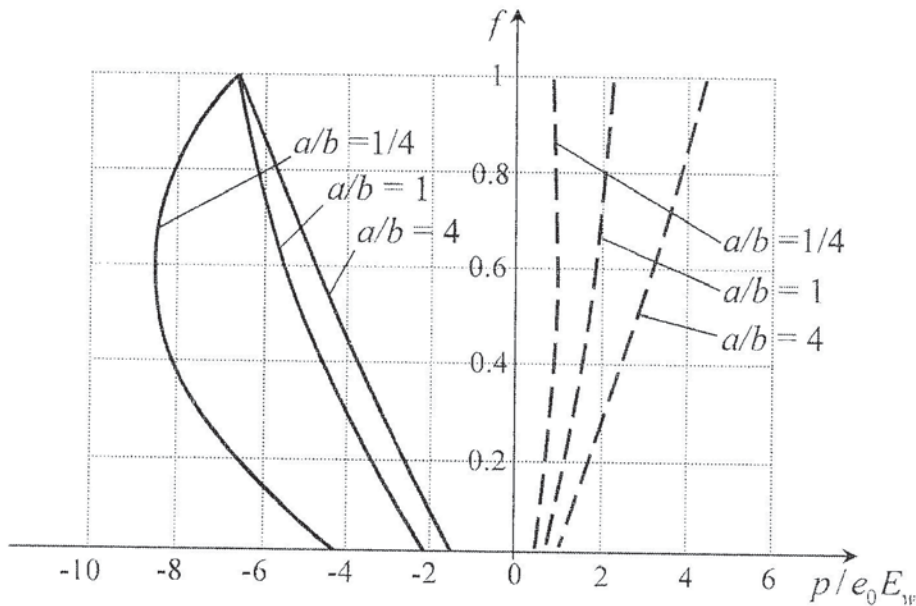


Рис. 3

В табл. 1 приведены значения нагрузки p и нормальных напряжений σ_x, σ_y , параллельных направлению p , в вершине эллипса, которая является концом полуоси, перпендикулярной направлению p , в сравнении с напряжениями при отсутствии перемычки σ_x^0, σ_y^0 при значении e , соответствующем q_* .

Таблица 1

a/b	Нагрузка параллельна перемычке		Нагрузка перпендикулярна перемычке	
	$p/e_0 E_w$	σ_x / σ_x^0	$p/e_0 E_w$	σ_y / σ_y^0
1/16	0,677	0,751	-22,337	0,939
1/4	0,897	0,827	-8,071	0,878
1/2	1,139	0,878	-5,693	0,878
1	1,501	0,923	-4,504	0,910
2	1,955	0,956	-3,910	0,956
4	2,408	0,976	-3,613	0,995
16	3,013	0,994	-3,390	1,036

Допустимая ширина перемычки. Задача решена в предположении, что напряжения взаимодействия перемычки и контура отверстия в пластине распределены равномерно. Это упрощение приемлемо только в некоторых пределах значений ширины перемычки и зависят эти пределы от значения соотношения полуосей эллипса и взаимной ориентации перемычки и направления действия нагрузки p . В табл. 2 даны значения допустимой полуширины h в предположении, что разница в 15% перемещений осевой и угловой точек перемычки является допустимой. Расчет выполнялся при значении p , соответствующем

моменту полного разрушения перемычки в двух случаях: когда она перпендикулярна и параллельна направлению действия нагрузки.

Таблица 2

a/b	Нагрузка параллельна перемычке		Нагрузка перпендикулярна перемычке	
	$p/e_0 E_w$	h	$p/e_0 E_w$	h
1/16	0,202	0,5225	-6,667	0,5225
1/4	0,740	0,5225	-6,667	0,5225
1/2	1,333	0,5200	-6,667	0,5200
1	2,222	0,5220	-6,667	0,5220
2	3,333	0,5220	-6,667	0,5220
4	4,444	0,5160	-6,667	0,5160
16	5,926	0,5220	-6,667	0,5220

Практическая ценность решенной задачи заключается в возможности использовать ее в расчетах на прочность окрестностей отверстий в пластинах и оболочках в виде люков, лючков, иллюминаторов, дверных проемов и т.п. в авиационных, корабельных и в ряде других конструкций машиностроения. Результаты могут найти применение также в расчетах тоннелей кругового и эллиптического сечения с подкреплениями в виде стенок.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Т а р а б р и н Г. Т. Редуктивная модель процесса растяжения хрупкого материала и вопросы расчета с полной диаграммой нагружения. // Бетон и железобетон. — 1994. — № 4. — С. 22-26.
2. М у с х е л и ш в и л и Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. — М.: Наука, 1966. — 708 с.