

РАСЧЕТ И КОНСТРУИРОВАНИЕ МАШИН

539.374

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ПЛАСТИЧЕСКОЙ ДЕФОРМАЦИИ СТРУКТУРНО НЕОДНОРОДНЫХ МАТЕРИАЛОВ

Д-р техн. наук, проф. К. И. РОМАНОВ

Рассмотрены особенности пластических свойств последовательного соединения стержневых элементов и континуальных блоков. Сформулированы условия потери пластической устойчивости цепных систем при одноосном и неоднородном нагружении, позволяющие применить численные методы анализа сетевых структур сложного очертания.

Plastic properties of rod elements and their consecutive connection with continual blocks are examined. Conditions of loss plastic stability in chain systems are formulated at monoaxial and nonmonoaxial loading, which allow us to apply numerical methods of the analysis for network infrastructures of a difficult outline.

Известно [1—5], что неоднородность свойств материала и закономерности ее распределения могут быть обусловлены различными причинами. Например, причиной неоднородности может быть статический разброс свойств пластичного материала по длине образца в опытах по измерению физико-механических характеристик условий образования шейки [6].

В [7] исследована устойчивость одноосного растяжения простейшей модели композитного образца, состоящего из непрерывного волокна и матрицы. При этом рассматривалась схема параллельного соединения двух стержневых элементов, соответствующая схеме Фойхта [8].

Вместе с тем, отдельные элементы структуры неоднородного материала могут быть соединены последовательно. В этом случае приходим к цепной системе, соответствующей схеме Максвелла.

1. П о с т а н о в к а з а д а ч и. Схема Фойхта параллельного соединения стержневых элементов, работающих на растяжение или сжатие под действием внешней силы P , показана на рис. 1. Здесь $l_1 = l_2 = l$ — длины элементов в текущем состоянии; F_1 и F_2 — площади поперечного сечения первого и второго стержней в текущий момент нагружения, соответственно. По свойствам этой модели $P = P_1 + P_2 = \sum P_i = \sigma_1 F_1 + \sigma_2 F_2$, где P_i — сила, воспринимаемая i -м стержнем; σ_i — действительное напряжение в i -м элементе.

В отличие от схемы Фойхта модель Максвелла включает в себя систему последовательного соединенных элементов (рис. 2). При последовательном соединении сила, воспринимаемая каждым стержнем, является по методу сечений, одинаковой: $P_1 = P_2 = P$, а длина всей цепочки, наоборот, аддитивной $l = l_1 + l_2$.

По схеме Фойхта условие наступления пластической неустойчивости всей сборки элементов (глобальная неустойчивость композита) имеет вид $dP=0$. Это условие в общем случае может не совпадать с локальной неустойчивостью отдельных элементов, определяемой равенствами $dP_i = 0$.

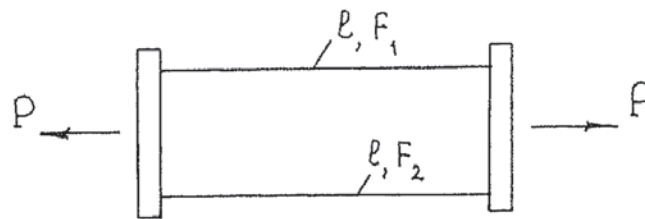


Рис. 1

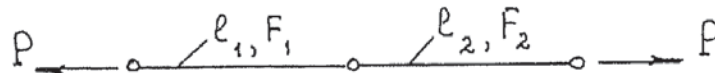


Рис. 2

Свойством модели Максвелла является то, что глобальная неустойчивость всего композита по критерию $dP = 0$ и локальная неустойчивость отдельных элементов по критериям $dP_i = 0$ совпадают между собой. Сказанное отличает модель Максвелла от модели Фойхта, в которой выход из строя слабого звена не означает потери устойчивости всего композита.

Таким образом, в модели Максвелла реализуется концепция слабого звена, в соответствии с которой несущая способность исчерпывается при одноосном растяжении при достижении равенства $\varepsilon_i = \varepsilon_{i*}$ — логарифмическая деформация i -го элемента, ε_{i*} — критическое значение деформации.

Следовательно, ключевой является задача отыскания слабого звена в цепочке элементов, составленной по схеме Максвелла.

2. Одноосная цепная система. На примере простейшей двухэлементной модели изучим особенности пластических свойств последовательного соединения стержней.

Примем, что свойства материала подчиняются зависимости

$$\sigma_i = A_i \varepsilon_i^{n_i},$$

где A_i и n_i — постоянные для $i = 1, 2$, соответственно.

При растяжении двухэлементной модели (рис. 2) имеем цепочку соотношений для несжимаемого материала

$$d\varepsilon_i = dl_i / l_i, \quad F_i = F_{oi} l_{oi} / l_i,$$

$$P = A_1 V_{o1} \frac{1}{l_1} \varepsilon_1^{n_1} = A_2 V_{o2} \frac{1}{l_2} \varepsilon_2^{n_2} \quad (i = 1, 2)$$

где l_{oi} , F_{oi} и $V_{oi} = F_{oi} l_{oi} = V_i$ — начальные длины, площади поперечных сечений и объемы стержней, соответственно.

По критерию $dP = 0$ имеем для независимых условий локальной неустойчивости $dP_1 = 0$ и $dP_2 = 0$, т. е.

$$\begin{cases} A_1 V_{o1} \varepsilon_1^{n_1} \frac{d\varepsilon_1}{l_1 \varepsilon_1} = 0 \\ A_2 V_{o2} \varepsilon_2^{n_2} \frac{d\varepsilon_2}{l_2 \varepsilon_2} (n_2 - \varepsilon_2) = 0 \end{cases}$$

Следовательно, пластическая неустойчивость системы может реализоваться в трех вариантах при: 1) $\varepsilon_1 = \varepsilon_{1*} = n_1$; 2) $\varepsilon_2 = \varepsilon_{2*} = n_2$ или 3) в случае $\varepsilon_1 = \varepsilon_{1*} = n_1$ и $\varepsilon_2 = \varepsilon_{2*} = n_2$, одновременно.

При $\varepsilon_{1*} = n_1$ оказывается $l_{1*} = l_{10} \exp n_1$ — длина первого волокна в момент потери устойчивости; $P_{1*} = A_1 F_{o1} n_1^{n_1} / e^{n_1}$ — сила, при которой теряет устойчивость первое зве-

но. В свою очередь при $\epsilon_{2**} = n_2$ длина второго волокна в момент потери устойчивости $l_{2**} = l_{20} \exp n_2$ и, соответственно, сила, при которой теряет устойчивость второе звено, становится равной $P_{2**} = A_2 F_{02} n_2^{n_2} / e^{n_2}$. Наконец, третья возможность обусловлена одновременным выходом из строя обоих элементов цепочки $\epsilon_{1***} = n_1$ и $\epsilon_{2***} = n_2$.

В последнем случае использование ресурса пластичности является оптимальным в том смысле, что параметры системы подстроены под одновременное исчерпание пластической устойчивости всех элементов. В этом случае локальная и глобальная неустойчивость наступают одновременно. В частности, в рассмотренном примере оптимальное соотношение параметров модели определяется равенством

$$A_1 F_{01} n_1^{n_1} / e^{n_1} = A_2 F_{02} n_2^{n_2} / e^{n_2}.$$

Условие выбора слабого звена может быть получено следующим образом. Предположим, что устойчивость двухэлементной модели теряется при $\epsilon_1 = \epsilon_{1*} = n_1$. Тогда $P_* = P_{1*} = A_1 F_{01} n_1^{n_1} / \exp n_1$, т. е. деформацию второго волокна в момент потери устойчивости первого можно найти из соотношения

$$A_1 F_{01} n_1^{n_1} / \exp n_1 = A_2 F_{02} \epsilon_2^{n_2} / \exp \epsilon_2,$$

логарифмируя которое получаем трансцендентное уравнение

$$l_n(\epsilon_2 / n_2) = \epsilon_2 / n_2 - n_2 - l_n \frac{P_{2*}}{P_{1*}}, \quad (1)$$

где $P_{2*} = A_2 F_{02} n_2^{n_2} / \exp n_2$ — сила потери устойчивости второго стержня.

Таким образом, первый элемент будет слабым звеном, если корень уравнения (1) окажется меньше 1, т. е. при $\epsilon_2 / n_2 < 1$. При

$$n_2 + l_n(P_{2*} / P_{1*}) = 1 \quad (2)$$

выполняются одновременно оба равенства $\epsilon_1 = \epsilon_{1*} = n_1$ и $\epsilon_2 = \epsilon_{2*} = n_2$. Следовательно, равенство (2) дает оптимальное соотношение параметров композита.

Пусть, например, требуется определить параметры устойчивости модели при $\epsilon_2 / n_2 = 0,8$ и $n_2 = 0,2$. В этом случае из (1) следует $P_{2*} / P_{1*} = 1,46$.

Естественно, число элементов в цепочке может быть любым. В этом случае выбор слабого звена основывается на системе соотношений типа (1). Опасное состояние в цепочке реализуется при выполнении требований $\epsilon_i = \epsilon_{i*} = n_i$ и $\epsilon_j \leq n_j$, где i — номер слабого звена; $j \neq i$ и $1 \leq j \leq m$, m — число элементов в цепочке.

3. Д в у х о с н а я ц е п н а я с и с т е м а. Например, при растяжении четырехэлементной модели (рис. 3) система геометрических соотношений и уравнений равновесия имеет вид $l_x = l_{x1} + l_{x2}$, $l_y = l_{y1} + l_{y2}$ и

$$\begin{cases} dl_x = l_{x1} d\epsilon_{x1} + l_{x2} d\epsilon_{x2} \\ dl_y = l_{y1} d\epsilon_{y1} + l_{y2} d\epsilon_{y2} \end{cases} \quad (3)$$

$$\begin{cases} P_x = A_{x1} V_{ox1} \frac{1}{l_{x1}} \epsilon_{x1}^{n_{x1}} = A_{x2} V_{ox2} \frac{1}{l_{x2}} \epsilon_{x2}^{n_{x2}} \\ P_y = A_{y1} V_{oy1} \frac{1}{l_{y1}} \epsilon_{y1}^{n_{y1}} = A_{y2} V_{oy2} \frac{1}{l_{y2}} \epsilon_{y2}^{n_{y2}} \end{cases}$$

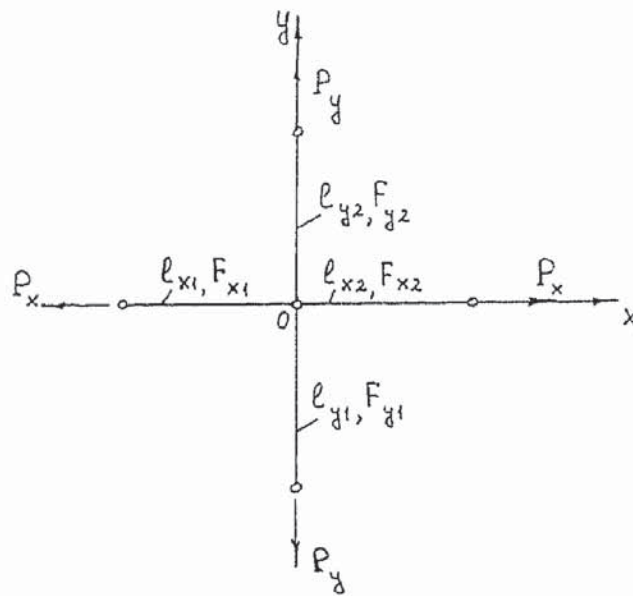


Рис. 3

Следовательно,

$$\begin{cases} dP_x = A_{x1} V_{ox1} \frac{d\varepsilon_{x1}}{l_{x1} \varepsilon_{x1}} (n_{x1} - \varepsilon_{x1}) = A_{x2} V_{ox2} \frac{d\varepsilon_{x2}}{l_{x2} \varepsilon_{x2}} (n_{x2} - \varepsilon_{x2}) \\ dP_y = A_{y1} V_{oy1} \frac{d\varepsilon_{y1}}{l_{y1} \varepsilon_{y1}} (n_{y1} - \varepsilon_{y1}) = A_{y2} V_{oy2} \frac{d\varepsilon_{y2}}{l_{y2} \varepsilon_{y2}} (n_{y2} - \varepsilon_{y2}) \end{cases} \quad (4)$$

По критерию $dP_x dl_x + dP_y dl_y = 0$ имеем набор возможных условий наступления пластической неустойчивости в зависимости от того, какие из стержней цепной системы используются для вычисления dP_x и dP_y . Если, например, взять за основу первый стержень в цепочке вдоль x и первый — в цепочке вдоль y , то по (3)—(5) получим

$$\begin{aligned} & dP_x dl_x + dP_y dl_y = \\ & = A_{x1} V_{ox1} \frac{d\varepsilon_{x1}}{l_{x1} \varepsilon_{x1}} (n_{x1} - \varepsilon_{x1}) (l_{x1} d\varepsilon_{x1} + l_{x1} d\varepsilon_{x2}) + A_{y1} V_{oy1} \frac{d\varepsilon_{y1}}{l_{y1} \varepsilon_{y1}} (n_{y1} - \varepsilon_{y1}) (l_{y1} d\varepsilon_{y1} + l_{y1} d\varepsilon_{y2}) = 0. \end{aligned}$$

Этот критерий приводит к следующему выводу. В неоднородной цепной системе, построенной по схеме последовательного соединения стержней, локальная и глобальная неустойчивость наступают неодновременно.

Например, в рассматриваемой четырехэлементной модели локальная неустойчивость может реализоваться в четырех случаях: при $\varepsilon_{x1} = n_{x1}$, $\varepsilon_{x2} = n_{x2}$, $\varepsilon_{y1} = n_{y1}$ и $\varepsilon_{y2} = n_{y2}$. Глобальная неустойчивость наступает, когда выходят из строя слабые звенья вдоль оси x и вдоль оси y одновременно.

При одновременном выходе из работы слабых звеньев вдоль оси x и вдоль оси y достигается оптимальное использование свойств композита.

4. Двухосное растяжение континуальных блоков. Рассмотрим особенности соединения блоков сплошной среды, имеющих различные физико-механические характеристики A_1 , n_1 и A_2 , n_2 , соответственно, на примере двухэлементной модели (рис. 4).

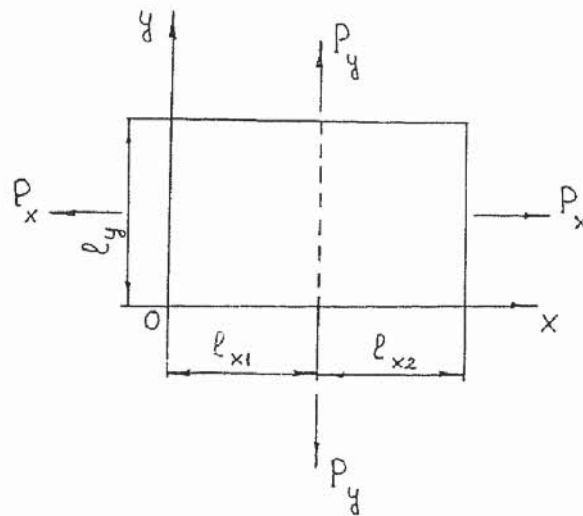


Рис. 4

В направлении x блоки соединены по схеме Максвелла и выполняются соотношения

$$P_x = \sigma_{x1} F_{x1} = \sigma_{x2} F_{x2}, \quad dl_x = dl_{x1} + dl_{x2}.$$

В направлении y элементы работают по схеме Фойхта на основе равенств

$$P_y = \sigma_{y1} F_{y1} = \sigma_{y2} F_{y2}, \quad dl = dl_{y1} + dl_{y2}.$$

Условие $dP_x dl_x + dP_y dl_y = 0$ приводит в случае несжимаемого материала к различным равенствам, выполняющимся в момент наступления неустойчивости. При вычислении dP_x по первому элементу

$$dP_x dl_x + dP_y dl_y = V_{10} \left[d\sigma_{x1} d\varepsilon_{x1} - \sigma_{x1} d\varepsilon_{x1}^2 + d\sigma_{y1} d\varepsilon_y - \sigma_{y1} d\varepsilon_y^2 + \right. \\ \left. + \frac{l_{x2}}{l_{x1}} (d\sigma_{x1} d\varepsilon_{x2} - \sigma_{x1} d\varepsilon_{x1} d\varepsilon_{x2}) \right] + V_{20} (d\sigma_{y2} d\varepsilon_y - \sigma_{y2} d\varepsilon_y^2),$$

где $l_{x1} = l_{x10} \exp \varepsilon_{x1}$, $l_{x2} = l_{x20} \exp \varepsilon_{x2}$.

При вычислении dP_x по второму элементу

$$dP_x dl_x + dP_y dl_y = V_{20} \frac{l_{x1}}{l_{x2}} (d\sigma_{x2} d\varepsilon_{x1} - \sigma_{x2} d\varepsilon_{x2} d\varepsilon_{x1}) + \\ + V_{20} (d\sigma_{x2} d\varepsilon_{x2} - \sigma_{x2} d\varepsilon_{x2}^2) + V_{20} (d\sigma_{y2} d\varepsilon_y - \sigma_{y2} d\varepsilon_y^2).$$

Таким образом, имеет место тождество

$$V_{10} (d\sigma_{x1} d\varepsilon_{x1} - \sigma_{x1} d\varepsilon_{x1}^2) + V_{10} \frac{l_{x2}}{l_{x1}} (d\sigma_{x1} d\varepsilon_{x2} - \sigma_{x1} d\varepsilon_{x1} d\varepsilon_{x2}) = \\ = V_{20} \frac{l_{x1}}{l_{x2}} (d\sigma_{x2} d\varepsilon_{x1} - \sigma_{x2} d\varepsilon_{x2} d\varepsilon_{x1}) + V_{20} (d\sigma_{x2} d\varepsilon_{x2} - \sigma_{x2} d\varepsilon_{x2}^2),$$

которое представляет собой дифференциальный инвариант, не зависящий от способа вычисления $dP_x dl_x$.

Значение $J = dP_x dl_x + dP_y dl_y$ в текущий момент нагружения можно рассматривать как меру оценки опасности напряженно-деформированного состояния композита, а $J=0$, как критерий разрушения при развитых пластических деформациях.

Наряду с J может быть образована другая дифференциальная форма. Например, $W = P_x dl_x + P_y dl_y$ — мощность рассеяния энергии системой неоднородных элементов.

Критическое значение интеграла энергии

$$\mathcal{E} = \int (P_x dl_x + P_y dl_y), \quad \mathcal{E} = \mathcal{E}_c,$$

также можно рассматривать как критерий разрушения.

Выбор того или иного инварианта в качестве скалярного критерия разрушения определяется экспериментальными данными. Однако наиболее оправданным, подтверждаемым экспериментами, по крайней мере при одноосном растяжении, является критерий локализации $J = 0$, непосредственно предшествующей разрушению.

Заметим, что в случае решетки, составленной из стержневых элементов инвариант W может быть проинтегрирован. Например, в четырехстержневой модели (рис. 3)

$$\begin{aligned} \mathcal{E} &= \int (P_x dl_x + P_y dl_y) = \\ &= A_{x1} V_{ox1} \left(\frac{\varepsilon_{x1}^{1+n_{x1}}}{1+n_{x1}} + \frac{A_{x2} V_{ox2}}{A_{x1} V_{ox1}} \frac{\varepsilon_{x2}^{1+n_{x2}}}{1+n_{x2}} \right) + A_{y1} V_{oy1} \left(\frac{\varepsilon_{y1}^{1+n_{y1}}}{1+n_{y1}} + \frac{A_{y2} V_{oy2}}{A_{y1} V_{oy1}} \frac{\varepsilon_{y2}^{1+n_{y2}}}{1+n_{y2}} \right) \end{aligned}$$

— интеграл, характеризующий диссипацию энергии решетки.

В стержневых системах значение $\mathcal{E} = \mathcal{E}_c$ соответствует диссоциации решетки. В системе континуальных блоков, материал которых подчиняется уравнению состояния

$$\sigma_{ei} = A_i \Gamma_i^{n_i},$$

где σ_{ei} — эквивалентное напряжение в i -м блоке; $\Gamma = \int d\varepsilon_e$ — параметр Удквиста, энергия может быть представлена в форме

$$\mathcal{E} = \sum A_i V_i \frac{\Gamma_i}{n_{i+1}}.$$

5. Смешанная модель. Смешанная модель представляет собой комбинацию стержней или континуальных блоков в виде параллельно-последовательного соединения. Если придерживаться классификации моделей по схемам Максвелла и Фойхта, то смешанные модели аналогичны схеме Кельвина [8].

Например, в системе, показанной на рис. 5, четыре стержня вдоль оси работает по схеме Максвелла, три стержня вдоль оси y — по схеме Фойхта и выполняется система соотношений

$$P_x = P_{x12} + P_{x34}, \quad P_y = P_{y1} + P_{y2} + P_{y3},$$

$$P_{x12} = P_{x1} + P_{x2}, \quad P_{x34} = P_{x3} + P_{x4},$$

$$l_x = l_{x1} + l_{x2} = l_{x3} + l_{x4}, \quad l_y = l_{y1} = l_{y2} = l_{y3}.$$

В сочетании с континуальными блоками могут быть структуры с любым типом симметрии. Например, на рис. 6 показана элементарная ячейка регулярной структуры с симметричным армированием вдоль осей x и y , а на рис. 7 представлена модель материала, у которого континуальные блоки вдоль оси x работают по схеме Максвелла, а вдоль оси y — в сочетании с армирующим волокном — по схеме Фойхта. Такая структура характерна, например, для бетона.

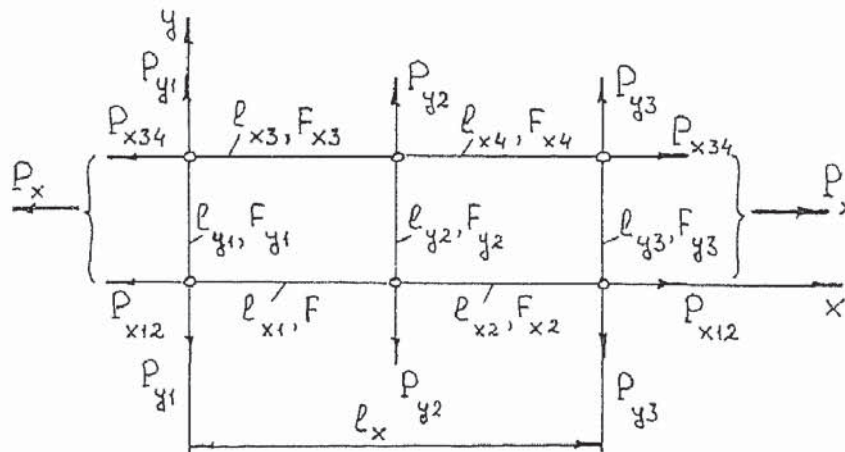


Рис. 5

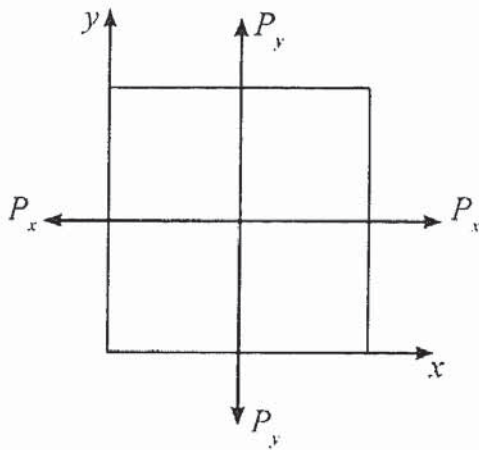


Рис. 6

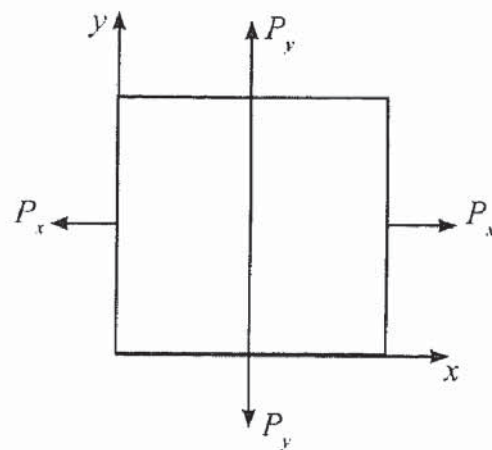


Рис. 7

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Смирнов В. С., Дурнев В. Д. Текстурирование металлов при прокатке. — М.: Металлургия, 1971. — 254 с.
2. Пресняков А. А. Локализация пластической деформации. — М.: Машиностроение, 1983. — 56 с.
3. Давиденков Н. Н., Лихачев В. А. Необратимое формоизменение металлов при циклическом тепловом воздействии. — М.; Л.: Машгиз, 1962. — 223 с.
4. Микропластичность / Под ред. В.Н. Гемниова и А.Г. Рахштадта. — М.: Металлургия, 1972. — 341 с.
5. Пайерлс Р. Квантовая теория твердых тел. — Москва-Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2002. — 260 с.
6. Радченко В. П., Небогина Е. В., Басов М. В. Структурная модель закритического упругопластического деформирования материалов в условиях одноосного растяжения // Вестник Сам ГТУ. Сер. Физ.-мат. науки. — 2000. — № 9. — С. 55—65.
7. Романов К. И., Романова Г. В. Устойчивость растяжения композита // Известия вузов. Машиностроение, 1980. — № 3. — С. 142—143.
8. Малинин Н. Н. Прикладная теория пластичности и ползучести. — М.: Машиностроение, 1975. — 399 с.